THEORIE

DER

QUATERNIONEN.

THEORIE

DER

QUATERNIONEN

VON

Dr. P. MOLENBROEK.

LEIDEN,
DRUCK UND VERLAG VON E. J. BRILL.
1891.

DRUCK VON E. J. BRILL, LEIDEN.

VORWORT.

Indem ich hierbei eine neue Theorie der Quaternionen der Öffentlichkeit übergebe, spreche ich zugleich die Ansicht aus, dass ich durch diese Arbeit einem wirklichen Bedürfnis entgegen komme. Wohl stehen denjenigen, welche dieses neue mathematische Hülfsmittel studiren wollen, die ausgezeichneten Arbeiten des groszen englischen Mathematikers, welcher die Quaternionen zuerst einführte und deren Anwendung zeigte, zu Gebote. Allein die beiden Werke, in denen Hamilton seine Theorie ausführlich dargelegt hat, sind des hohen Preises wegen, nur im Bereiche wissenschaftlicher Gesellschaften und einzelner Studirenden.

Seit einigen Jahren ist nun zwar eine deutsche Übersetzung der Hamilton'schen »Elements" erschienen, welche diesem Mangel abhelfen sollte; ich glaube jedoch, dass der Umfang des den theoretischen Teil erörternden Bandes zumeist davon abschrecken wird, die Theorie der Anwendungen wegen zu studiren. Es gerät deshalb die genannte Arbeit nur in die Hände derjenigen, welche ein specielleres Studium beabsichtigen. Die Andren greifen zu einem weniger ausführlichen Werke und in dieser Hinsicht ist gewiss wohl »An elementary treatise on quaternions" von Prof. Tait als das wichtigste zu bezeichnen.

Es will mir jedoch scheinen, dass diese Arbeit des namhaften englischen Physikers nicht den beabsichtigten Zweck erreichen lässt und ich neige zur Ansicht, dies finde hauptsächtlich seinen Grund darin, dass die Theorie der Quaternionen in dem TAIT'schen Buche nur dürftig berücksichtigt worden ist. Zahlreich sind die Schwierigkeiten, welche mit der Theorie verknüpft sind, die HAMILTON jedoch glänzend zu überwinden gewuszt hat, und es ist notwendig, dieselben ganz beseitigt zu haben, bevor man zu den Anwendungen schreitet, weil sonst das Vertrauen auf die erhaltenen Resultate zweifelhafter Natur ist.

Ich habe deshalb unternommen an der Hand HAMILTON's eine ganz einheitliche Theorie aufzubauen und die wichtigeren Begriffe und Formeln in einfacher Weise aufzuklären. Ob dasselbe mir gelungen ist, sei Andrer Urteil überlassen. Nur möge in Betreff des gewählten Stoffes noch Folgendes bemerkt werden.

Ich meine einerseits behaupten zu können, dass die wichtigeren theoretischen Untersuchungen HAMILTON's sämtlich in dem vorliegenden Bande enthalten sind. Andrerseits aber beanspruche ich die Priorität der Mitteilung einiger hier sich vorfindenden Resultate. Es sind dieselben hauptsächlich in den Artikeln 18—21, 78, 97—107 enthalten, welche die Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ an einen Vektor und an einen Quaternion deuten und wobei meiner Meinung nach der Skalarcharakter des Symbols $\sqrt{-1}$ zuerst deutlich zu Tage tritt.

Bekanntlich hat CLIFFORD in seinen »Mathematical Papers" eine Deutung der Biquaternionen veröffentlicht. Ich bin jedoch der Ansicht, dass dieselbe in dem Systeme der Quaternionen, wie dasselbe von HAMILTON aufgebaut worden ist, keinen Platz finden kann.

Durch die von mir gegebene Deutung ist nicht nur eine geometrische Erläuterung der HAMILTON'schen Bivektoren und Biquaternionen gewonnen, sondern es wird dadurch zugleich der Begriff der aus der analytischen Geometrie stammenden imaginären Punkte geometrisch interpretirt.

Dadurch wird weiter auch noch ermöglicht mit denjenigen analytischen Gleichungen, welche complexe Coefficienten enthalten, eine bestimmte geometrische Darstellung zu verknüpfen, wodurch ein Teil meiner Arbeit den in der letzteren Zeit von Hrn Tarry veröffentlichten Untersuchungen auf dem Gebiete der »géométrie générale" sich anschlieszt.

Bei der Auflösung der Quaterniongleichungen hat ebenfalls, wie ich meine, manche bisher unerwähnte Frage Erledigung gefunden.

Schlieszlich sei noch mitgeteilt, dass ich die Absicht habe der jetzt veröffentlichen Theorie möglichst bald eine systematisch geordnete Darstellung der Anwendungen folgen zu lassen.

P. MOLENBROEK.

Amersfort, im Mai 1891.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER ABSCHNITT.

SUMMEN UND DIFFERENZEN VON VEKTOREN.

ZWEITER ABSCHNITT.

QUOTIENTEN VON VEKTOREN. QUATERNIONEN.

DRITTER ABSCHNITT.

PRODUKTE VON VEKTOREN.

VIERTER ABSCHNITT.

EINIGE GEOMETRISCHEN ÖRTER.

FÜNFTER ABSCHNITT.

DIFFERENTIALE VON QUATERNIONEN.

SECHSTER ABSCHNITT.

AUFLÖSUNG VON QUATERNIONGLEICHUNGEN ERSTEN GRADES.

SIEBENTER ABSCHNITT.

QUATERNIONGLEICHUNGEN ZWEITEN UND HÖHEREN GRADES.

ANHANG.

SUMMEN UND DIFFERENZEN

VON

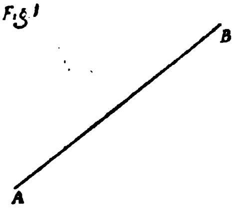
VEKTOREN.

---

1. Wenn eine gerade Linie im Raume betrachtet wird, in Hinsicht nicht nur auf ihre Grösze, sondern auch auf ihre Richtung, so nennt man dieselbe einen Vektor.

Man bezeichnet einen Vektor durch die Angabe zweier den beiden Endpunkten hinzugefügten Buchstaben, z. B. AB ist der Vektor, welcher den Punkt A mit dem Punkte B verbindet. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Richtung des Vektors von dem zuerst angegebenen Punkte gegen den zuletzt geschriebenen verläuft.

Fig. 1



Dementsprechend wird der mit dem zuerst geschriebenen Buchstaben bezeichnete Punkt Anfangspunkt des Vektors, der mit dem nachher geschriebenen Buchstaben bezeichnete Punkt Endpunkt des Vektors genannt.

Der Vektor AB ist deshalb verschieden von BA, indem die Gröszen derselben übereinstimmen, die Richtungen jedoch einander entgegengesetzt sind.

Der Kürze halber wollen wir im Folgenden die Vektoren mehrmals mit den griechischen Buchstaben α, β, γ ..... bezeichnen.

2. Man nennt zwei Vektoren einander gleich, wenn sie sowohl hinsichtlich der Grösze als der Richtung übereinstimmen, oder kürzer:

Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie parallel und an Länge einander gleich sind.

Ungleiche Vektoren sind an Grösze, oder an Richtung, oder an diesen beiden zusammen verschieden.

3. Als Grundsätze betrachten wir:

1°. Wenn jeder von zwei Vektoren einem dritten gleich ist, so sind die beiden ersteren einander gleich.

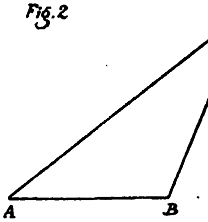
2°. Das Resultat mehrerer Operationen, welche man an einem Vektor oder an mehreren Vektoren vollzieht, kann nicht beeinfluszt werden dadurch, dass man einige der Vektoren durch andere, welche den gewählten gleich sind, ersetzt.

4. Ein Vektor, welcher dieselbe Richtung hat wie ein gegebener Vektor α, und dessen Länge der Längeneinheit gleich kommt, wird Einheitsvektor der Richtung α genannt und mit $U\alpha$ bezeichnet.

5. Die Vergleichung von Vektoren derselben Richtung ist Gegenstand der Arithmetik und führt zu den arithmethischen Zahlen; dieselben nehmen nur auf die Grösze Bezug.

Gröszen, bei denen keine Richtung in Betracht kommt, werden im Gegensatze zu den Vektoren, Skalargröszen genannt. Die arithmetischen Zahlen heiszen auch kurzweg Skalare.

Fig. 2



6. Wenn man von dem Endpunkte B eines Vektors AB aus einen neuen Vektor BC, welcher mit AB gleiche oder von ihm verschiedene Richtung hat, abträgt, so nennt man den Vektor AC die Summe der beiden Vektoren AB und BC, und sagt, dass BC zu AB addirt ist [1]).

1) Wir lenken besonders die Aufmerksamkeit darauf, dass die Terminologie der Vektorenrechnung mit derjenigen des gewöhnlichen Calcüls ganz übereinstimmt, obgleich der damit in der neuen Wissenschaft verbundene Begriff im allgemeinen beträchtlich von dem üblichen abweicht, wodurch mancher Satz der Algebra eine Abänderung erfährt. Der Studirende möge dies, damit mancher Irrtum ihm erspart werde, bei jeder neu eingeführten Operation beachten.

Trägt man von C aus einen dritten Vektor CD ab, so heiszt AD die Summe der drei Vektoren AB, BC, CD. Man schreibt diese beiden Definitionen in Zeichen wie nachstehend:

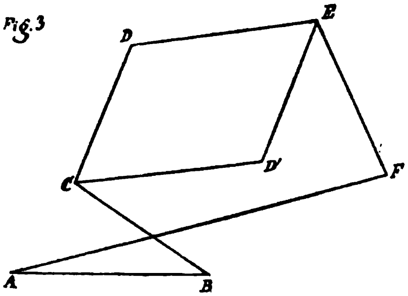
$$AC = AB + BC, \quad AD = AB + BC + CD.$$

7. Die Summe zweier oder mehrerer Vektoren ist in Bezug auf ihre Glieder commutativ und associativ, oder wie man auch zu sagen pflegt:

Die Addition von Vektoren ist eine commutative und associative Operation.

Man versteht unter dem ersteren Ausdrucke, dass die Reihenfolge der einzelnen Glieder der Summe das Resultat nicht beeinträchtigt. Der Satz ist offenbar bewiesen, wenn nur gezeigt wird, dass zwei aufeinanderfolgende Glieder der Summe mit einander verwechselt werden können.

Fig. 3



Es sei in der Figur 3 $AB = \alpha$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$, $DE = \delta$, $EF = \varepsilon$. Zieht man $CD' =// DE$ (d. h. der Geraden DE parallel und gleich), so ist nach einem bekannten Satze der Planimetrie auch $D'E =// CD$. Man hat deshalb $CD' = \delta$, $D'E = \gamma$. Es ist weiter

$AF = AB + BC + CD + DE + EF$ und $AF = AB + BC + CD' + D'E + EF$

und dadurch auch

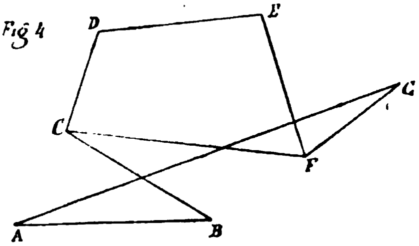
$$AB + BC + CD + DE + EF = AB + BC + CD' + D'E + EF$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \varepsilon \quad . \; . \; . \quad (a. 1)$$

Die Aussage, dass die Addition associativ ist, bedeutet, dass man zwei oder mehrere willkürlich gewählte Glieder der Summe durch ihre Summe ersetzen kann.

Fig. 4



In der Figur 4 sei wieder

AB $= \alpha$, BC $= \beta$, CD $= \gamma$, DE $= \delta$, EF $= \varepsilon$, FG $= \zeta$. Es ist sodann

$$\mathrm{AG} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FG}$$

und

$$\mathrm{AG} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CF} + \mathrm{FG},$$

mithin

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FG} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CF} + \mathrm{FG}.$$

In der zweiten Seite dieser Gleichung wird

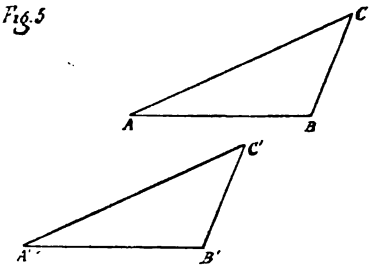
$$\mathrm{CF} = \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} = \gamma + \delta + \varepsilon$$

als ein einziger Vektor betrachtet. Bezeichnen wir dies wie in der Arithmetik durch Hinzufügung von Klammern, so wird

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = \alpha + \beta + (\gamma + \delta + \varepsilon) + \zeta \quad . \; . \quad (a. 2)$$

Als dritter Satz der Addition kann der nachfolgende gelten: Wenn zwei Vektoren gleich sind, so sind ihre Summen mit zwei anderen gleichen Vektoren auch einander gleich. Der Satz kann als unmittelbare Folge des zweiten Grundsatzes betrachtet, oder auch mit Hülfe der Figur 5 bewiesen werden.

Fig. 5



Es sei AB =// A'B', BC =// B'C'. Hieraus schlieszt man AA' =// BB' und BB' =// CC', woraus AA' =// CC' folgt, und deshalb AC =// A'C'. Die Gleichung

$$\mathrm{AC} = \mathrm{A'C'}$$

kann auch geschrieben werden

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{A'B'} + \mathrm{B'C'}$$

8. Wie in der Arithmetik wollen wir anstatt

$$\alpha + \alpha + \alpha + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \alpha$$

kurz $m\alpha$ schreiben; m soll hierbei eine ganze arithmetische Zahl heiszen.

Der Vektor α heiszt dadurch mit m multiplicirt. Bisweilen sagt man auch, der Vektor α könne m-mal auf den Vektor $m\alpha$ abgetragen werden.

Wenn n ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, so sei unter $\alpha : n$, oder $\frac{1}{n}\alpha$, ein Vektor verstanden, der mit n multiplicirt,

α ergibt. Man sagt in diesem Falle, der Vektor α sei durch n dividirt, und der Vektor $\alpha : n$ oder $\frac{1}{n}\alpha$ sei der n^{te} Theil von α.

Unter $\frac{m}{n}\alpha$ endlich sei $m(\alpha : n)$ oder $m\left(\frac{1}{n}\alpha\right)$ verstanden. $\frac{m}{n}$ kann hierin ein willkürlicher echter oder unechter Bruch heiszen.

Aus diesen Definitionen erhellt unmittelbar, dass die Vektoren $m\alpha$, $\alpha : n$, $\frac{m}{n}\alpha$ mit α dieselbe Richtung haben und nur an Grösze von demselben verschieden sind. Die arithmetischen Zahlen m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$, welche die Beziehung der Grösze der Vektoren $m\alpha$, $\frac{1}{n}\alpha$, $\frac{m}{n}\alpha$ zu derjenigen des Vektors α ausdrücken, werden hier auch das Verhältnis der Vektoren $m\alpha$, $\frac{1}{n}\alpha$, $\frac{m}{n}\alpha$ bzhw. zum Vektor α genannt.

Wenn zwei Vektoren gleicher Richtung α und β derart sind, dass kein einziger Vektor derselben Richtung gefunden werden kann, der auf beide Vektoren eine ganze Anzahl Male abgetragen werden kann, so heiszen die Vektoren α und β incommensurabel. In diesem Falle kann man α erst möglichst viele Male auf β abtragen; auf den Rest trage man $\frac{1}{10}\alpha$ möglichst viele Male ab, u. s. w. Dadurch gelangt man zu einem Ausdruck von der Form $\beta = x\alpha$, wo x ein incommensurabler Skalar ist. x heiszt wieder das Verhältnis der Vektoren β und α.

9. Wenn man in diesem Sinne das Verhältnis des Vektors α zum Einheitsvektor derselben Richtung $U\alpha$ bestimmt, so wird das Resultat der Tensor des Vektors α genannt. Derselbe ist stets eine arithmetische Zahl.

Das Zeichen für den Tensor des Vektors α ist $T\alpha$. Man hat demnach die Gleichung

$$\alpha = T\alpha\, U\alpha \quad \text{. . . . .} \quad (a.\ 3)$$

Unmittelbar leuchtet die Richtigkeit der nachstehenden Relationen ein

$$Tx\alpha = x\, T\alpha, \quad Ux\alpha = U\alpha \quad \text{. . . . . . .} \quad (a.\ 4)$$

wo x eine willkürliche arithmetische Zahl ist.

Wenn zwei Vektoren α und β einander gleich sind, so müssen ihre Tensoren und auch ihre Einheitsvektoren gleich sein. Das Letztere findet statt, weil die Richtungen der Vektoren, das Erstere weil ihre Längen übereinstimmen.

Umgekehrt lässt sich aus $T\alpha = T\beta$, $U\alpha = U\beta$ schlieszen, dass $\alpha = \beta$, weil die beiden Gleichungen aussagen, dass Länge und Richtung gleich sind.

10. Man kann demnach einen einem Vektor hinzugefügten Skalarcoefficienten als ein Operationszeichen oder einen Operator betrachten, an den Vektor wirkend, indem derselbe die Richtung des Vektors ungeändert lässt, den Tensor jedoch vergrössert oder verkleinert.

Wie aus dem zweiten Abschnitt ersichtlich wird, ermöglicht diese Deutung eines Skalarcoefficienten denselben als einen besonderen Fall eines Quaternions zu betrachten; sie ist deshalb von grosser Wichtigkeit für unsre Theorie.

11. Anstatt $x(y\alpha)$, eines Ausdrucks, welcher bedeutet, dass der Skalar x an den Vektor $y\alpha$ wirkt, wollen wir einfacher schreiben $xy\alpha$. Man sagt in diesem Falle auch, das Symbol xy wirke an den Vektor α, und setzt daher bisweilen statt $xy\alpha$ das nachfolgende $(xy)\alpha$. In dieser Weise wird

$$x(y\alpha) = xy\alpha = (xy)\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\,5)$$

Wie in der Arithmetik beweist man, dass

$$x(ya) = y(x\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\,6)$$

oder symbolisch

$$xy = yx \text{ oder } (xy) = (yx) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\,7)$$

Weil $z\alpha$ ein Vektor bedeutet, so ist weiter auch

$$\left.\begin{array}{c} xyz\alpha = (xy)z\alpha = (yx)z\alpha = yxz\alpha \\ \text{und} \\ xyz\alpha = x(yz)\alpha = x(zy)\alpha = xyz\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (a.\,8)$$

Den Ausdruck $(x + y)\alpha$ wollen wir als gleichbedeutend annehmen mit $x\alpha + y\alpha$, oder

$$(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$$

und allgemeiner

$$(x + y + z)\alpha = x\alpha + y\alpha + z\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\,9)$$

Es sind diese Gleichungen als die Definition der Summe der Zahlen x, y oder x, y, z zu betrachten.

Weil aber

$$(x+y+z)\alpha = x\alpha + y\alpha + z\alpha =$$
$$= x\alpha + z\alpha + y\alpha \text{ nach } (a.\,1) =$$
$$= (x+z+y)\alpha \text{ nach } (a.\,9)$$

so schlieszt man, dass wie in der Arithmetik

$$(x+y+z)\,\alpha = (x+z+y)\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\,9^*)$$

oder symbolisch

$$x+y+z = x+z+y$$

und ebenso, weil

$$x\alpha + y\alpha + z\alpha = x\alpha + (y\alpha + z\alpha) \text{ nach } (a.\,2) =$$
$$= x\alpha + (y+z)\alpha \text{ nach } (a.\,9) =$$
$$= \{x + (y+z)\}\alpha \text{ nach } (a.\,9),$$

schlieszt man dass auch

$$x\alpha + y\alpha + z\alpha = \{x + (y+z)\}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\,9^{**})$$

oder symbolisch

$$x+y+z = x+(y+z).$$

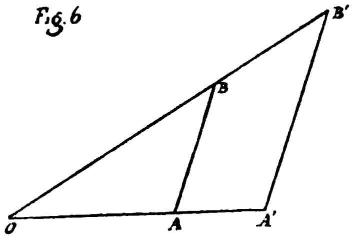
Mit Hülfe der Figur 6 ist es ein Leichtes die Gültigkeit des durch die Gleichung (a. 10) ausgesprochenen Satzes darzuthun.

$$x\alpha + x\beta = x(\alpha+\beta) \quad . \quad (a.\,10)$$

Es sei

$$\text{OA} = \alpha,\ \text{AB} = \beta,$$
$$\text{OA}' = x\alpha,\ \text{A}'\text{B}' = x\beta,$$

Fig. 6



wodurch zugleich ausgesprochen wird, dass A′B′ // AB.

Zieht man noch OB und OB′, so ist $\triangle$ OAB $=$ $\triangle$ OA′B′, weil $\dfrac{T.\text{OA}'}{T.\text{OA}} = \dfrac{T.\text{A}'\text{B}'}{T.\text{AB}} = x$ und $\angle$ OAB $=$ $\angle$ OA′B′. Hieraus schlieszt man

$$\frac{\text{OB}'}{\text{OB}} = \frac{\text{OA}'}{\text{OA}} = x \text{ und } \angle\,\text{BOA} = \angle\,\text{B}'\text{OA}',$$

sodass OB und OB′ der Richtung nach zusammenfallen. Es ist deshalb

$$\text{OB}' = x\,.\,\text{OB} \text{ oder } \text{OA}' + \text{A}'\text{B}' = x\,.\,\text{AB}$$

oder schlieszlich

$$x\alpha + x\beta = x(\alpha+\beta).$$

Als Grenzfall lässt sich der Fall betrachten, wo β mit α gleiche Richtung hat. Es wird dadurch

$$x\alpha + xa\alpha = x(\alpha + a\alpha)$$

und allgemeiner

$$xa\alpha + xb\alpha = x(a\alpha + b\alpha).$$

12. Wenn ein Vektor gezeichnet wird, welcher die nämliche Grösze wie α aber eine der Richtung jenes Vektors entgegengesetzte Richtung hat, so wollen wir denselben mit $-\alpha$ bezeichnen und den **negativen Vektor** des Vektors α nennen.

Wird α durch AB dargestellt, so ist BA eine Veranschaulichung von $-\alpha$.

Aus der Definition folgt sogleich, dass der Negative eines negativen Vektors der ursprüngliche Vektor ist, oder in Zeichen

$$-(-\alpha) = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 11)$$

Weiter erhellt auch unmittelbar aus der Definition, dass

$$T(-\alpha) = T\alpha,\ U(-\alpha) = -U\alpha \quad \ldots\ldots \quad (a.\ 12)$$

Man kann deshalb wieder das Zeichen $-$ vor einem Vektor als einen Operator betrachten, welcher dessen Tensor ungeändert lässt, die Richtung des Vektors jedoch umkehrt.

Die Addition der beiden Vektoren AB und BA führt zum Anfangspunkte A zurück. Demnach schreiben wir

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BA} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha + (-\alpha) = 0 \ldots \quad (a.\ 13)$$

Wenn zwei Vektoren gleich sind, so ist einleuchtend, dass ihre Negativen auch einander gleich sein müssen.

Unter $-(\alpha + \beta + \ldots\ldots)$ sei der Negative des Vektors $(\alpha + \beta + \ldots\ldots)$, unter $-x\alpha$ der Negative des Vektors $x\alpha$ verstanden.

13. Anstatt zu schreiben $\alpha + (-\beta)$ wird einfacher geschrieben $\alpha - \beta$, und man sagt sodann, dass der Vektor β von α **subtrahirt** wird. α heiszt Minuendus, β Subtrahendus und das Resultat, d. h. die Summe der Vektoren α und $-\beta$, wird die Differenz der Vektoren α und β genannt.

Nach dieser Definition der Subtraction gilt die nachstehende Gleichung

$$\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 14)$$

14. Als erster Satz der Subtraction ergibt sich:

Die Differenz zweier Vektoren α und β ist ein Vektor derart, dass β zu demselben addirt, α als Summe ergibt.

Denn es ist

$$\begin{aligned}\alpha - \beta + \beta &= \alpha + (-\beta) + \beta, \text{ nach } (a.\,14)\\ &= \alpha + [(-\beta) + \beta], \text{ nach } (a.\,2)\\ &= \alpha, \text{ nach } (a.\,13).\end{aligned}$$

Ein zweiter Satz lautet: Wenn zwei Vektoren gleich sind, so sind ihre Differenzen mit gleichen Vektoren auch einander gleich.

Denn die Negativen gleicher Vektoren sind einander gleich, und die Summen der gegebenen Vektoren mit diesen Negativen können nach einem Satze der Addition nicht verschieden sein.

Aus dem ersten Satze folgt noch, dass wenn

$$AC = AB + BC,$$

auch

$$AB = AC - BC$$

und

$$BC = AC - AB$$

sein muss.

Wenn verschiedene Operationen (Additionen und Subtractionen) nach einander ausgeführt werden sollen, so kann die Reihenfolge willkürlich geändert werden. Man hat nämlich die nachfolgenden Transformationen:

$$\begin{aligned}\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon &= \alpha + (-\beta) + \gamma + \delta + (-\varepsilon), \text{ nach } (a.\,14)\\ &= \alpha + \gamma + (-\varepsilon) + \delta + (-\beta), \text{ nach } (a.\,1)\end{aligned}$$

und deshalb

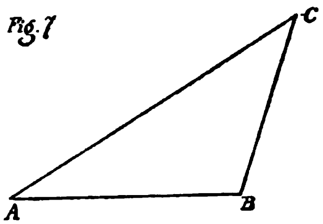
$$\alpha - \beta + \gamma + \delta - \varepsilon = \alpha + \gamma - \varepsilon + \delta - \beta, \text{ nach } (a.\,14) \quad . \; . \quad (a.\,15)$$

In gleicher Weise kann bewiesen werden

$$\alpha - \beta = -\beta + \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a.\,16)$$

Mit Hülfe der Figur 7 gelingt es weiter leicht den nachstehenden Satz zu beweisen.

Fig. 7



$$-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta \quad . \quad (a.\,17)$$

Es sei $AB = x$, $BC = \beta$, so ist $AC = \alpha + \beta$ und $CA = -(\alpha + \beta)$.

Man hat jedoch auch

$$\begin{aligned}CA = CB + BA &= -\beta - \alpha =\\ &= -\alpha - \beta, \text{ nach } (a.\,16)\end{aligned}$$

und somit durch Verbindung der beiden Werte von CA

$$-(\alpha+\beta)=-\alpha-\beta.$$

Mit geringer Mühe lässt dieser Satz sich verallgemeinern z. B.

1°. $-(\alpha+\beta+\gamma)=-[(\alpha+\beta)+\gamma]=$
$=-(\alpha+\beta)-\gamma$ nach $(a.\ 17)$
$=-\alpha-\beta-\gamma.$

2°. $-(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=-[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta]$, nach $(a.\ 14)$
$=-\alpha-(-\beta)-(-\gamma)-\delta$, nach $(a.\ 17)$
$=-\alpha+\{-(-\beta)\}+\{-(-\gamma)\}-\delta$, nach $(a.\ 14)$

oder schlieszlich

$$-(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=-\alpha+\beta+\gamma-\delta, \text{ nach } (a.\ 11)\ .\ (a.\ 18)$$

Sehen wir weiter zu, wie das associative Princip sich hier gestaltet. Dasselbe wird durch die beiden nachfolgenden Beispiele erläutert, und man ersieht daraus, dass die Anwendung des Princips auf dieselbe Weise stattfindet, wie in der Arithmetik.

1°. $\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+[\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon]$, nach $(a.\ 2)$

oder

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+[\beta-\gamma-\delta+\varepsilon], \text{ nach } (a.\ 14)\ .\ .\ .\ (a.\ 19)$$

2°. $\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+\beta+[(-\gamma)+(-\delta)+\varepsilon]$, nach $(a.\ 2)$
$=\alpha+\beta+(-\gamma-\delta+\varepsilon)$, nach $(a.\ 14)$
$=\alpha+\beta+[-(\gamma+\delta-\varepsilon)]$, nach $(a.\ 18)$

oder schlieszlich

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha+\beta-(\gamma+\delta-\varepsilon), \text{ nach } (a.\ 14)\ .\ .\ .\ (a.\ 20)$$

15. Wir wenden uns jetzt einigen Sätzen anderer Art zu, ausgesprochen durch die Gleichungen $(a.\ 21)$, $(a.\ 22)$, $(a.\ 24)$, und $(a.\ 25)$.

1°. $$a(-\beta)=-a\beta\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a.\ 21)$$

wenn a ein Skalar ist. Denn es ist

$T.a(-\beta)=a\,T(-\beta)$, nach $(a.\ 4)=a\,T\beta$, nach $(a.\ 12)$
$U.a(-\beta)=U(-\beta)$, nach $(a.\ 4)=-U\beta$, nach $(a.\ 12)$
$T(-a\beta)=Ta\beta$, nach $(a.\ 12)=a\,T\beta$, nach $(a.\ 4)$
$U(-a\beta)=-Ua\beta$, nach $(a.\ 12)=-U\beta$, nach $(a.\ 4)$.

Tensor und Einheitsvektor stimmen, wie man hieraus ersieht, bei $a(-\beta)$ und $-a\beta$ überein, woraus die Gleichheit der Vektoren $a(-\beta)$ und $-a\beta$ unmittelbar folgt.

2°. $$a(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=a\alpha-a\beta-a\gamma+a\delta \quad . \; . \; (a.\ 22)$$

Denn es wird

$$\begin{aligned} a(\alpha-\beta-\gamma+\delta) &= a[\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+\delta], \text{ nach } (a.\ 14) \\ &= a\alpha+a(-\beta)+a(-\gamma)+a\delta, \text{ nach } (a.\ 10) \\ &= a\alpha+(-a\beta)+(-a\gamma)+a\delta, \text{ nach } (a.\ 21) \\ &= a\alpha-a\beta-a\gamma+a\delta, \text{ nach } (a.\ 14). \end{aligned}$$

Wie bei der Addition wollen wir den Ausdruck $(a-b)\alpha$ als gleichbedeutend annehmen mit $a\alpha-b\alpha$, also

$$(a-b)\alpha=a\alpha-b\alpha,$$

eine Gleichung, welche vorläufig nur einen Sinn hat für $a>b$.

Und diese Schreibweise verallgemeinern wir zur nachstehenden

$$(a-b+c-d)\alpha=a\alpha-b\alpha+c\alpha-d\alpha \quad . \; . \; . \; (a.\ 23)$$

Auch diese Gleichung hat vorläufig nur einen Sinn, falls $a>b$ und $a-b+c>d$.

Es ist weiter

3°. $$x\alpha-x\beta=x(\alpha-\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a.\ 24)$$

weil

$$\begin{aligned} x\alpha-x\beta &= x\alpha+(-x\beta), \text{ nach } (a.\ 14) \\ &= x\alpha+x(-\beta), \text{ nach } (a.\ 21) \\ &= x[\alpha+(-\beta)], \text{ nach } (a.\ 10) \\ &= x(\alpha-\beta), \text{ nach } (a.\ 14). \end{aligned}$$

Eine Folge dieser Gleichung und der Gleichung $(a.\ 20)$ ist:

4°. $$x(a-b+c-d)\alpha=(xa-xb+xc-xd)\alpha. \quad . \; . \; (a.\ 25)$$

Denn nach $(a.\ 23)$ ist

$$\begin{aligned} x(a-b+c-d)\alpha &= x(a\alpha-b\alpha+c\alpha-d\alpha) \\ &= xa\alpha-xb\alpha+xc\alpha-xd\alpha, \text{ nach } (a.\ 24) \\ &= (xa-xb+xc-xd)\alpha, \text{ nach } (a.\ 23). \end{aligned}$$

Für das Symbol $x(a-b+c-d)$ gilt demnach wie in der Arithmetik die Formel

$$x(a-b+c-d)=xa-xb+xc-xd.$$

16. Bisher definirten wir nur noch die arithmetischen Zahlen als Symbole, welche die Länge eines Vektors ändern.

Wenn nun y eine solche Grösze ist, so kann man stets den Vektor $-y\alpha$ denken.

Man pflegt hiebei auch zu sagen, das Symbol oder die algebraische negative Zahl $(-y)$ operire an den Vektor α, sodass nach dieser Redensart

$$(-y)\,\alpha = -y\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (a.\,26)$$

Diese Gleichung ist als Definition der negativen Zahlen zu betrachten; man kann eine solche Zahl auch mit einem einzigen Symbole z. B. x bezeichnen, womit $x = -y$ gemeint ist. y wird sodann der absolute oder der numerische Wert der negativen Zahl genannt.

Bei dieser Voraussetzung gelten, wie unmittelbar ersichtlich, die Relationen:

$$Tx\alpha = y\,T\alpha\,, \quad Ux\alpha = -\,U\alpha \quad (\text{wenn } x = -y) \quad . \, . \quad (a.\,27)$$

Der negative Skalar x vor einem Vektor kann, wie wir hieraus entnehmen, als ein Operator betrachtet werden, welcher den Tensor des Vektors verkleinert oder vergröszert nach dem Masstabe des numerischen Wertes des Skalarcoefficiènten und welcher zugleich die Richtung des Vektors entgegengesetzt macht.

Es behält nunmehr die Gleichung

$$a\alpha - b\alpha = (a - b)\,\alpha$$

auch einen Sinn in dem Falle, wo a und b arithmetische Zahlen sind, und $b > a$. Denn es ist sodann die zweite Seite jener Gleichung gleichbedeutend mit $-(b - a)\,\alpha$. Der Beweis kann leicht gegeben werden wie folgt:

$$\begin{aligned}(a - b)\,\alpha &= a\alpha - b\alpha = \\ &= -\,b\alpha + a\alpha\,, \text{ nach } (a.\,16) = \\ &= -\,(b\alpha - a\alpha)\,, \text{ nach } (a.\,18) = \\ &= -\,(b - a)\,\alpha\,, \text{ nach } (a.\,23).\end{aligned}$$

Weil $x\alpha$ auch bei negativem x ein Vektor ist, so behalten das distributive und das associative Princip der Addition und Subtraction, wenn Glieder von der Form $x\alpha$ dabei vorkommen, ihre Gültigkeit.

Man weist weiter leicht nach, dass auch die Gleichungen $(a.\,7)$, $(a.\,8)$, $(a.\,10)$, $(a.\,21)$, $(a.\,22)$, $(a.\,24)$, $(a.\,25)$, bei negativen Skalaren richtig bleiben. Man kann zu dem Zwecke stets x durch $-y$ ersetzen. Indessen überlassen wir dies dem Studirenden.

17. Wenn ein Vektor $xv\alpha$ construirt wird, so wollen wir

denselben kürzer mit $x^2\alpha$ bezeichnen. Indem man noch setzt

$$x^2\alpha = y\alpha,$$

wird die Identität der Symbole x^2 und y angenommen und man pflegt zu sagen: die Zahl x mit zwei potenzirt, ergebe y, oder y sei die zweite Potenz von x.

Umgekehrt, wenn man setzt

$$x^2\alpha \text{ oder } xx\alpha = y\alpha,$$

so bezeichnet man den Vektor $x\alpha$ auch mit $\sqrt{y}\alpha$ oder mit $y^{\frac{1}{2}}\alpha$ und pflegt zu sagen, die Zahl x sei die zweite Wurzel aus der Zahl y. Man erhält somit, wenn

$$x^2\alpha = y\alpha,$$

so ist

$$x\alpha = \sqrt{y}\alpha \text{ . . . . } (a.\ 27^*)$$

und es enthalten diese Gleichungen die Definitionen der Potenz und der Wurzel einer arithmetischen Zahl.

In gleicher Weise kann die Definition höherer Potenzen und Wurzeln (aus arithmetischen Zahlen), als die zweiten, erhalten werden, und man ersieht leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formeln

$$x^m x^n \alpha = x^{m+n}\alpha,$$

$$x^m y^m \alpha = (xy)^m \alpha.$$

Aus der Algebra übernehmen wir die Schreibweisen

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Der Beweis der auf die Wurzeln algebraischer Zahlen bezüglichen Sätze kann wie in der Algebra gegeben werden.

18. Die Deutung des Symbols $\sqrt{y}\alpha$ hat keine Schwierigkeit, wenn y eine arithmetische Zahl ist.

Aus $(a.\ 27^*)$ kann nämlich unmittelbar geschlossen werden, dass

$$\sqrt{y}\sqrt{y}\alpha = y\alpha.$$

Es ist somit $\sqrt{y}$ ein Operator, welcher zwei Male nach einander wirkend den Tensor in einem bestimmten Verhältnis ändert, die Richtung des Vektors jedoch ungeändert lässt.

Anders jedoch verhält sich die Sache, wenn y eine algebraische negative Zahl z. B. $-x$ ist; denn es soll sodann die zweimalige Anwendung des Symbols $\sqrt{-x}$ die Richtung des

Vektors umkehren. Man pflegt zu sagen: die Zahl $\sqrt{-x}$ sei imaginär und wir wollen uns mit der Deutung der Wirkung dieses Symbols in diesem Artikel weiter beschäftigen. Der Einfachheit wegen sehen wir zunächst nur nach der Deutung des Ausdrucks $\sqrt{-1}\,\alpha$ um.

Dabei soll beachtet werden, dasz wir im Einklange bleiben müssen mit der Formel

$$\sqrt{-1}\,(\sqrt{-1}\,\alpha) = -\alpha \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (a. 28)$$

Die zweimalige Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ soll deshalb den Tensor des Vektors α ungeändert lassen, die Richtung jedoch umkehren.

Es kann dies nur der Fall sein, wenn die Operation $\sqrt{-1}$ ebenfalls den Tensor ungeändert lässt und eine Drehung des Vektors um einen rechten Winkel aus seiner ursprünglichen Lage bewirkt.

Die Ebene, in der die Drehung stattfinden soll, bleibt unbestimmt. Es kann dazu nicht eine *willkürliche* durch den Vektor gehende Ebene gewählt werden, weil sodann die zweimalige Anwendung der Operation nicht zu $-\alpha$ zu führen braucht. Andrerseits hat aber keine durch α gehende Ebene einen Vorzug vor einer anderen Ebene, welche ebenso α enthält.

Wir schlieszen daraus, dass unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ zu verstehen sei das Complex der Vektoren, erhalten durch Drehung des Vektors α um einen rechten Winkel in allen durch α gehenden Ebenen. Die sämtlichen Vektoren bilden eine Ebene und zwar eine Kreisoberfläche, beschrieben um den Anfangspunkt des Vektors α in einer zu α senkrechten Ebene mit einem Radius $= T\alpha$. Der Vektor wird deshalb, durch die Operation $\sqrt{-1}$, wie wir es nennen wollen, zu einem circularen Strahlencomplex gespalten.

Wir schlagen vor dasselbe einen Vektorkreis zu nennen, und der Anfangspunkt des Vektors α heisze der Mittelpunkt des Vektorkreises.

Unter der Richtung des Vektorkreises $\sqrt{-1}\,\alpha$ sei diejenige des Vektors α verstanden. Der Tensor des Vektorkreises sei derjenige eines jeden Radius. Einen Vektorkreis der Richtung α, dessen Radius der Längeneinheit gleichkommt, wollen wir einen Einheitsvektorkreis nennen und mit $U.\sqrt{-1}\,\alpha$ bezeichnen. Man erhält dadurch die nachstehenden Formeln

$$T.\sqrt{-1}\,\alpha = T\alpha, \quad U.\sqrt{-1}\,\alpha = \sqrt{-1}\,U\alpha \ldots \quad (a.\,29)$$

19. Das Symbol $z\,(\sqrt{-1}\,\alpha)$ sei gleichbedeutend mit $\sqrt{-1}\,(z\alpha)$, $\sqrt{-x}\,\alpha$ mit $\sqrt{-1}\,(\sqrt{x}\,\alpha)$, also

$$z\,(\sqrt{-1}\,\alpha) = \sqrt{-1}\,(z\alpha) \text{ und } \sqrt{-x}\,\alpha = \sqrt{-1}\,(\sqrt{x}\,\alpha) \;. \quad (a.\,30)$$

Die beiden ersteren Ausdrücke deuten wir daher als das Resultat der Anwendung der Operationen $\sqrt{-1}$ an den Vektor $z\alpha$. Es ist dasselbe ein Vektorkreis, dessen Richtung mit derjenigen des Vektorkreises $\sqrt{-1}\,\alpha$ übereinstimmt, dessen Radius jedoch im Verhältnis $z:1$ vergrössert erscheint.

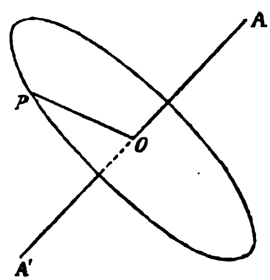
Endlich sei $(y + z\,\sqrt{-1})\,\alpha$ gedeutet durch die Gleichung

$$(y + z\,\sqrt{-1})\,\alpha = y\alpha + \sqrt{-1}\,(z\alpha) \;\ldots\ldots \quad (a.\,31)$$

20. Sehen wir zu, ob wir durch die Definition des Symbols $\sqrt{-1}\,\alpha$ wirklich mit der Gleichung (a. 28) im Einklang bleiben.

Wir wenden daher auf $\sqrt{-1}\,\alpha$, d. h. auf das Complex der Radien des Kreises, den Operator $\sqrt{-1}$ an. Aus jedem Radius OP des Vektorkreises (Fig. 8) entsteht dadurch ein Vektorkreis in einer zu OP senkrechten Ebene mit dem Radius $T\alpha$ beschrieben. Diese Ebene muss OA enthalten, weil OA $\perp$ OP. Die sämtlichen aus den Radien entstandenen Vektorkreise haben somit die beiden Vektoren OA und OA′ gemeinsam oder das durch sämmtliche Vektorkreise erhaltene Gebilde besteht aus den beiden Vektoren OA und OA′. (Es bedeutet OA′ der Negative des Vektors OA). Die zweimalige Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ führt demnach auf OA, oder auf OA′, oder auf beide. Es ist indessen leicht diese Zweideutigkeit aufzuklären.

Fig 8



Wenn wir nämlich an OA mit $-\sqrt{-1}$ operiren, so haben wir jeden aus OA durch Anwendung der Operation $\sqrt{-1}$ erhaltenen Strahl in entgegengesetzter Richtung zu nehmen. Es resultirt daher aus der Anwendung der Operation $-\sqrt{-1}$

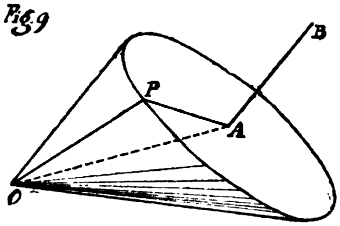
im ganzen genommen dieselbe Figur, wie aus der Operation $\sqrt{-1}$; daher auch zweimalige circulare Spaltung des Vektors aufgefasst werden kann als die Anwendung einer der vier nachfolgenden Operationen:

$$\sqrt{-1}(\sqrt{-1}), \sqrt{-1}(-\sqrt{-1}), -\sqrt{-1}(\sqrt{-1}), -\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}),$$

deren erste und letzte der Operation -1, deren beiden mittleren der Operation $+1$ gleich kommen, wodurch auch die zweimalige circulare Spaltung sowohl auf $-\alpha$ als auf α führen muss.

21. Schlieszlich wollen wir noch ganz allgemein das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ deuten. Es sei darunter verstanden das Complex der Strahlen erhalten durch die Addition des Strahles α zu jedem der Strahlen des Vektorkreises $\sqrt{-1}\beta$.

Fig. 9



In der Figur 9 sei $OA = \alpha$, $AB = \beta$. Der Vektorkreis $\sqrt{-1}\beta$ ist in der Figur gezeichnet. Es sei AP einer der Radien desselben, so ist $OP = OA + AP$ einer der in $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ enthaltenen Vektoren. Lassen wir AP den Vektorkreis beschreiben, so beschreibt OP die Seitenfläche eines Kegels, dessen Mittelpunkt O, dessen Grundfläche der Kreis A ist.

Das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\beta$ stellt daher die sämtlichen Seitenlinien des schiefen kreisförmigen Kegels vor, dessen Scheitel der Anfangspunkt von α und dessen Grundfläche der Vektorkreis $\sqrt{-1}\beta$ ist.

Wir schlagen vor dieses Gebilde einen **Vektorkegel** zu nennen.

Ein Vektorkegel wird daher stets durch die sämtlichen Seitenlinien eines Kegels zweiter Ordnung (der analytischen Geometrie) gebildet.

Wenn $\beta = x\alpha$, wo x eine positive oder negative algebraische Zahl ist, wenn β daher in die Richtung von α fällt, so wird der Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}x\alpha$ oder $(1 + x\sqrt{-1})\alpha$ ein rechter, indem die Grundfläche in diesem Falle senkrecht steht zur Richtung des Vektors OA oder α, welcher mit der Achse des Kegels zusammenfällt.

Aus dem im vorhergehenden Artikel Angeführten ist einleuchtend, dass die beiden Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ und $\alpha - \sqrt{-1}\,\beta$ identische Gebilde darstellen.

Die Summe und die Differenz zweier Vektorkegel wollen wir durch die beiden nachfolgenden Gleichungen definiren:

$$(\alpha + \sqrt{-1}\,\beta) \pm (\alpha' + \sqrt{-1}\,\beta') = (\alpha \pm \alpha') + \sqrt{-1}\,(\beta \pm \beta') \quad (a.32)$$

Mit der Deutung des Symbols $\sqrt{-1}\,\alpha$ sind wir schon ganz auf das Gebiet der Quaternionen hinübergegangen, deren eingehendre Behandlung erst in den nächsten Abschnitten erfolgt. Wir werden dort Gelegenheit finden noch näher auf obige Deutung zurück zu kommen. (Siehe den 4ten Abschnitt, Art. 97).

22. Wir wenden uns jetzt der Erörterung einiger sehr wichtiger Sätze zu:

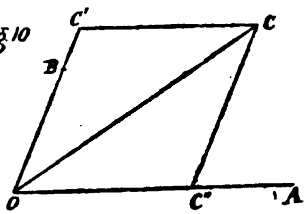
1°. Jeder Vektor γ in der Ebene zweier gegebenen Vektoren α und β kann linear in α und β ausgedrückt werden; d. h. es findet eine Relation statt von der Form

$$\gamma = x\alpha + y\beta \text{ oder } a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \ldots . \quad (a.33)$$

wo x, y, a, b, c positive oder negative Skalare sind.

Die drei Vektoren α, β, γ, denken wir uns aus einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O gezogen. Es sei $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ (Fig. 10).

Fig. 10



Wenn γ mit α und β in einer Ebene liegt, so werden Gerade, aus C parallel zu α und β gezogen, die Vektoren β und α bzhw. oder deren Verlängerungen schneiden müssen z. B. in C', C'' bzhw.

Es ist sodann

$$OC = OC'' + C''C = OC'' + OC'.$$

Man kann jedoch setzen

$$OC'' = x\alpha,\ OC' = y\beta,$$

wenn x, y positive oder negative Skalare sind. Deshalb wird

$$\gamma = x\alpha + y\beta.$$

Die Gröszen x, y stellen die Verhältnisse der Längen der Componenten von γ in die Richtungen α und β zu den Längen der Vektoren α und β selbst vor. Man ersieht daraus sogleich, dass der Vektor OC

bei positivem x und positivem y in dem Winkel AOB liegt
» negativem x » negativem y » » Gegenwinkel A′OB′,
» » x » positivem y » » Nebenwinkel A′OB,
» positivem x » negativem y » » » AOB′.

Es ist unschwer die Coefficienten x und y auf andre Weise zu deuten. Man findet leicht die Transformation

$$x = \frac{\mathrm{OC''}}{\mathrm{OA}} = \frac{\text{Fläche} \triangle \mathrm{OC''B}}{\text{Fläche} \triangle \mathrm{OAB}}.$$

Es ist weiter Fläche $\triangle \mathrm{OC''B} = \triangle \mathrm{OCB}$, weil $\mathrm{C''C} // \mathrm{OB}$. Unterscheiden wir noch die gleichen Flächen OCB und OBC dadurch, dass wir setzen

$$\triangle \mathrm{OCB} = - \triangle \mathrm{OBC}$$

und bezeichnen die Flächen der Dreiecke OBC, OCA, OAB mit $\mathrm{O}.\beta\gamma$, $\mathrm{O}.\gamma\alpha$, $\mathrm{O}.\alpha\beta$, so wird

$$x = -\frac{\mathrm{O}.\beta\gamma}{\mathrm{O}.\alpha\beta}, \text{ und ebenso } y = -\frac{\mathrm{O}.\gamma\alpha}{\mathrm{O}.\alpha\beta}.$$

Die Gleichung $\gamma = x\alpha + y\beta$ lässt sich hiernach in die nachfolgende symmetrische Gestalt bringen

$$\alpha \mathrm{O}.\beta\gamma + \beta \mathrm{O}.\gamma\alpha + \gamma \mathrm{O}.\alpha\beta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a.\ 34)$$

Vektoren in einer Ebene werden complanar genannt.

Man kann nun auch leicht den umgekehrten Satz beweisen:

Wenn zwischen drei Vektoren α, β, γ eine Relation stattfindet von der Form (a. 33), so müssen dieselbe complanar sein. Denn weil $\gamma = x\alpha + y\beta$, so liegen die beiden Endpunkte von γ in der Ebene von α und β; somit sind α, β, γ complanar.

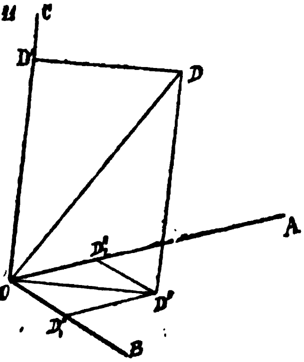
Die Gleichung (a. 33) drückt daher die Bedingung aus, unter welcher drei Vektoren complanar sind. Dieselbe wird daher die Bedingung der Complanarität genannt. In dieser Bedingung sind nach (a. 34) die Coefficienten a, b, c proportional zu den Gröszen $\mathrm{O}.\beta\gamma$, $\mathrm{O}.\gamma\alpha$, $\mathrm{O}.\alpha\beta$.

2°. Jeder Vektor im Raume kann linear ausgedrückt werden in drei willkürlich gewählte nicht complanare Vektoren.

Es sei in der Figur 11

$$\mathrm{OA} = \alpha, \ \mathrm{OB} = \beta, \ \mathrm{OC} = \gamma, \ \mathrm{OD} = \delta.$$

Bringen wir eine Ebene durch OC und OD, welche die Ebene AOB schneide in OD″.



Ziehen wir

DD″ // CO und DD′ // D″O.

Endlich sei

$D''D_1''$ // AO und $D''D_2''$ // BO,

so ist

$$OD = OD'' + D''D =$$
$$= OD_2'' + D_2''D'' + D'D =$$
$$= OD_2'' + OD_1'' + OD'.$$

Es kann jedoch

$OD_2'' = x\alpha$, $OD_1'' = y\beta$, $OD' = z\gamma$

gesetzt werden, wenn x, y, z positive oder negative Skalare sind.

Demnach wird

$$\delta = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 35)$$

Wir wollen noch die Bedeutung der Coefficienten x, y, z näher erörtern. Es ist nämlich

$$x = \frac{OD_2''}{OA} = \frac{\text{Fläche } \triangle\ OD_2''B}{\text{Fläche } \triangle\ OAB} = \frac{\text{Volumen ppd. } OD_2''BC}{\text{Volumen ppd. OABC}},$$

wo ppd. OABC abgekürzt steht statt des Parallelepipeds auf den Seiten OA, OB, OC construirt. Man hat weiter

Vol. ppd. $OD_2''BC$ = Vol. ppd. OD″BC, weil $D_2''D''$ // der Ebene OBC
= Vol. ppd. ODBC, » D″D // » » OBC.

Setzen wir wieder:

$$\text{Vol. ppd. ODBC} = -\text{Vol. ppd. OBCD},$$

so wird

$$x = -\text{Vol. ppd. OBCD} : \text{Vol. ppd. OABC}.$$

Demnach geht die lineare Gleichung für δ (a. 35) über in

$$\alpha\, V.\text{OBCD} + \beta\, V.\text{OCDA} + \gamma\, V.\text{ODAB} + \delta\, V.\text{OABC} = 0. \quad (a.\ 36)$$

wenn mit V. OBCD das Volumen des Parallelepipeds auf den Seiten OB, OC, OD construirt, gemeint ist.

3°. Jeder Vektor γ, welcher mit zwei anderen α und β denselben Anfangspunkt O hat (oder c o i n i t i a l ist), während die drie Endpunkte C, A, B in einer Geraden liegen (drei solche Vektoren werden t e r m i n o c o l l i n e a r genannt), lässt sich darstellen durch

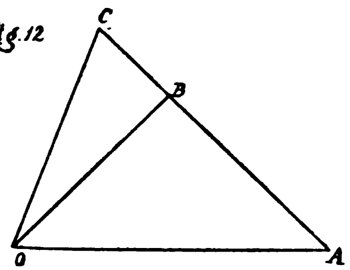
$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}, \text{ oder } \gamma = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \quad \ldots\ldots \quad (a. 37)$$

oder ist mit diesen anderen Vektoren α und β verbunden durch eine Relation von der Gestalt

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \text{ wo zugleich } a + b + c = 0 \quad . \quad (a. 38)$$

x, y, u, a, b, c sind hier wieder Skalare, positive oder negative.

Fig. 12



Es sei, um dies darzutun, in der Figur 12 $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$, so findet man daraus $OB = OC + CB$, $OA = OC + CA$ somit

$$CB = OB - OC = \beta - \gamma,$$
$$CA = OA - OC = \alpha - \gamma.$$

Weil CB und CA gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben, so kann man setzen

$$CA = v . CB,$$

wo v ein Skalar ist, positiv, wenn CB und CA gleiche Richtungen haben d. h. wenn C auf der Verlängerung der Geraden AB liegt, negativ, wenn C auf der Geraden AB selbst liegt. Es wird hierdurch

$$\alpha - \gamma = v(\beta - \gamma)$$

$$\gamma = \frac{\alpha - v\beta}{1 - v}.$$

Indem man v durch $-u$ ersetzt, findet man, dass

$$\gamma = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a. 39)$$

einen Vektor OC darstellt, für welchen bei positivem u der Punkt C auf AB selbst, bei negativem u auf der Verlängerung der Geraden AB liegt.

Die Gleichung (a. 38) ist nur eine andere Gestalt der Gleichung (a. 37). Setzt man nämlich in (a. 39) $u = y : x$, so wird

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}$$

oder

$$x\alpha + y\beta - (x + y)\gamma = 0,$$

oder auch

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0,$$

wenn

$$z = -(x + y) \text{ d. h. } x + y + z = 0$$

gesetzt wird.

Die Bedeutung der Coefficienten x, y, z in der zuletzt erhaltenen Gleichung lässt sich leicht angeben. Denn es war

$$v = \frac{\text{CA}}{\text{CB}} \text{ oder } u = -\frac{\text{CA}}{\text{CB}}.$$

Deshalb ist auch

$$\frac{y}{x} = -\frac{\text{CA}}{\text{CB}} = \frac{\text{CA}}{\text{BC}} \text{ oder } \frac{x}{\text{BC}} = \frac{y}{\text{CA}},$$

und hieraus leitet man her:

$$\frac{x}{\text{BC}} = \frac{y}{\text{CA}} = \frac{x + y}{\text{BC} + \text{CA}} = \frac{-z}{\text{BA}} = \frac{z}{\text{AB}}$$

oder schlieszlich

$$\frac{x}{\text{BC}} = \frac{y}{\text{CA}} = \frac{z}{\text{AB}}.$$

Dieselbe Bedeutung haben die Coefficienten a, b, c in der Gleichung (a. 38). Dabei müssen die Richtungen der Geraden BC, CA, AB beachtet werden.

4°. An das Vorhergehende schlieszt sich die Frage an, einen Vektor, welcher mit drei anderen gegebenen Vektoren coinitial ist und seinen Endpunkt in der Ebene der Endpunkte dieser drei gegebenen Vektoren hat, mittelst derselben auszudrücken.

Es seien $\text{OA} = \alpha$, $\text{OB} = \beta$, $\text{OC} = \gamma$ die gegebenen Vektoren, $\text{OP} = \rho$ der gesuchte Vektor, so müssen die Vektoren $\alpha - \rho = \text{PA}$, $\beta - \rho = \text{PB}$, $\gamma - \rho = \text{PC}$ complanar sein; daher muss nach (a. 33) irgend eine Relation von der Form

$$x(\alpha - \rho) + y(\beta - \rho) + z(\gamma - \rho) = 0$$

stattfinden, und hieraus erhält man unmittelbar

$$\rho = \frac{x\alpha + y\beta + z\gamma}{x + y + z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 40)$$

wodurch die gestellte Frage gelöst ist.

23. Geometrische Örter. Im vorigen Artikel sahen wir, dass

$$\rho = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u},$$

wenn man u alle möglichen Werte beilegt, einen geometrischen Ort darstellt, nämlich die Verbindungsgerade der Endpunkte der Vektoren α und β.

Allgemeiner können wir sagen, dass

$$\rho = f(u)\,\alpha + \Phi(u)\,\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a.\,41)$$

wo u ein Skalar und α und β gegebene Vektoren bedeuten, einen geometrischen Ort, eine gewisse Curve, in der Ebene von α und β darstellt.

Denn die Gleichung (a. 41) sagt aus, dass ρ aus den beiden Componenten $f(u)\alpha$ und $\Phi(u)\beta$ zusammengesetzt gedacht werden kann. Wählen wir daher die Richtungen der Vektoren α und β als X und Y Achse eines recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt der gemeinsame Anfangspunkt der Vektoren α und β sei, so können wir für irgend einen Punkt, dessen Vektor ρ der Gleichung (a. 41) genügt, schreiben

$$x = f(u)T\alpha\,, \quad y = \Phi(u)T\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a.\,42)$$

und die Elimination von u zwischen diesen beiden Gleichungen führt auf eine Gleichung:

$$F(xy) = C,$$

die analytische Gleichung der fraglichen Curve im gewählten Coordinatensystem.

Es wird in diesem Falle ρ eine Funktion des Skalars u genannt.

In derselben Weise erkennt man, dass

$$\rho = \psi\,(u\,,v)\,\alpha + f\,(u\,,v)\,\beta + \Phi\,(u\,,v)\,\gamma \; . \; . \; . \; . \quad (a.\,43)$$

wenn α, β, γ drei nicht complanare Vektoren sind, eine Oberfläche darstellt, und dass man die Gleichung derselben in analytischen Raumcoordinaten in Bezug auf α, β, γ als Coordinatenachsen erhält durch die Elimination von u, v zwischen den drei Gleichungen

$$x = \psi\,(u, v)\,T\alpha\,, \; y = f\,(u, v)\,T\beta, \; z = \Phi\,(u, v)\,T\gamma \quad . \; (a.\,44)$$

Und ebenso wird mit

$$\rho = \psi\,(u)\,\alpha + f\,(u)\,\beta + \Phi\,(u)\,\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a.\,45)$$

eine Raumcurve bezeichnet, weil man zwischen den Gleichungen

$$x = \psi(u)\,T\alpha,\ y = f(u)\,T\beta,\ z = \Phi(u)\,T\gamma \ldots \quad (a.\,46)$$

den Skalar u zweimal eliminiren kann.

Man hätte dies auch ohne die Zuhülfenahme der analytischen Geometrie leicht ersehen können.

Wenn man nämlich dem Skalar u in (a. 45) nach einander alle möglichen Werte erteilt, so wird der Endpunkt des Vektors ρ dieser Gleichung eine Raumcurve beschreiben müssen, weil im allgemeinen auf jeden der Gleichung (a. 45) genügenden Wert von ρ nur ein einziger Wert von ρ folgen wird.

Bei der Gleichung (a. 43) jedoch kann man, indem ein bestimmter Wert der Grösze u beigelegt, v dagegen veränderlich gelassen wird, den Endpunkt des Vektors ρ erst eine Curve beschreiben lassen; wählt man nachher einen andren bestimmten Wert für u, so beschreibt auch der Endpunkt des Vektors ρ eine andre Curve. Wiederholt man dies für alle möglichen Werte der Grösze u, so werden alle in solcher Weise erhaltenen Curven eine Oberfläche bilden.

Noch sei erwähnt, dass mit der Gleichung (a. 43) die nachstehende

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

aequivalent ist, wenn überdies eine bestimmte Relation zwischen x, y, z gegeben ist. Und in derselben Weise ist (a. 45) mit jener Gleichung aequivalent, wenn ausserdem noch zwei bestimmte Relationen zwischen x, y, z stattfinden.

24. Einige Beispiele mögen das Vorhergehende erläutern:

1°. $\rho = u\alpha + \sqrt{1 - u^2}\beta$ mit der Bedingung $-1 < u < 1$ stellt eine Ellipse dar; wenn man $T\alpha = a$, $T\beta = b$ nimmt, so werden die Gleichungen (a. 42) für diesen Fall

$$x = ua,\ y = \sqrt{1 - u^2}\,b \text{ oder } x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$$

und diese Gleichungen gehören jedem Punkte einer Ellipse an, in welcher die Vektoren α und β als conjugirte Durchmesser vorkommen.

2°. $\rho = u\alpha + v\beta + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\,\gamma$, mit der Bedingung $-1 < \sqrt{u^2 + v^2} < 1$, ist die Gleichung eines Ellipsoids, mit α, β, γ als conjugirten Durchmessern.

3°. $\rho = u^2\alpha + v^2\beta + (u + v)^2\gamma$ führt zur Elimination von

u, v aus

$$x = u^2 a,\ y = v^2 b,\ z = (u+v)^2 c = (u^2 + 2uv + v^2) c.$$

Es ist hierdurch

$$u^2 = \frac{x}{a},\ v^2 = \frac{y}{b},\ 2\,uv = \frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

und die Elimination ergibt

$$\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{4\,xy}{ab} = 0$$

einen Kegel zweiten Grades, der durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, oder OBC, OCA, OAB, wie unmittelbar ersichtlich, berührt wird.

4⁰. Ebenso führt

$$\rho = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{v} - \frac{\gamma}{u+v}$$

zur Elimination von u, v aus

$$x = \frac{a}{u},\ y = \frac{b}{v},\ z = -\frac{c}{u+v}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \text{ oder } ayz + bzx + cxy = 0.$$

Die gegebene Gleichung gehört somit wieder einem Kegel zweiten Grades an, welcher jedoch in diesem Falle die Durchschnitte der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, zu je zwei genommen, d. h. die Geraden OA, OB, OC, enthält.

25. **Differentiale von Vektoren.** Wenn ein Differential eines Vektors α ohne weitere Nebenbedingung gebildet werden soll, so wird damit gemeint ein willkürlicher Vektor aus dem Endpunkte des Vektors α gezogen.

Es erscheint aber weiter, wie aus den drei vorhergehenden Artikeln einleuchtet, ein Vektor ρ manchmal als Funktion anderer gegebenen Vektoren α, β, γ und einer oder mehrerer Skalarvariabeln u, v...... Wir wollen diese Funktion ganz allgemein denken

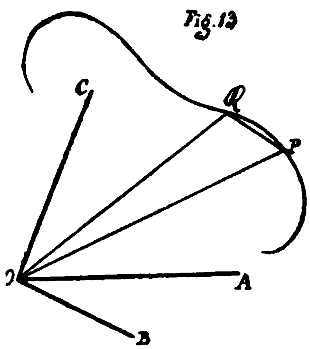
$$\rho = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, u, v \ldots.) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 47)$$

Es kann nun gefragt werden, welche Änderung ρ erleidet, wenn man eine oder mehrere der Gröszen α, β, γ, u, v..... eine Änderung erfahren lässt.

Dies zu veranschaulichen ist die Figur 13 gezeichnet. O ist der Vektorenanfangspunkt, die gezeichnete Curve der von dem Endpunkte des Vektors $OP = \rho$ beschriebene geometrische Ort.

Bei demselben wollen wir α, β, γ constant erhalten und nur eine Änderung der Grösze u erteilen. Die Gleichung (a. 47) hat nämlich bei einer Raumcurve, wie wir in. Art. 23 sahen, die Gestalt $\rho = \Phi\,(\alpha, \beta, \gamma, u)$; weil α, β, γ constant bleiben, so wollen wir hierfür einfacher schreiben

$$\rho = \psi\,(u).$$



Eine Änderung der Grösze u allein bewirkt, dass der Punkt P die Curve entlang sich bewegt, z. B. nach Q. Es ist deshalb $OQ - OP$ oder PQ die durch Änderung von u bewirkte Änderung von ρ oder

$$PQ = \Delta\,\rho = \psi\,(u + \Delta\,u) - \psi\,(u).$$

Hamilton wählt nun als Definition des Differentials des Vektors ρ

$$d\rho = d\psi\,(u) = \text{Lim.}\, n \left\{ \psi\!\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(u) \right\}, \text{ für } n = \infty\,. \quad (a.\ 48)$$

und diese Definition hat den Vorteil vor der üblichen, dass mit derselben die Gröszen $d\rho$ und du nicht notwendig als unendlich klein betrachtet zu werden brauchen. Andrerseits ist dieselbe für diesen Fall mit der üblichen Definition im Einklang, wie leicht ersichtlich.

Ist nämlich du nicht unendlich klein, so nähert sich doch bei wachsendem n die Grösze $\frac{du}{n}$ der Null. Man kann deshalb bei sehr grossem n die Grösze $\psi\left(u + \frac{du}{n}\right)$ durch

$$\psi\,(u) + \psi'\,(u)\,\frac{du}{n} + \psi''(u).\tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{n}\right)^2 + \dots.$$

ersetzen, wobei ψ', ψ'' die Derivirten der Funktion ψ bedeuten. Es wird deshalb

$$d\rho = \text{Lim.}\, n \left\{ \psi'(u)\frac{du}{n} + \psi''(u)\tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{n}\right)^2 + \ldots\ldots \right\} = \psi'(u)\,du.$$

Das so definirte Differential von ρ hat auch eine leicht angebbare geometrische Bedeutung. Bei wachsendem n nähert sich nämlich der Vektor $\psi\left(u+\frac{du}{n}\right)$ dem Vektor $\psi(u)$ oder OP d. h. in der Figur 13 nähert der Punkt Q die Curve entlang sich dem Punkte P. Es wird deshalb $\psi\left(u+\frac{du}{n}\right)-\psi(u)$ bei wachsendem n als ein unendlich kleines Bogenelement der Curve betrachtet werden können, und Lim. $n\left[\psi\left(u+\frac{du}{n}\right)-\psi(n)\right]$ oder $d\rho$ wird ein endlicher Vektor in der Richtung der Tangente im Punkte P sein.

Der Tensor dieser Vektors ist $du.T\psi'(u)$; den Wert dieses Tensors, wenn du der Einheit gleich genommen wird, wollen wir den Tensor des Tangentialvektors im Punkte P nennen, und den Vektor mit diesem Tensor einfach den Tangentialvektor im Punkte P. Derselbe ist eine Funktion von u, nämlich $\psi'(u)$.

Aus dem Tangentialvektor können wir sodann wieder einen anderen Vektor herleiten, nämlich

$$d\psi'(u) = \text{Lim.}\, n\left\{\psi'\left(u+\frac{du}{n}\right) - \psi'(u)\right\},\ \text{für}\ n=\infty.$$

und dieser wird das zweite Differential des Vektors ρ genannt.

Die oben definirten Differentiale $d\rho$ und du sind von HAMILTON simultane Differentiale genannt worden.

26. Die *Länge* s des Bogens der Curve, von einem bestimmten Punkte P_0 derselben bis zum Punkte P gemessen, kann als eine Funktion $F(u)$ des Skalars u betrachtet werden. Man kann demnach die Grösze ds nach der Formel

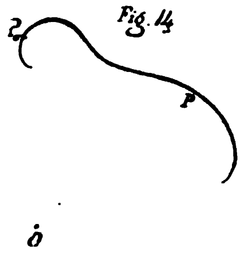
$$ds = \text{Lim.}\, n\left[F\left(u+\frac{du}{n}\right) - F(u)\right],\ \text{Lim.}\ n=\infty \quad . \ (a.\,49)$$

berechnen; und das in dieser Weise bestimmte ds ist ein Skalar, weil dasselbe von s oder $F(u)$ gilt. Es lässt sich nun aber leicht ersehen, dass das in diesem Sinne genommene ds der Grösze $Td\rho$ gleich kommt, so dass man die Relation

$$ds = Td\rho \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a.\ 50)$$

hinschreiben kann.

Denn es sei in der Figur 14, wo $P_0P = s$, $OP = \rho$ genommen ist



$$T.P_0P' = F\left(u + \frac{du}{n}\right),\ OP' = \psi\left(u + \frac{du}{n}\right)$$

somit

$$T.PP' = F\left(u + \frac{du}{n}\right) - F(u)\ . \quad (a.\ 51)$$

$$PP' = \psi\left(u + \frac{du}{n}\right) - \psi(u)\ . \quad (a.\ 52)$$

Es ist sodann nach (*a.* 49), (*a.* 51)

$$ds = \text{Lim.}\ nT.PP'$$

$$= T.\ \text{Lim.}\ n.PP' \text{ nach } (a.\ 4)$$

$= T.d\rho$, nach (*a.* 52) in Verbindung mit der Definitionsgleichung der Grösze $d\rho$.

Die Gleichung (*a.* 50) wird bei späteren Anwendungen mehrmals benutzt werden.

27. Wenn ρ zu einer Oberfläche gehört, daher der Gleichung (*a.* 43)

$$\rho = \psi(u, v)\,\alpha + f(u, v)\,\beta + \Phi(u, v)\,\gamma = F(u, v)$$

genügt, so kann man auch partielle simultane Differentiale von ρ bilden

$$d_u\rho = \text{Lim.}\ n\left[F\left(u + \frac{du}{n}, v\right) - F(u, v)\right],$$

$$d_v\rho = \text{Lim.}\ n\left[F\left(u, v + \frac{dv}{n}\right) - F(u, v)\right],$$

Vektoren, welche beide in der Tangentialebene des Punktes mit dem Vektor ρ liegen.

———

QUOTIENTEN VON VEKTOREN.

QUATERNIONEN.

28. Die Operation, durch welche ein Vektor α in einen anderen β übergeführt wird, heisst der **Quotient** der Vektoren β und α oder der **Quaternion** β dividirt durch α [1]). Man schreibt denselben

$$\beta : \alpha = q \text{ oder } \frac{\beta}{\alpha} = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,1)$$

und nennt, dem bisherigen Sprachgebrauch gemäsz, β den Dividendus oder Zähler, α den Divisor oder Nenner.

Dass der Operator q an einen Vektor α wirkt und dass daraus β resultirt, bezeichnen wir wie nachstehend,

$$\beta = q\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,2)$$

Die Operation der Überführung eines Vektors in einen anderen besteht aus

1°. einer Ausdehnung oder Zusammendrückung des Vektors α, bis dessen Tensor demjenigen des Vektors β gleich geworden ist.

2°. einer Drehung in der Ebene der beiden Vektoren α und β d. h. um eine Achse senkrecht zu dieser Ebene, während der Drehungswinkel dem Winkel zwischen den Vektoren α und β gleich kommt.

Ein Quaternion ist deshalb bestimmt durch:

---

1) Man sehe die Anmerkung auf S. 2.

1°. die Grösze der Ausdehnung oder Contraction, d. h. das Verhältnis der Tensoren der beiden Vektoren, also

$$T\beta : T\alpha \text{ oder } \frac{T\beta}{T\alpha}.$$

Dieses Verhältnis wird Tensor des Quaternions q genannt und mit Tq bezeichnet. Es gilt demnach die Gleichung

$$Tq = \frac{T\beta}{T\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (b.\ 3)$$

Weil $T\alpha$ und $T\beta$ nach dem vorigen Abschnitt arithmetische Zahlen sind, so ist auch Tq stets eine solche.

2°. Die Ebene, in der die Drehung stattfinden soll. Anstatt dieser Ebene pflegt man das Lot dazu in einem bestimmten Sinne gezogen zu geben. Wir wollen die Verabredung machen, dass die Senkrechte zur Ebene der beiden Vektoren stets nach *der* Seite gezogen wird, von welcher aus gesehen die Drehung von α nach β entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr erscheint.

Das so bestimmte Lot soll die Achse des Quaternions q heiszen und mit $Ax.q$ bezeichnet werden. Dieselbe ist ein Vektor unbestimmter Länge.

3°. Die Grösze des Drehungswinkels des Quaternions, welchen wir mit $\angle q$ bezeichnen wollen. Wir setzen vorläufig fest, dass derselbe stets zwischen 0 und π enthalten sein soll.

Weil die Achse des Quaternions durch zwei Gröszen bestimmt wird, z. B. durch die beiden Winkel mit zwei gegebenen Vektoren in einem bestimmten Sinne gezählt, so braucht man zur Bestimmung eines willkürlichen Quaternions im ganzen vier Gröszen, daher HAMILTON auch den Namen »Quaternion" derivirte.

29. Zwei Quaternionen sollen einander gleich heiszen, wenn dieselben in Tensor, Achse und Drehungswinkel übereinstimmen.

Wenn wir demnach die beiden Vektoren OA und OB eines Quaternions OB : OA in der Ebene OAB drehen, während die Tensoren der Vektoren ungeändert bleiben oder beide in demselben Verhältnis geändert werden, und solches während der Winkel zwischen den Vektoren constant erhalten wird, so bleibt auch der Quaternion ungeändert. Oder kürzer kann man auch sagen: Wenn das Dreieck OAB in seiner Ebene gedreht wird und zugleich deformirt, so dass es sich selbst ähnlich bleibt, so bleibt der Quaternion OB : OA ungeändert.

Es folgt hieraus noch die Formel

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OB}}{x.\mathrm{OA}}$$

wenn x einen Skalar bedeutet.

Auch bei Quaternionen wollen wir die Gültigkeit der beiden Grundsätze des ersten Abschnittes (Art. 3) annehmen.

Wenn $\frac{\beta}{\alpha} = q$ und $\frac{\beta'}{\alpha'} = q'$, während $q = q'$, so braucht noch nicht $\beta = \beta'$ und $\alpha = \alpha'$ zu sein. Es ist vielmehr nur notwendig, dass die Vektoren β' und α' (OB′ und OA′) mit β und α (OB und OA) in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen liegen, wodurch $Ax.q$ mit $Ax.q'$ übereinstimmt, und dass die Dreiecke OAB und OA′B′ ähnlich sind. Denn es ist hierdurch $\angle q = \angle q'$ und $Tq = Tq'$.

30. Die beiden Operationen, aus welchen nach Art. 28 ein Quaternion zusammengesetzt ist, können wir auch nach einander ausgeführt denken; zuerst die Drehung, nachher die Ausdehnung (oder Zusammendrückung) oder umgekehrt.

Wir wollen die im Quaternion q enthaltene Drehung den Versor des Quaternions nennen und mit Uq bezeichnen. Dass dieser Operator an einen Vektor α wirkt, geben wir dadurch zu erkennen, dass wir das Symbol Uq vor das Zeichen α setzen, durch einen Punkt von einander getrennt.

Uq ist, wie aus dem Vorigen ersichtlich, ein Quaternion, der einen Vektor in einen anderen gleicher Länge überführt. Die absolute Grösze dieser Länge kommt nach dem Vorigen nicht in Betracht. Wir können deshalb die Formel hinschreiben

$$Uq = \frac{U\beta}{U\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 3^*)$$

Ein solcher Quaternion wird von Hamilton Radial genannt. Wir haben somit

$$TUq = 1, \quad UUq = Uq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 4)$$

Uq ist bestimmt durch $Ax.q$ und $\angle q$.

31. Nach dem vorigen Artikel ist $Uq.\alpha$ ein aus α entstandener Vektor. Lassen wir nun an diesen den Skalaroperator Tq wirken d. h. unterwerfen wir den in die neue Lage geratenen Vektor einer Ausdehnung, so wird dies durch das nachfolgende Zeichen ausgedrückt: $Tq\ Uq.\alpha$.

Es hat nun aber die ganze Operation q stattgefunden; das Resultat ist somit auch $q\alpha$ nach (b. 2) und wir können deshalb symbolisch schreiben:

$$q = Tq\ Uq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 5)$$

und sagen sodann, dass Uq mit Tq multiplicirt ist [1]).

32. Soll ein Vektor in einen anderen gleicher Richtung übergeführt werden, so wird dies schon durch die alleinige Anwendung der Operation Tq bewirkt. Es ist demnach in diesem Falle $q = Tq$ zu setzen, und zugleich, nach (b. 5), $Uq = 1$.

Soll ein Vektor in einen anderen entgegengesetzter Richtung übergeführt werden, so wird dies ebenso durch die alleinige Anwendung der Operation $-Tq$ bewirkt. In diesem Falle ist daher zu setzen $q = -Tq$ und zugleich, nach (b. 5), $Uq = -1$. Es erscheinen hiernach die positive und die negative Einheit als eine besondere Art von Versoren.

In diesem Sinne kann die Wirkung einer positiven oder negativen algebraischen Zahl $+x$ oder $-x$, wo x eine arithmethische Zahl bedeutet, wie nachstehend gedeutet werden

$$(+x)\,\alpha = x\,(+1.\alpha) \text{ und } (-x)\alpha = (-1.\alpha).$$

33. Wie Uq so ist auch Tq ein Quaternion, nämlich ein solcher, der einen Vektor in einen anderen gleicher Richtung überführt. Es ist deshalb

$$TTq = Tq,\ UTq = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 6)$$

Hamilton führt in seine Rechnungsweise auch noch den Ausdruck Norm eines Quaternions ein mit dem Zeichen Nq und mit der Definition

$$Nq = (Tq)^2 = Tq^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 7)$$

Diese Gleichung besagt zugleich, dass wir bei $(Tq)^2$ die Klammern der Einfachheit wegen fortlassen wollen.

---

1) Man sehe die Anmerkung auf S. 2.

34. Wenn der Quaternion q den Vektor α in β überführt, so sei mit $\frac{1}{q}$ derjenige Quaternion bezeichnet, welcher umgekehrt den Vektor β in α übergehen macht.

Weil Uq den Einheitsvektor der Richtung α in denjenigen der Richtung β überführt, so wird $\frac{1}{Uq}$ den Übergang des Einheitsvektors $U\beta$ in $U\alpha$ bewirken.

Es sind wohl unmittelbar die nachfolgenden Gleichungen einleuchtend

$$Ax.\frac{1}{q} = - Ax.q\,, \quad \angle\frac{1}{q} = \angle q\,, \quad T\frac{1}{q} = \frac{1}{Tq}\,, \quad U\frac{1}{q} = \frac{1}{Uq}\,. \quad (b.\,8)$$

Die dritte dieser Gleichungen wird übrigens, wie nachstehend, bewiesen:

$$T\frac{1}{q} = T\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta} = \frac{1}{\frac{T\beta}{T\alpha}} = \frac{1}{T\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{1}{Tq}.$$

Man schlieszt hieraus noch

$$N\frac{1}{q} = \left(T\frac{1}{q}\right)^2 = \left(\frac{1}{Tq}\right)^2 = \frac{1}{Tq^2} = \frac{1}{Nq}\,. \;.\;.\;.\; (b.\,8^*)$$

$\frac{1}{q}$ wird der **reciproke Quaternion** des Quaternions q genannt.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass der Reciproke eines reciproken Quaternions, der ursprüngliche Quaternion ist.

Die Quaternionen q und $\frac{1}{q}$ können deshalb reciprok zu einander genannt werden.

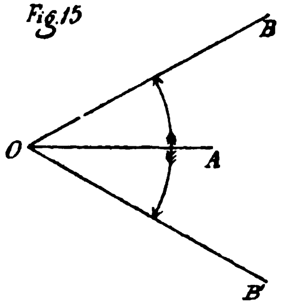
In einer Formel heiszt dies

$$\frac{1}{\frac{1}{q}} = q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b.\,9)$$

35. Zwei Quaternionen mit gleichem Tensor, gleichem Drehungswinkel aber entgegengesetzter Achse werden **conjugirte Quaternionen** genannt, und wenn q der eine derselben ist, so wird der andere mit Kq bezeichnet.

Führt q den Vektor OA in OB über, oder ist $q = \frac{OA}{OB}$, so können wir in der Ebene OAB einen Vektor OB′ zeichnen (Figur 15), welcher mit OA nach der andern Seite einen Winkel bildet, der dem Winkel AOB gleich kommt und dessen Tensor der Relation genügt

Fig. 15



$$T.OB' = T.OB.$$

Es wird sodann $\frac{OB'}{OA}$ den Quaternion Kq darstellen oder Kq führt OA in OB′ über. Die nachfolgenden Formeln gelten demnach:

$$Ax.Kq = -Ax.q, \ \angle Kq = \angle q, \ TKq = Tq, \ UKq = U\frac{1}{q} = \frac{1}{Uq}. \quad (b. 10)$$

Aus $TKq = Tq$ folgt noch

$$NKq = Nq \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (b. 11)$$

Aus den Relationen (b. 10) ergibt sich

$$Kq = TKq\ UKq = Tq \cdot \frac{1}{Uq} \ \ldots\ldots \ (b. 11^*)$$

Unmittelbar wird die nachstehende Formel einleuchten:

$$K(Kq) = q \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (b. 12)$$

oder in Worten, der Conjugirte eines conjugirten Quaternions ist der ursprüngliche Quaternion.

Der Kürze halber wollen wir anstatt $K(Kq)$ einfach KKq oder K^2q schreiben.

Man ersieht dann auch weiter die Richtigkeit der Formeln

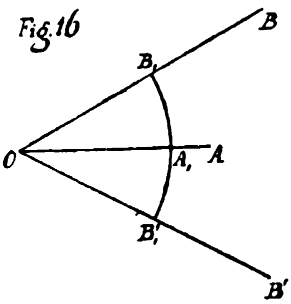
$$K^{2m}q = q, \ K^{2m+1}q = Kq,$$

wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Die Symbole K und U an einen Quaternion nach einander operirend, sind commutativ, oder

$$KUq = UKq \ \ldots \ (b. 13)$$

Fig. 16

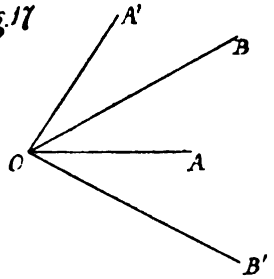


Denn, wenn in der Figur 16 q=OB:OA, Kq = OB′ : OA, während OB_1, OA_1, OB_1' Einheitsvektoren sind, so ist

$$KUq = K\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_1'}{OA_1} = U\frac{OB'}{OA} = UKq.$$

Durch die Verbindung der Begriffe dieses Artikels mit denen des vorigen erhält man noch mit Hülfe der Figur 17, bei welcher

Fig. 17



$$\angle A'OB = \angle BOA = \angle AOB',$$

und

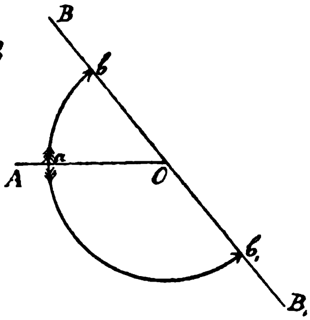
$$T.OA' = T.OA,\ T.OB' = T.OB:$$

$$K\frac{1}{q} \doteq K\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA}{OB'} = \frac{1}{Kq}$$

oder kürzer $K\frac{1}{q} = \frac{1}{Kq}$ . . . (*b.* 14)

36. Unter xq, wobei wir voraussetzen $q = \frac{OB}{OA}$, während x ein positiver oder negativer Coefficient ist, wollen wir verstehen den Quaternion, welcher den Vektor OA in den Vektor x.OB überführt, wodurch wir die Gleichung erhalten

Fig. 18



$$xq = \frac{x.OB}{OA} \text{. . . (b. 15)}$$

In dem besonderen Falle $x = -1$, schreiben wir einfacher

$$-q = \frac{-OB}{OA} = \frac{OB_1}{OB} \text{ (Figur 18).}$$

Wir können im allgemeinen zwei Fälle unterscheiden

1°. x ist ein positiver Skalar. Es ist sodann

$$Ax.xq = Ax.q,\ \angle xq = \angle q,\ Txq = xTq,\ Uxq = Uq \quad . . (b. 16)$$

2°. x ist ein negativer Skalar, nämlich $-y$. Bei dieser Annahme wird

$$Ax.xq = -Ax.q,\ \angle xq = \pi - \angle q,\ Txq = yTq,\ Uxq = -Uq \quad (b. 17)$$

Die letztere dieser Formeln ist nachstehend bewiesen.

$$Uxq = U(-y)q = U\frac{-y.OB}{OA} \text{ nach der Definition (b. 15)} =$$

$$= U.y\frac{(-OB)}{OA} \text{ nach (a. 21)}$$

$$= U.\frac{-OB}{OA} \text{ nach (b. 16)} = U(-q).$$

Es ist jedoch $U.(-q)$ ein Quaternion, welcher den Einheitsvektor Oa (Fig. 18) in Ob_1 überführt, und dieser ist der Negative des Radials $\frac{Ob}{Oa}$; deshalb ist

$$U(-q) = -Uq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,18)$$

und schlieszlich

$$Uxq = -Uq.$$

Als besondere Fälle der Gleichungen $(b.\,16)$ $(b.\,17)$ können betrachtet werden

$$Tx = x$$

wenn x eine arithmetische Zahl ist, und

$$Tx = y$$

wenn x die algebraische negative Zahl $-y$ bedeutet.

Denn es ist in dem ersten Falle

$$Tx = T(x.1) = xT1 \text{ nach } (b.\,16) = x$$

und in dem zweiten Falle

$$Tx = T(y.-1) = yT.-1 \text{ nach } (b.\,17) = y,$$

weil das Verhältnis der Längen der Vektoren bei dem Quaternion -1 der Einheit gleich kommt.

Die Ausdrücke $x(yq)$, xyq und $(xy)q$ betrachten wir als identisch.

Wenn an einen Vektor α zuerst die Operation x und nachher die Operation q vollzogen werden soll, so wollen wir dies schreiben $qx\alpha$.

Es gilt der Satz

$$qx\alpha = xq\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b\,18^*)$$

Denn es ist offenbar gleichgültig, ob wir erst den Tensor des Vektors im Verhältnis x ändern, sodann den erhaltenen Vektor drehen und wieder den Tensor im Verhältnis Tq ändern, oder ob man erst den Vektor dreht, und sodann den Tensor nach einander in den Verhältnissen Tq und x sich ändern lässt.

Ebenso ersieht man leicht, dass

$$xyq = yxq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,18^{**})$$

weil

$$xyq = xy\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{xy\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\,15) = \frac{yx\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (a.\,7) = yx\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = yxq$$

und im allgemeinen wird einleuchtend sein, dass die arithmetischen Zahlen an einen Quaternion operirend dieselben Gesetze befolgen müssen, denen sie bei ihrer Operation an Vektoren gehorchen.

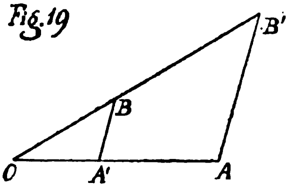
Einige weiteren Formeln sind

$$1^0.\; -(-q) = -\left(-\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = -\frac{-\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{-(-\mathrm{OB})}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = q. \quad (b.\ 19)$$

Man nennt $-q$ den **negativen Quaternion** von q. Es ist deshalb der Negative eines negativen Quaternions der ursprüngliche Quaternion.

2^0. $\frac{1}{xq}$ ist ein Quaternion, welcher den Vektor $x.\mathrm{OB}$ in OA überführt, wenn

Fig. 19



$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}.$$

Es sei

$$\mathrm{OB'} = x.\mathrm{OB},$$

so ist

$$\frac{1}{xq} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB'}}.$$

Ziehen wir B'A und BA'//B'A, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB'}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB}}.$$

Weil aber

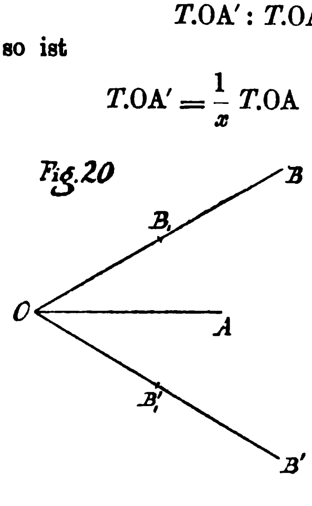
$$T.\mathrm{OA'} : T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{OB} : \mathrm{OB'} = 1 : x,$$

so ist

$$T.\mathrm{OA'} = \frac{1}{x}\, T.\mathrm{OA} \text{ und demnach } \mathrm{OA'} = \frac{1}{x}\, \mathrm{OA}.$$

Es wird hierdurch

Fig. 20



$$\frac{1}{xq} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\frac{1}{x}\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{x}\frac{1}{q}. \quad (b.\ 20)$$

3^0. $K.xq = xKq$. Dies zu beweisen, setzen wir erst voraus, x sei ein positiver Skalar. Wir nehmen an, dass in der Figur 20 $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, $xq = \mathrm{OB}_1 : \mathrm{OA}$, $\angle\, \mathrm{AOB'} = \angle\, \mathrm{BOA}$, $T.\mathrm{OB'} = T.\mathrm{OB}$ und $T.\mathrm{OB}_1{}' = T.\mathrm{OB}_1$.

Es wird dadurch

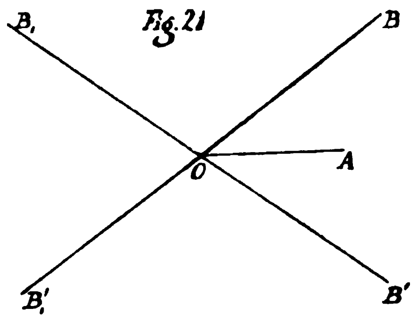
$$K.xq = K.\frac{OB_1}{OA} = \frac{OB_1'}{OA} = \frac{x.OB'}{OA} = x\,\frac{OB'}{OA} = xKq.$$

Weiter wollen wir zeigen, dass

$$K(-q) = -Kq \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,21)$$

Zu diesem Zwecke haben wir nur in der Figur 18 OB_1 durch den negativen Vektor von OB, von dem Punkte O aus gezogen, zu ersetzen, wie in der Figur 21, in welcher

$$T.OB = T.OB' =$$
$$= T.OB_1 = T.OB_1'.$$



Es ist jetzt, wie bei dem vorigen Beweise

$$K(-q) = K.\frac{OB_1'}{OA} = \frac{OB_1}{OA} = \frac{-OB'}{OA} = -\frac{OB'}{OA} = -Kq.$$

Allgemeiner ist dadurch, wenn y positiv ist

$$K(-yq) = -Kyq = -yKq,$$

sodass für alle positiven und negativen Werte von x die Formel

$$Kxq = xKq \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,22)$$

bewiesen ist.

Wenn wir den Ausdruck $\frac{x}{q}$ als gleichbedeutend annehmen mit $x\frac{1}{q}$, wie wir durch die Gleichung ($b.$ 23) aussprechen wollen,

$$\frac{x}{q} = x\frac{1}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,23)$$

so lässt die Gleichung ($b.$ 11*) sich auch in die nachstehende Gestalt bringen

$$Kq = \frac{Tq}{Uq} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,24)$$

und weil

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{Tq\,Uq} = \frac{1}{(Tq)^2}\,\frac{Tq}{Uq} = \frac{1}{Nq}\,\frac{Tq}{Uq},$$

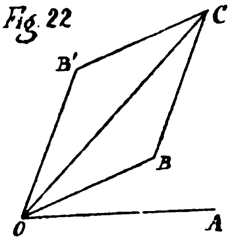
so kann auch erhalten werden

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Nq} \text{ oder } Kq = \frac{Nq}{q} \ldots\ldots \quad (b.\,24^*)$$

37. Die Summe zweier Quaternionen mit gleichem Nenner, wollen wir durch die Gleichung (b. 25) definiren

$$q + q' = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta'}{\alpha} = \frac{\beta + \beta'}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (b.\ 25)$$

Fig. 22



Es ist leicht diese Definition geometrisch zu interpretiren Wenn in der Figur 22,

$$\alpha = \mathrm{OA}, \ \beta = \mathrm{OB}, \ \beta' = \mathrm{OB}',$$

so sei BC //= OB′ gezogen.

Es wird dadurch

$$q + q' = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}.$$

Die Summe zweier Quaternionen mit gleichem Divisor ist somit ein neuer Quaternion.

Aus der Definition der Summe folgt sogleich, dass dabei der Satz gilt

$$q + q' = \frac{\beta + \beta'}{\alpha} = \frac{\beta' + \beta}{\alpha} \text{ (nach } a.\ 1) = q' + q.$$

Und allgemein ist wegen der Gleichung (a. 1), wenn q, q', q'', . . /. Quaternionen mit gleichem Divisor sind

$$q + q' + q'' + q''' + \ldots = q + q''' + q'' + q' + \ldots \quad (b.\ 26)$$

Wegen der Gleichung (a. 2) wird auch die nachstehende Gleichung einleuchtend sein

$$q + q' + q'' + q''' + \ldots = q + q' + (q'' + q''' + \ldots) \quad (b.\ 27)$$

Die Summe zweier willkürlichen Quaternionen $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$ und $q' = \mathrm{OB}' : \mathrm{OA}'$ sei so verstanden:

Wenn die Quaternionen q und q' in verschiedenen Ebenen (d. h. in nicht parallelen Ebenen) enthalten sind, so kann man die beiden Nenner der Quaternionen nach der diesen Ebenen gemeinsamen Geraden überbringen, indem man nach Art. 29 die beiden Vektoren eines jeden der Quaternionen so lange dreht, bis die Nenner in jene Durchschnittsgerade der Ebenen zusammenfallen.

Nach demselben Artikel können nachher die Tensoren der beiden der Richtung nach zusammenfallenden Nenner einander gleich gemacht werden, indem man auch den Tensor des Zählers eines jeden der Quaternionen in demselben Verhältnisse ändert, in welchem der Nenner dieses Quaternions eine Änderung erfahren hat.

Es sind dadurch die beiden Quaternionen auf einen gemeinsamen Nenner reducirt und die Summe kann nunmehr nach dem Anfang dieses Artikels bestimmt werden.

Wenn die beiden gegebenen Quaternionen in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen wirken, so kann jeder in einer dieser Ebenen enthaltene Vektor zum gemeinsamen Nenner gewählt und nach der Reduction der beiden Quaternionen auf diesen Nenner die Summe unmittelbar bestimmt werden.

Auch die Summe zweier willkürlichen Quaternionen ist hiernach commutativ.

Der Ausdruck $q+q'+q''+q'''+\ldots$, in welchem $q, q', q'', q''', \ldots$ willkürliche Quaternionen bedeuten, gibt zu erkennen, dass zu dem Quaternion $q+q'$ der andere q'' addirt werden soll, nachher zum Quaternion $q+q'+q''$ der andere q''' u. s. w.

Es können nicht mehr als zwei willkürliche Quaternionen zugleich auf denselben Nenner reducirt werden, weil drei Ebenen im allgemeinen nicht eine gemeinsame Gerade enthalten.

Im Art. 71 wird der Studirende einen einfachen Beweis finden, dass auch bei der Summe mehrerer willkürlichen Quaternionen das commutative und das associative Princip gültig bleiben, daher wir hier nicht länger dabei verweilen wollen.

38. Es können leicht mit Hülfe des vorigen Artikels einige weiteren Sätze bewiesen werden:

1°. $$q+(-q)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 28)$$

Denn es ist

$$q+(-q)=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}+\left(-\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}+\frac{-\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 15)=$$
$$=\frac{\mathrm{OB}+(-\mathrm{OB})}{\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\ 25)=0 \text{ nach } (a.\ 13).$$

2°. $$xq+yq=(x+y)q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 29)$$

Denn man erhält

$$xq+yq=x\frac{\beta}{\alpha}+y\frac{\beta}{\alpha}=\frac{x\beta}{\alpha}+\frac{y\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 15)=\frac{x\beta+y\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 25)=$$
$$=\frac{(x+y)\beta}{\alpha} \text{ nach } (a.\ 9)=(x+y)\frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 15).$$

3°. Allgemeiner erhält man in derselben Weise:

$$xq+yq+zq+\ldots\ldots=(x+y+z+\ldots\ldots)\,q\,. \quad (b.\,29^*)$$

$$\left.\begin{array}{l}(x+y+z+\ldots\ldots)\,q=(x+z+y+\ldots\ldots)\,q\\(x+y+z+\ldots\ldots)\,q=[x+(y+z)+\ldots\ldots]\,q\end{array}\right\}. \quad (b.\,29^{**})$$

$$4^0.\ xq+xq'=x\frac{\beta}{\alpha}+x\frac{\beta'}{\alpha}=\frac{x\beta}{\alpha}+\frac{x\beta'}{\alpha}=\frac{x\beta+x\beta'}{\alpha}=$$

$$=\frac{x(\beta+\beta')}{\alpha}\text{ nach } (a.\,10)=x\frac{\beta+\beta'}{\alpha}=x\,(q+q').$$

Oder kürzer

$$xq+xq'=(q+q')\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,30)$$

Wenn zwei Quaternionen q und q' einander gleich sind, und auch $q''=q'''$, so wird daraus geschlossen werden können

$$q+q''=q'+q'''.$$

Dieser Satz kann als unmittelbare Folge des zweiten Grundsatzes im Art. 3 betrachtet oder auch auf geometrischem Wege bewiesen werden. Wir überlassen indessen dieses letztere dem Studirenden.

39. Die Differenz zweier Quaternionen q und q' definiren wir durch die Gleichung

$$q-q'=q+(-q')\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,31)$$

Sind die beiden Quaternionen auf den nämlichen Nenner reducirt, also

$$q=\beta:\alpha,\quad q'=\beta':\alpha,$$

so ist

$$q-q'=q+(-q')=\frac{\beta}{\alpha}+\left(-\frac{\beta'}{\alpha}\right)=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{-\beta'}{\alpha}=$$

$$=\frac{\beta+(-\beta')}{\alpha}\text{ nach } (b.\,25)=\frac{\beta-\beta'}{\alpha}\text{ nach } (a.\,14). \quad (b.\,32)$$

Es ist daher die Differenz zweier Quaternionen ein neuer Quaternion.

In gleicher Weise, wie in Art. 14 für Vektoren bewiesen ist, kann man auch hier zeigen, dass die Differenz zweier Quaternionen zu dem Subtrahendus addirt, den Minuendus ergibt.

Ebenso ergibt sich, wie in Art. 14, dass die Differenzen zweier einander gleichen Quaternionen mit zwei anderen gleichen Quaternionen, wieder einander gleich sein müssen.

Aus der Definition $(b.\,31)$ kann wie in dem schon mehrmals genannten Artikel die Commutativität der einzelnen Glieder bei der Addition und der Subtraction hergeleitet werden.

Es ist weiter

$$-(q+q')=-q-q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\ 33)$$

Denn

$$-(q+q')=-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta'}{\alpha}\right)=-\frac{\beta+\beta'}{\alpha}=\frac{-(\beta+\beta')}{\alpha}=$$

$$=\frac{-\beta-\beta'}{\alpha} \text{ nach } (a.\ 17)=\frac{-\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 32)=$$

$$=-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha}=-q-q'.$$

Die Verallgemeinerung lautet sodann wieder

$$-(q+q'+q'')=-\{(q+q')+q'\}=-(q+q')-q''=-q-q'-q'' (b.34)$$

und

$$-(q-q'-q''+q''')=-[q+(-q')+(-q'')+q'''], \text{ nach } (b.\ 31),$$
$$=-q-(-q')-(-q'')-q''', \text{ nach } (b.\ 34),$$
$$=-q+\{-(-q')\}+\{-(-q'')\}-q''', \text{nach} (b.31)$$

oder

$$-(q-q'-q''+q''')=-q+q'+q''-q''', \text{ nach } (b.\ 19) \ . \ . \ . \ (b.\ 35)$$

Wie die Gleichungen ($a.$ 19), ($a.$ 20) können weiter die nachstehenden bewiesen werden.

$$q+q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}=q+(q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}) \ . \ . \ . \ (b.\ 36)$$
$$q+q'-q''-q'''+q^{\text{IV}}=q+q'-(q''+q'''-q^{\text{IV}}) \ . \ . \ . \ (b.\ 37)$$

Noch wird

$$x(-q)=-xq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\ 38)$$

Denn

$$x(-q)=x\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=x\frac{-\beta}{\alpha}=\frac{x(-\beta)}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 15)=$$

$$=\frac{-x\beta}{\alpha} \text{ nach } (a.\ 21)=-\frac{x\beta}{\alpha}=-x\frac{\beta}{\alpha}=-xq.$$

Weiter

$$x(q-q'+q'')=xq-xq'+xq'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\ 39)$$

weil

$$x(q-q'+q'')=x[q+(-q')+xq'']=xq+x(-q')+xq''=$$
$$=xq+(-xq')+xq''=xq-xq'+xq''.$$

Schlieszlich

$$(x-y+z)q=xq-yq+zq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b.\ 40)$$

Man hat nämlich die Transformationen

$$(x-y+z)\,q=(x-y+z)\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(x-y+z)\,\beta}{\alpha}=$$

$$=\frac{x\beta-y\beta+z\beta}{\alpha}\ \text{nach}\ (a.\,23)=\frac{x\beta}{\alpha}-\frac{y\beta}{\alpha}+\frac{z\beta}{\alpha}=$$

$$=x\frac{\beta}{\alpha}-y\frac{\beta}{\alpha}+z\frac{\beta}{\alpha}=xq-yq+zq.$$

Es sind alle diese Formeln analog den in der Arithmetik gültigen Relationen. Wir wenden uns jetzt aber einigen speciell hierher gehörigen Formeln zu.

40. Wenn wir die Figur 23 nehmen, so finden wir

$$N(q+q')=[T(q+q')]^2=\left(T\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\right)^2=\frac{(T.\mathrm{OC})^2}{(T.\mathrm{OA})^2}=$$

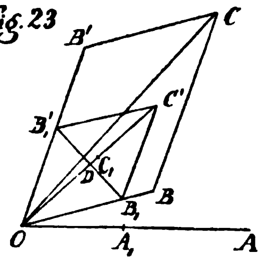
$$=\frac{(T.\mathrm{OB})^2+(T.\mathrm{OB}')^2+2\,(T.\mathrm{OB})\,(T.\mathrm{OB}')\cos\angle\mathrm{B'OB}}{(T.\,\mathrm{OA})^2}=$$

$$=\left(T\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)^2+\left(T\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}\right)^2+2\left(T\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)\left(T\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}}\right)\cos\angle\mathrm{B'OB}$$

oder

$$N(q+q')=Nq+Nq'+2\,Tq\,Tq'\cos\angle\mathrm{B'OB}.\quad (b.\,41)$$

Fig. 23



Es lässt sich hieraus unmittelbar schlieszen, dass

$$N(q+q')\ \text{und}\ Nq+Nq'$$

nur in dem Falle einander gleich kommen, wenn

$$\cos\angle\mathrm{B'OB}=0,$$

d. h. wenn

$$\angle\mathrm{B'OB}=\frac{\pi}{2}.$$

Es ist weiter $T(q+q')$ nur dann gleich $Tq+Tq'$, wenn $\cos\angle\mathrm{B'OB}=1$, d. h. wenn die Quaternionen q und q' nur an Tensor verschieden sind, oder wenn $q'=xq$ (x sei ein positiver Skalar) geschrieben werden kann.

Es ist endlich $T(q+q')=Tq-Tq'$ wenn $\cos\angle\mathrm{B'OB}=-1$, d. h. wenn $q'=-xq$ ist.

Es ist leicht zu beweisen, dass im allgemeinen auch nicht $U(q+q')$ dem Symbol $Uq+Uq'$ gleich sein kann.

Wenn wir nämlich in der Figur 23 um O als Mittelpunkt eine Kugel mit der Längeneinheit als Radius beschreiben, welche die Geraden OA, OB, OC, OB' in $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{B_1}'$ bzhw. schneide, so ist

$$Uq = OB_1 : OA_1,$$
$$Uq' = OB_1' : OA_1,$$
$$U(q+q') = OC_1 : OA_1.$$

Wenn wir weiter das Parallelogramm $OB_1C'B_1'$ beschreiben, so wird

$$Uq + Uq' = OC' : OA_1.$$

Im allgemeinen ist dieser Ausdruck nicht einmal ein Versor. Es kann deshalb nur dann

$$Uq + Uq' = U(q+q')$$

sein, wenn OC und OC′ der Richtung nach zusammenfallen, und wenn

$$T.OC' = 1.$$

Die letztere Bedingung erfordert, weil sodann

$$T.OC' = T.OB_1 = T.B_1C'$$

dass der Winkel $B_1'OB = \frac{2}{3}\pi$ sei, und die erstere Bedingung erfordert, dass

$$T.OB = T.OB' \text{ oder } Tq = Tq'.$$

Wir erhalten deshalb den Satz:

Nur wenn $Tq = Tq'$ und wenn nach der Reduction auf gleichem Nenner die Zähler der Quaternionen einen Winkel von 120° einschlieszen, kann

$$U(q+q') = Uq + Uq'$$

sein.

Analoge Betrachtungen sind auf $T(q-q')$ und $U(q-q')$ anwendbar.

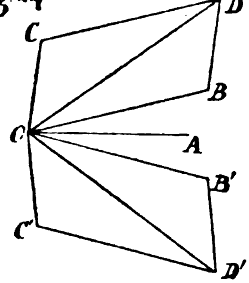
Gehen wir nunmehr zu $K(q+q')$ über. Es gilt der Satz:

$$K(q+q') = Kq + Kq' \quad \ldots\ldots\ldots (b.42)$$

Dies zu beweisen, setzen wir voraus, es sei in der Figur 24

$$q = OB : OA,$$
$$q' = OC : OA,$$
$$Kq = OB' : OA,$$
$$Kq' = OC' : OA.$$

Fig. 24



Construirt man die beiden Parallelogramme

OBDC und OB′D′C′

so ist

$$q + q' = \mathrm{OD} : \mathrm{OA}$$

und es ist ein Leichtes zu zeigen, dass

$$K(q + q') = \mathrm{OD}' : \mathrm{OA}.$$

Die dreiseitigen körperlichen Ecken OABC, OA'B'C' sind nämlich congruent, weil den Voraussetzungen gemäss

$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'OA}, \quad \angle \mathrm{COA'} = \angle \mathrm{C'OA},$$

während der Winkel zwischen den Ebenen COA, BOA der Scheitelwinkel desjenigen zwischen den Ebenen C'OA, B'OA ist. Es sind deshalb die Neigungswinkel auf den Seiten OB, OB' einander gleich und $\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{B'OC'}$.

Dadurch werden die dreiseitigen körperlichen Ecken OABD, OA'B'D' congruent ($\angle$ BOA = $\angle$ B'OA, $\angle$ DOB = $\angle$ D'OB, weil die Parallelogramme OBCD, OB'C'D' congruent sind, und der Neigungswinkel auf OB = demjenigen auf OB'). In denselben sind deshalb die Winkel zwischen den Ebenen DOA, AOB und zwischen D'OA, AOB' einander gleich und hieraus folgt, dass D'O in der Ebene DOA liegt. In den letzeren congruenten körperlichen Ecken ist ausserdem $\angle$ DOA = $\angle$ D'OA, wodurch wirklich OD' : OA = $K(q + q')$ ist. Es ist nunmehr

$$K(q + q') = \frac{\mathrm{OD}'}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}' + \mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OA}} = Kq + Kq'.$$

Hieraus kann man leicht herleiten

$$K(q - q') = Kq - Kq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,43)$$

Denn es wird

$$K(q-q') = K\{q + (-q')\} \text{ nach } (b.\,31) = Kq + K(-q') \text{ nach } (b.\,42) =$$
$$= Kq + (-Kq') \text{ nach } (b.\,21) = Kq - Kq' \text{ nach } (b.\,31).$$

Allgemeiner folgt aus (b. 42) und (b. 43)

$$K(q - q' - q'' + q''' + \ldots) = Kq - Kq' - Kq'' + Kq''' + \ldots \quad (b.\,44)$$

41. Wenn an einem Vektor α erst die Operation q und an dem dadurch entstandenen Vektor nachher die Operation q' vollzogen werden soll, so schreibt man dafür $q'q\alpha$ (bisweilen auch $q'.q\alpha$) und sagt, dass an den Vektor α der Operator $q'q$ wirkt.

Derselbe wird das **Produkt** des Quaternions q *mit* q' genannt, oder auch das **Produkt** des Quaternions q' *durch* q.

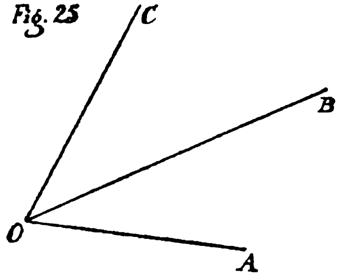
Und man pflegt zu sagen, dass in diesem Falle q *mit* q' und q' *durch* q multiplicirt ist. Den zuletzt operirenden Quaternion wollen wir den Multiplicator, den zuerst operirenden den Multiplicandus nennen.

Es seien q und q' ganz willkürlich gegeben. Man kann sodann stets die Durchschnittsgerade der Ebenen dieser Quaternionen bestimmen und den Quaternion q so lange in seiner Ebene drehen, bis dessen Zähler längs dieser Durchschnittsgeraden fällt. Es sei sodann

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$$

in der Figur 25, wo OB die Richtung der den Ebenen der Quaternionen q und q' gemeinsamen Geraden ist.

Fig. 25



In gleicher Weise kann man q' solange in seiner Ebene drehen, bis dessen Divisor mit OB der Richtung nach zusammenfällt; nachher kann man den Tensor des Nenners des Quaternions q' auf T.OB bringen. Es werde dadurch

$$q' = \mathrm{OC} : \mathrm{OB}.$$

Der Operator $q'q$ führt somit erst OA nach OB und nachher OB nach OC über. Das Resultat ist deshalb

$$q'q = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}.$$

Wir ersehen hieraus, dass das Produkt zweier Quaternionen im allgemeinen ein neuer Quaternion ist. In diesem Sinne aufgefasst, schreibt man bisweilen anstatt des Operators $q'q$ auch $(q'q)$.

Hat man im allgemeinen dem Obigen gemäss q und q' so gestellt, dass $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\beta}$, so wird die Formel gelten:

$$q'q = \frac{\gamma}{\beta} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad \text{. . . . .} \quad (b.\ 45)$$

42. Es ist augenscheinlich, dass dasselbe Resultat erhalten werden muss, welches mit $q'q$ erhalten wird, wenn man jeden der beiden Quaternionen in Versor und Tensor zergliedert und die vier so entstandenen Operationen in solcher Reihenfolge ausführt, dass zuerst die Drehungen, nachher die Verlängerungen stattfinden. Man kann deshalb schreiben:

$$q'q = (Tq'\ Uq')\,(Tq\ Uq) = Tq\ Uq'\ Tq\ Uq = Tq'\ Tq\ Uq'\ Uq \quad (b.\,46)$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass die in $q'q$ enthaltene Drehung durch das Operationszeichen $Uq'\ Uq$, die Verlängerung durch $Tq'\ Tq$ bewirkt wird oder in Formeln

$$T.q'q = Tq'\ Tq = Tq\ Tq' \text{ und } U.q'q = Uq'\ Uq. \quad . \ (b.\,47)$$

wo $T.q'q$ und $U.q'q$ statt $T(q'q)$, $U(q'q)$ geschrieben wird.

Es ist besonders der Beachtung wert, dass die Reihenfolge der Drehungen nicht umgekehrt werden darf, wie wir bald beweisen werden, während die Reihenfolge der Dilatationen nach dem Vorhergehenden abgeändert werden kann.

Ein anderer Beweis der Formeln ($b.$ 47) ist der nachstehende. In der Figur 23 ist

$$T.q'q = T.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OC}}{T.\mathrm{OB}}\,\frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}} = \left(T.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\right)\left(T.\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = Tq'.Tq.$$

$$U.q'q = U.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{U.\mathrm{OC}}{U.\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\,3^*) = \frac{U.\mathrm{OC}}{U.\mathrm{OB}}\,\frac{U.\mathrm{OB}}{U.\mathrm{OA}} \text{ nach } (b.\,45) =$$

$$= \left(U.\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\right)\left(U.\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = Uq'\ Uq.$$

Weil

$$Tq'q = Tq'\ Tq = Tq\ Tq' = Tqq'$$

so gilt die einfache Formel

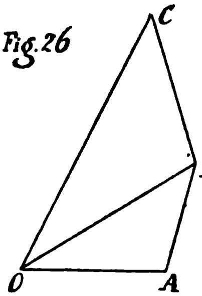
$$Tq'q = Tqq' \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (b.\,48)$$

Weil aber $Uq'\ Uq$ nicht $Uq\ Uq'$ gleich kommt, so ist

$$Uqq' \gtrless Uq'q.$$

43. Wenn die Quaternionen q' und q einander gleich sind, so wollen wir qq durch q^2 ersetzen, und sagen der Quaternion q sei mit zwei potenzirt.

Fig. 26



Die geometrische Bedeutung des Symbols q^2 ist leicht zu veranschaulichen. Es sei in der Figur 26

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}.$$

Construirt man in derselben Ebene auf OB das Dreieck OBC $\backsim \triangle$ OAB, so ist

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OB} = \mathrm{OB} : \mathrm{OA} = q$$

und

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = qq = q^2.$$

Statt $T(q^2)$ wollen wir $T.q^2$ schreiben. Nach (b. 47) wird sodann

$$\left.\begin{array}{l} T.q^2 = (Tq)^2 = Tq^2 = Nq \text{ nach } (b.\ 7) \\ U.q^2 = (Uq)^2 = Uq^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (b.\ 49)$$

wobei die letztere Gleichung zugleich aussagt, dass wir bei $(Uq)^2$ die Klammern fortlassen wollen.

Ein weiterer besonderer Fall ist derjenige, dass q' und q reciprok zu einander sind. Es ist sodann

$$q\frac{1}{q} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB}} = 1 \text{ und } \frac{1}{q}q = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}} = 1 \quad . \quad (b.\ 50)$$

Setzen wir voraus, dass $q = Kq'$. Es wird sodann

$$q'Kq' = Tq'\ TKq'\ Uq'\ UKq' \text{ nach } (b.\ 46) =$$

$$= Tq'\ Tq'\ Uq'\ \frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 10). = (Tq')^2 \text{ nach } (b.\ 50)$$

oder kürzer

$$qKq = Tq^2 = Nq \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 51)$$

Ebenso findet man

$$(Kq)q = Nq.$$

44. Wenn nach der Vollziebung de Operation $q'q$ noch ein Skalar x wirkt, so wollen wir dies schreiben $xq'q$. Wir werden nun die nachstehenden Sätze beweisen

$$xq'q = (xq')q = q'(xq) = q'qx \ldots\ldots\ldots (b.\ 52)$$

Denn wenn wir wieder die Figur 25 betrachten, so ist

$$xq'q = x\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\ \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \left(x\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\right)\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = (xq')q$$

$$xq'q = x\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OC}}{x.\mathrm{OB}}\ \frac{x.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\ \frac{x.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \text{ nach Art. } 29 =$$

$$= \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}\left(x\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right) = q'(xq)$$

$$xq'q = x(q'q) = (q'q)x \text{ nach } (b.\ 18^*) = q'qx.$$

45. Wir wollen jetzt die Aufeinanderfolge der Operationen $\frac{1}{q'}$ und $\frac{1}{q}$ näher ins Auge fassen und dadurch die Formel nachweisen

$$\frac{1}{q'q} = \frac{1}{q}\frac{1}{q'} \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 53)$$

Es sei $q=\frac{\beta}{\alpha}$, $q'=\frac{\gamma}{\beta}$, so hat man auch $\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{1}{q'}=\frac{\beta}{\gamma}$, und $q'q=\frac{\gamma}{\alpha}$. Es wird deshalb

$$\frac{1}{q}\frac{1}{q'}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{1}{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{1}{q'q}$$

womit der Beweis geliefert ist.

Wir können aber den Studirenden nicht genug darauf aufmerksam machen diesen Beweis, so wie die vorangegangenen und nachfolgenden, wie nachstehend zu lesen:

Es führe q den Vektor α in β, q' den Vektor β in γ über, so wird $\frac{1}{q}$ den Vektor β in α und $\frac{1}{q'}$ den Vektor γ in β überführen und auch wird $q'q$ den Übergang von α nach γ vollziehen. Man kann hieraus schlieszen, dass $\frac{1}{q}\frac{1}{q'}$ zuerst die Überführung von γ in β und nachher von β in α vermittelt, d. h. auch die Überführung von γ in α. Dasselbe tut aber auch $\frac{1}{q'q}$ und somit ist $\frac{1}{q'q}=\frac{1}{q}\frac{1}{q'}$.

Eine einfache, sehr wichtige Formel ergibt sich bei der Betrachtung von $K.q'q$, einen Ausdruck, den wir wieder der Kürze halber statt $K(q'q)$ setzen. Es ist nämlich

$$K.q'q=\frac{T.q'q}{U.q'q} \text{ nach } (b.\,24)=\frac{Tq'\,Tq}{Uq'\,Uq} \text{ nach } (b.\,47)=$$
$$=Tq'\,Tq\,\frac{1}{Uq'\,Uq} \text{ nach } (b.\,23)=Tq'Tq\,\frac{1}{Uq}\,\frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\,53)=$$
$$=\frac{Tq}{Uq}\,\frac{Tq'}{Uq'} \text{ nach } (b.\,52)=Kq.Kq' \text{ nach } (b.\,24).$$

oder kürzer

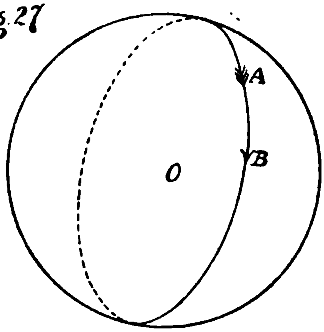
$$K.q'q=Kq.Kq' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,54)$$

46. Es gibt eine sehr einfache Darstellungsweise des Versors eines Quaternions, die wir im Folgenden mehrmals bedürfen werden, und die wir deshalb hier kurz erwähnen wollen.

Wenn ein Quaternion q gegeben ist, $q=\mathrm{OB}:\mathrm{OA}$, so kann man stets aus dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O der beiden Vektoren eine Kugel beschreiben mit einem Radius, dessen Länge der Längeneinheit gleich kommt. Eine solche Kugel wollen wir eine Einheitskugel nennen. Dieselbe schneide die Vektoren OA und OB in den Punkten A_1 und B_1. Wenn wir sodann einen gröszten Kreis durch A_1 und B_1 bringen, so wird der Punkt A_1 des Vektors OA, bei der Drehung nach OB, den Bogen A_1B_1 dieses gröszten Kreises beschreiben und der Versor des Quaternions ist bekannt, sobald dieser Bogen gezeichnet vorliegt, weil sodann unmittelbar $Ax.q$ und $\angle q$ gefunden werden können. Man sagt deshalb der Bogen A_1B_1 stelle den Versor des Quaternions OB : OA dar und man nennt diesen Bogen den Versorbogen A_1B_1.

Damit $Ax.q$ unzweideutig aus diesem Versorbogen hergeleitet werden kann, ist notwendig, dass die Richtung bezeichnet werde, nach welcher die Drehung den Bogen entlang erfolgt, und dieselbe werde im Folgenden durch einen dem Bogen hinzugefügten Pfeil oder durch die Reihenfolge der Buchstaben erkannt. Es ist deshalb der Versorbogen AB verschieden von BA.

Fig. 27



Wenn z. B. in der Figur 27 der Versorbogen AB gegeben ist, so errichte man im Mittelpunkte O der Kugel eine Senkrechte zur Ebene des gröszten Kreises AB nach beiden Seiten hin und stelle sich an *die* Seite der Ebene, von welcher aus gesehen der Pfeil in positiver Richtung (entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr) rundläuft. Jeder Punkt auf der Einheitskugeloberfläche bezeichnet einen Einheitsvektor, nämlich denjenigen, aus O nach diesem Punkte gezogen.

Zwei Versorbogen auf der nämlichen Kugeloberfläche sind einander gleich, wenn dieselben gleiche und in gleicher Richtung durchlaufene Theile eines gröszten Kreises sind. Im Folgenden werden wir den Versorbogen AB mit $\widehat{AB}$ bezeichnen.

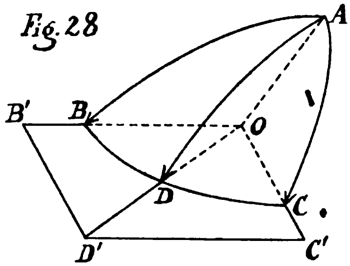
47. Mit Hülfe der Versorbogen wollen wir uns jetzt den

Versor der Summe und des Produktes zweier willkürlichen Quaternionen veranschaulichen.

Auf der Oberfläche der Einheitskugel um O sei der Bogen AB $= Uq$, AC $= Uq'$, so führt q einen Vektor aus der Richtung OA nach der Richtung OB über, und ebenso vollzieht q' die Überführung eines Vektors aus der Richtung OA nach der Richtung OC. Wenn die gegebenen Versorbogen nicht von einem Punkte ausgehen, so kann man dieselben längs der grösten Kreise, von denen sie Teile sind, bewegen lassen, bis einer der Schnittpunkte der grösten Kreise der gemeinschaftliche Anfangspunkt der Bogen wird.

Wenn $q = \mathrm{OB'} : \mathrm{OA}$ und $q' = \mathrm{OC'} : \mathrm{OA}$ so wird $q + q' = \mathrm{OD'} : \mathrm{OA}$, wobei OD′ ein Diagonal des Parallelogramms ist, auf OB′ und OC′ beschrieben. Die Gerade OD′ liegt somit in der Ebene B′OC′, und diese Ebene ist dieselbe wie die Ebene BOC; es folgt hieraus, dass OD′ den Bogen BC des grösten Kreises durch B und C schneiden muss, z. B. in D. Der Bogen AD wird somit $U(q + q')$ darstellen.

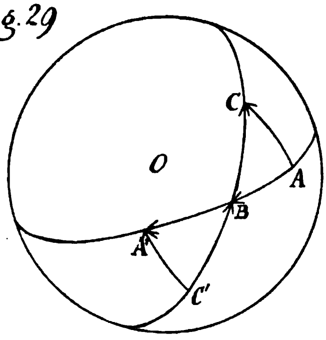
Fig. 28



Die Lage des Punktes D in BC ist, wie unmittelbar ersichtlich, von der Grösze der Tensoren von q und q' wesentlich abhängig. Nur wenn $Tq = Tq'$, fällt D in die Mitte des Bogens BC.

Wie wir vorher sahen, (Art. 38) ist $Uq + Uq'$ im allgemeinen nicht ein Versor und es kann dieser Ausdruck deshalb auch nicht als Versorbogen dargestellt werden.

Fig. 29



Wir wenden uns jetzt zur Darstellung von $Uq'q$ und Uqq' (Fig. 29) und werden dadurch den wichtigen Satz erhalten, dass im allgemeinen

$$U.q'q \gtrless U.qq' \quad . \quad (b.\ 55)$$

oder $$Uq'\,Uq \gtrless Uq\,Uq'.$$

Es führe Uq den Vektor OA nach OB über und Uq' den Vektor OB nach OC, so wird $Uq'Uq$ OA nach OC bringen, oder: wenn $Uq = \frown{AB}$, $Uq' = \frown{BC}$, so ist

$$Uq'Uq = \frown{AC}.$$

Nehmen wir $\frown{C'B} = \frown{BC}$ und $\frown{BA'} = \frown{AB}$, so kann auch leicht die Operation $Uq\,Uq'$ dargestellt werden. Denn Uq' führt sodann OC′ nach OB, Uq weiter OB nach OA′, sodass $Uq\,Uq'$ den Vektor OC′ nach OA′ führt, oder kürzer

$$Uq\,Uq' = \frown{C'A'}.$$

Es ist nunmehr unmittelbar ersichtlich, dass $\frown{C'A'}$ und $\frown{AC'}$ nicht Bogen eines einzigen gröszten Kreises sein können; denn enthielte der gröszte Kreis, durch C und C′ gebracht, auch A und A′, so würde der Bogen AA′ den grözten Kreis CC′ entlang fallen d. h. es würden die gegebenen Quaternionen in derselben Ebene operiren, ein Ergebnis, das mit der Voraussetzung, q und q' seien willkürlich, streitig ist.

Nach Art. 44 muss somit $\frown{AC} \gtrless \frown{C'A'}$ sein, und deshalb auch $Uq'\,Uq \gtrless Uq\,Uq'$.

Weil die sphaerischen Dreiecke BAC und BA′C′ congruent sind, so stimmen die Bogen AC und C′A′ wohl an Grösze überein.

Man kann somit allgemein sagen:

$$\angle\, U.q'q = \angle\, U.qq', \text{ aber } Ax.U.q'q \gtrless Ax.U.qq' \quad . \; . \quad (b.\ 56)$$

Und weil die Tensoren an die Drehungen nichts ändern können, so ist auch

$$\angle\, q'q = \angle\, qq' \text{ und } Ax.\, q'q \gtrless Ax.\, qq' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 57)$$

Hiermit ist zugleich gezeigt, dass

$$qq' \gtrless q'q$$

oder in Worten der wichtige Satz:

Die Multiplikation zweier Quaternionen ist in Bezug auf die Faktoren *nicht* commutativ.

Wenn jedoch die Quaternionen q und q' in einer und derselben Ebene wirken, oder complanar sind, so können die Faktoren des Produktes mit einander umgetauscht werden, oder kurz:

Wenn $q \,|||\, q'$[1], so ist $qq' = q'q$ . . . . (b. 58)

Dieser Satz ist aus dem Vorigen und der Figur 27 zu entnehmen; man ersieht ausserdem, dass in diesem Falle
$Ax.(qq') = Ax.q = Ax.q' = Ax.(q'q)$, $\angle(qq') = \angle q + \angle q' = \angle(q'q)$.

Haben wir in dieser Weise gezeigt, dass im allgemeinen Ungleichheit besteht zwischen qq' und $q'q$, so kann man auch schlieszen, dass

$$\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\beta} \gtrless \frac{\gamma}{\alpha}$$

sein muss, weil nach der Definition

$$\frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ist. Wir richten die besondere Aufmerksamkeit des Studirenden auf dieses Ergebnis.

48. Wenn die Multiplikation zweier Quaternionen eine nicht commutative Operation ist, so muss bei drei und mehr Factoren dasselbe gelten. Dabei wird allgemein unter $qq'q''q'''$ verstanden, dass an einen Vektor erst der Quaternion q''' operirt, sodann an den resultirenden Vektor q'', nachher an den neuen Vektor q' und schlieszlich q an das zuletzt erhaltene Resultat. Ganz anders als mit dem commutativen Princip, verhält es sich mit dem associativen.

Beschränken wir uns zunächst auf Produkte, welche aus drei Faktoren bestehen, z. B. $qq'q''$. Der Bedeutung nach ist dieser Ausdruck identisch mit $q(q'q'')$.

Wir wollen nun weiter zeigen, dass auch die Gleichung gilt

$$qq'q'' = (qq')q'' \quad . . . . (b. 59)$$

d. h. dass man gleich gut mit dem Operator q auf das Symbol $q'q''$, als mit dem Operator (qq') auf das Symbol q'' operiren kann.

Weil

$$\begin{aligned} qq'q'' &= q\,(Tq'Tq''\,Uq'Uq'') \text{ nach } (b.\ 46) = \\ &= Tq'Tq''q(Uq'Uq'') \text{ nach } (b.\ 52) = \\ &= Tq'Tq''Tq\ UqUq'Uq'' \end{aligned}$$

und

$$(qq')q'' = (TqTq'\ UqUq')q'' \text{ nach } (b.\ 46) =$$

1) Das Zeichen $|||$ druckt nach Hamilton die Complanarität von Vektoren oder Quaternionen aus.

$$= TqTq'(UqUq')q'' \text{ nach } (b.\,52) =$$
$$= TqTq'(UqUq')Tq''Uq'' \text{ nach } (b.\,5) =$$
$$= TqTq'Tq''(UqUq')Uq'' \text{ nach } (b.\,52),$$

während die Tensorfaktoren nach dem Vorhergehenden ($b.$ 18**) commutativ sind, so haben wir nur zu zeigen, dass

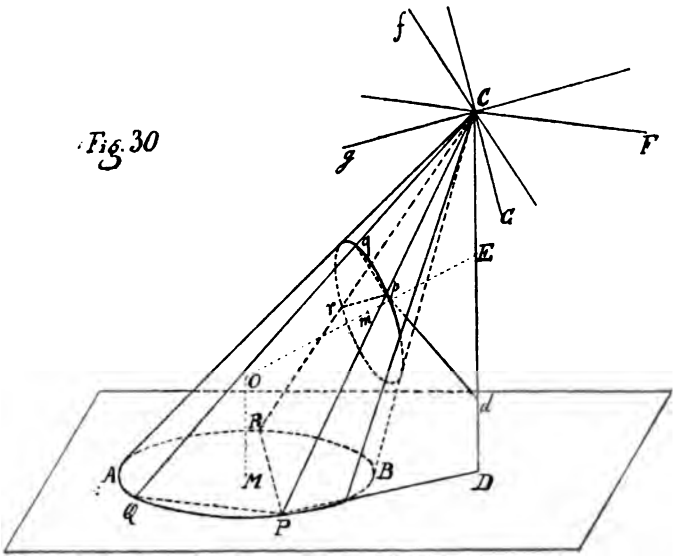
$$UqUq'Uq'' = (UqUq')Uq'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,60)$$

und dieser Beweis ist von Hamilton mit Hülfe einiger Eigenschaften der sphaerischen Kegelschnitte gegeben worden.

Wir wollen deshalb den Beweis dieser Eigenschaften voranschicken.

49. Es sei in der Figur 30 der Kreis M die Grundfläche

Fig. 30



eines schiefen Kegels, dessen Scheitel in C liege.

Ziehen wir aus C die Seitenlinien des Kegels, z. B. CP und bestimmen wir auf diesen Geraden Punkte p, die der Relation

$$CP.Cp = \text{constant.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,61)$$

Genüge leisten, so ist der Ort der Punkte p leicht zu finden.

Wenn wir nämlich das Lot CD auf die Ebene der Grundfläche des Kegels fallen lassen, und in der Ebene PCD aus p eine Senkrechte zu CP errichten, welche CD in d schneide, so ist $\triangle Cpd \backsim \triangle CPD$, und dadurch $Cp : CD = Cd : CP$ oder in Verbindung mit (*b.* 61)

$$CD.Cd = \text{constant}.$$

Wenn der Punkt P den Kreis M entlang sich bewegt, so ändert sich auch die Stelle des Punktes p; es bleibt jedoch der Schnittpunkt von CD mit der Senkrechten pd zu CP ungeändert, woraus unmittelbar sich folgern lässt, dass der Punkt p auf der Oberfläche einer Kugel sich bewegt, deren Durchmesser Cd, deren Mittelpunkt deshalb die Mitte E von Cd ist.

Denken wir uns weiter eine Kugel O, auf welcher der Kreis M ein kleiner Kreis ist und die durch einen der Punkte p geht, so muss die Kugeloberfläche auch alle anderen Punkte p enthalten, weil für alle Punkte dieser Kugelfläche

$$CP.Cp = \text{Constant}.$$

Der Ort der Punkte p ist deshalb der Durchschnitt der beiden Kugeln O und E, somit ein Kreis m, welcher auf der Kegelfläche liegt.

Natürlich ist jeder Schnitt parallel diesem Kreise m ebenfalls ein Kreis, und somit ist der Satz bewiesen:

Bei jedem schiefen kreisförmigen Kegel sind zwei Reihen paralleler kreisförmiger Durchschnitte vorhanden.

Wenn man durch den Scheitel C zwei Ebenen anbringt, parallel diesen zweien Reihen kreisförmiger Durschschnitte, so werden dieselben die **cyclischen Ebenen des Kegels** genannt.

Wir denken zwei neue Seitenlinien CQ und CR des Kegels gezogen und die Ebenen CPQ und CPR angebracht; CQ und CR mögen den kreisförmigen Durchschnitt durch p in q und r bzhw. schneiden.

Es seien CF und Cf die Durchschnittslinien der Ebene CPQ mit den beiden cyclischen Ebenen; dieselben sind, wie unmittelbar einleuchtend, parallel zu PQ und pq bzhw.

Weil PQpq ein in einem Kreise beschriebenes Viereck ist (es liegen nämlich die Punkte PQpq auf einer Kugel und in einer Ebene) so ist

$$\angle Cqp = \angle CPQ$$

und man kann dann weiter erhalten

$$\angle Cqp = \angle QCf,\ \angle CPQ = \angle PCF$$

und hierdurch

$$\angle QCf = \angle PCF \text{ . . . . } (b.\ 62)$$

Wenn in gleicher Weise CG und Cg die Durchschnittsgeraden der Ebene CPR mit den beiden cyclischen Ebenen sind, sodass

$$CG \parallel PR \text{ und } Cg \parallel pr$$

so ist, wie bei der vorigen Gleichung

$$\angle RCg = \angle PCG \text{ . . . . } (b.\ 62^*)$$

Auch ist

$$\angle QPR = \angle FCG \text{ und } \angle qpr = \angle fCg \text{ . . . } (b.\ 63)$$

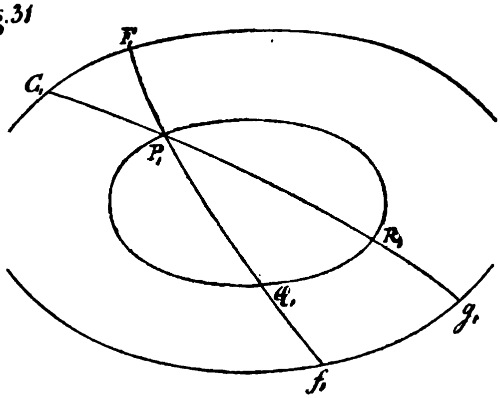
Wenn man dann weiter die Geraden CQ und CR ungeändert lässt, CP jedoch den Teil der Seitenfläche des Kegels zwischen CQ und CR beschreiben lässt, so bleiben die Winkel QPR und qpr constant. Während CF, Cf, CG, Cg fortwährend sich ändern, müssen jedoch, den Gleichungen ($b.$ 63) zufolge, die Winkel FCG und fCg, jeder für sich, constante Grösze behalten.

Diesen Satz und den durch die Gleichung ($b.$ 62) ausgesprochenen wollen wir nun auf einen sphaerischen Kegelschnitt übertragen.

Ein **sphaerischer Kegelschnitt** ist der Durchschnitt eines schiefen kreisförmigen Kegels mit einer Kugel, deren Mittelpunkt in dem Scheitel des Kegels liegt.

Die Durchschnittsgeraden dieser Kugel mit den beiden cyclischen Ebenen des Kegels werden die **cyclischen Bogen** des Kegelschnittes genannt.

Fig. 31



In der Figur 31 ist ein sphaerischer Kegelschnitt mit dessen beiden cyclischen Bogen gezeichnet. Es seien $P_1 Q_1 R_1$ die Punkte, wo der sphaerische Kegelschnitt von den Seitenlinien CP, CQ, CR bzhw. des Kegels, F_1, f_1, G_1, g_1 die Punkte, in denen die cyclischen Bogen von den Geraden CF, Cf, CG, Cg geschnitten werden.

Weil CP, CQ, CF, Cf und ebenfalls CP, CR, CG, Cg in einer Ebene enthalten sind, so müssen die Punkte P_1, Q_1; F_1, f_1 und ebenso P_1, R_1, G_1, g_1 in einem gröszten Kreise der Kugel um C liegen.

Die Gleichungen (*b.* 62) und (*b.* 62*) sagen nunmehr aus, dass

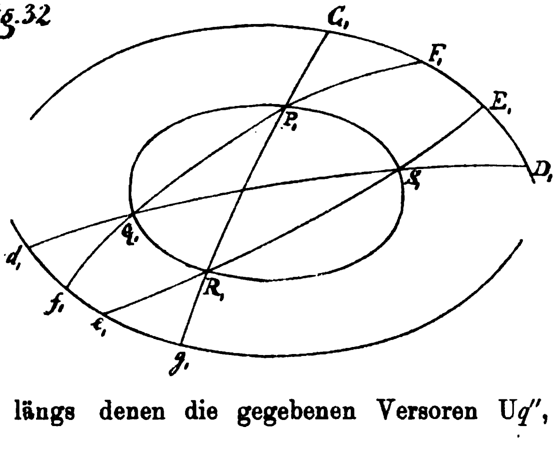
$$\widehat{Q_1 f_1} = \widehat{F_1 P_1} \text{ und } \widehat{R_1 g_1} = \widehat{G_1 P_1}$$

und dasselbe gilt für die Abschnitte eines jeden durch P gehenden gröszten Kreises.

Nach der Gleichung (*b.* 63) und dem daraus Hervorgehenden muss weiter, wenn die Punkte $Q_1 R_1$ constant erhalten werden und P_1 den sphaerischen Kegelschnitt entlang sich bewegt, jeder der Abschnitte $f_1 g_1$ und $F_1 G_1$ der cyclischen Bogen constant bleiben.

50. Wir wollen diese Sätze dazu verwenden, die Gleichung (*b.* 60), welche das associative Princip für Versorenmultiplikation ausspricht, darzutun. Zu diesem Zwecke seien in der Figur 32 auf der Einheitskugel die gröszten Kreise $D_1 G_1$, $G_1 g_1$, $d_1 g_1$

Fig. 32



gegeben, längs denen die gegebenen Versoren Uq'', Uq', Uq

wirken, sammt den Gröszen der Winkel dieser Versoren. Wir tragen nun ab

$$Uq'' = \widehat{F_1G_1}, \quad Uq' = \widehat{G_1P_1},$$

so ist

$$Uq'Uq'' = \widehat{F_1P_1}.$$

Verlängern wir nun den Kreis G_1P_1, bis derselbe den Kreis des Versors Uq in g_1 schneidet, und nehmen wir

$$\widehat{R_1g_1} = \widehat{G_1P_1} = Uq'$$

und

$$\widehat{g_1e_1} = Uq$$

so wird $\widehat{R_1e_1}$ den Versor $UqUq'$ darstellen.

Wir wählen weiter die Kreise F_1G_1 und g_1e_1 als cyclische Bogen eines durch P_1 gehenden sphaerischen Kegelschnitts. Es ist dieser letztere dadurch vollständig bestimmt; denn wenn man durch P_1 alle grösztcn Kreise zieht, wie z. B. G_1g_1, und jedesmal auf denselben einen Punkt R_1 so bestimmt, dass $\widehat{R_1g_1} = \widehat{G_1P_1}$, so wird der Punkt R_1 den fraglichen Kegelschnitt beschreiben.

Wenn wir nachher den Bogen F_1P_1 verlängern, bis derselbe in Q_1 den Kegelschnitt, in f_1 den cyclischen Bogen g_1e_1 schneidet, so hat man nach dem ersten Satze der sphaerischen Kegelschnitte

$$\widehat{Q_1f_1} = \widehat{F_1P_1} = Uq'Uq''.$$

Man kann sodann

$$\widehat{f_1d_1} = \widehat{g_1e_1} = Uq$$

abtragen, und erhält dadurch

$$\widehat{Q_1d_1} = Uq(Uq'Uq'').$$

Es lässt sich weiter sehr leicht zeigen, dass der Schnittpunkt S_1 der Kreise d_1Q_1, e_1R_1 ein Punkt des sphaerischen Kegelschnitts sein muss. Denn wäre dies nicht der Fall und schnitte d_1Q_1 den Kegelschnitt in S, so könnten wir SR_1 ziehen, welcher sodann nicht mit S_1R_1 zusammenfallen könnte. Es würde daher auch SR_1 den cyclischen Bogen nicht in e_1, sondern in einem andern Punkte e schneiden. Weil aber P_1 und S auf dem Kegelschnitt liegen, so wäre nach dem zweiten Satze

$$\widehat{g_1 f_1} = \widehat{e d_1} \quad \text{oder} \quad \widehat{g_1 e} = \widehat{f_1 d_1},$$

während $\widehat{f_1 d_1}$ gleich $\widehat{g_1 e_1}$ genommen ist. Es muss somit e mit e_1, d. h. auch S mit S_1 zusammenfallen.

Nach dem ersten Satze ist weiter, da wir nun wissen, dass S_1 auf dem Kegelschnitt liegt:

$$\widehat{D_1 S_1} = \widehat{Q_1 d_1} = Uq(Uq'Uq'') \text{ und } \widehat{E_1 S_1} = \widehat{R_1 e_1} = UqUq' \quad . \; (b. 64)$$

Und dem zweiten Satze zufolge ist, wenn P_1, S_1 als constant, Q_1, R_1 als variabel betrachtet werden.

$$\widehat{E_1 G_1} = \widehat{D_1 F_1}$$

und deshalb auch

$$\widehat{D_1 E_1} = \widehat{F_1 G_1} = Uq''.$$

Der Bogen $\widehat{D_1 S_1}$, aus $\widehat{D_1 E_1}$ und $\widehat{E_1 S_1}$ entstanden gedacht, stellt somit auch $(UqUq')Uq''$ vor, und durch die Verknüpfung dieses Resultats mit $(b. 64)$ wird erhalten:

$$Uq(Uq'Uq'') = (UqUq')Uq''$$

51. Nachdem hiermit die Frage nach der Gültigkeit des associativen Princips bei Produkten, welche drei Faktoren enthalten, bejahend entschieden ist, können wir dasselbe leicht auf Produkte, welche aus mehr als drei Faktoren bestehen, ausdehnen.

Es können nämlich in jedem Produkte zwei auf einander folgende Factoren durch einen einzigen Quaternion, das Produkt derselben, ersetzt werden. Nehmen wir z. B. den Satz

$$qq'q''q'''q^{\text{IV}} = q(q'q'')q'''q^{\text{IV}}$$

Weil $q'''q^{\text{IV}}$ als ein einziger Quaternion betrachtet werden kann, so ist nach dem vorigen Artikel

$$q'q''q'''q^{\text{IV}} = (q'q'')q'''q^{\text{IV}}$$

und nachher mit q an beide Seiten operirend, entsteht unser Satz.

Es können aber auch drei aufeinanderfolgende Factoren durch ihr Produkt ersetzt werden, z. B.

$$qq'q''q''' = (qq'q'')q'''.$$

Denn

$$qq'q''q''' = q(q'q'')q''' = \{q(q'q'')\}q''' = \{qq'q''\}q'''.$$

52. Wir sind jetzt zu dem Quotienten zweier Quater-

nionen q und q' angelangt. Wir stellen dafür die nachfolgende Definition auf:

Anstatt $q\frac{1}{q'}$ wollen wir schreiben $\frac{q}{q'}$ oder $q:q'$; in Zeichen

$$\frac{q}{q'} = q\frac{1}{q'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b. 65)$$

und wir sagen der Quaternion q werde durch q' dividirt, wobei q der Zähler, q' der Nenner, $\frac{q}{q'}$ der Quotient heiszt.

Weil q und $\frac{1}{q'}$ Quaternionen sind, so muss nach Art. 39 $\frac{q}{q'}$ oder der Quotient zweier Quaternionen auch ein Quaternion sein.

Man kann zuerst den nachstehenden Satz beweisen:

Der Quotient $\frac{q}{q'}$ zweier Quaternionen ist ein Quaternion, der *durch* q' multiplicirt, q als Produkt ergibt.

Es sei nämlich $q = \frac{\beta}{\alpha}$, $q' = \frac{\gamma}{\alpha}$, sodass vorausgesetzt wird, dass q und q' auf denselben Nenner reducirt sind, wie nach Art. 35 stets möglich ist. Dadurch wird $\frac{1}{q'} = \frac{\alpha}{\gamma}$ und

$$\frac{q}{q'} = q\frac{1}{q'} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (b. 45).$$

Es ist jedoch weiter

$$\frac{q}{q'}q' = \frac{\beta}{\gamma}\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b. 45) = q. \quad \ldots\ldots \quad (b. 66)$$

und hiermit ist unser Satz bewiesen.

Aus der Definition erhellt auch sogleich:

$$\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (b. 45). \quad \ldots\ldots \quad (b. 67)$$

Oder in Worten: der Quotient zweier Quaternionen mit gleichem Divisor ist dem Quotienten der Zähler gleich.

Wenn man $\frac{q}{q'}$ *mit* q' multiplicirt, so ist im allgemeinen das Produkt *nicht* q. Denn es ist bei den obigen Voraussetzungen

$$q = \beta : \alpha, \quad q' = \gamma : \alpha.$$

$$q' \frac{q}{q'} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\beta}{\gamma}$$

und dieser Ausdruck ist nicht derselbe wie $\frac{\beta}{\alpha}$.

In derselben Weise schlieszt man, dass, weil nach der Definition $\frac{q}{q'} = q \frac{1}{q'}$, die Ungleichheit bestehen muss

$$\frac{q}{q'} \gtrless \frac{1}{q'} q \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 68)$$

Einige wenigen Formeln mögen noch hinzugefügt werden:

$$T\frac{q}{q'} = T\left(q\frac{1}{q'}\right) = Tq\, T\frac{1}{q'} \text{ nach } (b.\ 47) =$$

$$= Tq \frac{1}{Tq'} \text{ nach } (b.\ 8) = \frac{Tq}{Tq'} \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 69)$$

$$U\frac{q}{q'} = U\left(q\frac{1}{q'}\right) = Uq\, U\frac{1}{q'} \text{ nach } (b.\ 47) =$$

$$= Uq \frac{1}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 8) = \frac{Uq}{Uq'} \text{ nach } (b.\ 59). \quad (b.\ 70)$$

$$K\frac{q}{q'} = K\left(q\frac{1}{q'}\right) = K\left(\frac{1}{q'}\right) Kq \text{ nach } (b.\ 54) =$$

$$= \frac{1}{Kq'} Kq \text{ nach } (b.\ 14) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 71)$$

Nehmen wir wieder die Bezeichnung auf

$$q = \beta : \alpha, \quad q' = \gamma : \alpha$$

so ist

$$\frac{1}{\frac{q}{q'}} = \frac{1}{\frac{\beta}{\gamma}} \text{ (siehe oben)} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 67) = \frac{q'}{q} \ \ldots \quad (b.\ 72)$$

Noch wollen wir den besonderen Fall $q' = Kq$ erwähnen. Es wird

$$\frac{q}{Kq} = q \frac{1}{Kq} = Tq\, Uq \frac{1}{\frac{Tq}{Uq}} \text{ nach } (b.\ 24) =$$

$$= Tq\, Uq \frac{Uq}{Tq} \text{ nach } (b.\ 72) = (Uq)^2 \ldots\ldots \quad (b.\ 73)$$

und für den letzteren Ausdruck kann noch Uq^2 oder $U.q^2$ gesetzt werden nach (b. 49).

Ein letzter Satz ist der nachstehende: Ein Quotient zweier Quaternionen bleibt ungeändert, wenn Dividendus und Divisor *durch* denselben Quaternion multiplicirt werden, oder in Zeichen

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'q''}{qq''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 73^*)$$

Denn es ist

$$\frac{q'q''}{qq''} = q'q'' \frac{1}{qq''} \text{ nach der Definition} = q'q'' \frac{1}{q''} \frac{1}{q} \text{ nach } (b.\ 53)$$

$$= q'\left(q'' \frac{1}{q''}\right)\frac{1}{q} \text{ nach Art. 49} = q' \frac{1}{q} = \frac{q'}{q}.$$

Ein besonderer Fall der Gleichung ($b.\ 73^*$) ist

$$\frac{x}{q} = \frac{xq''}{qq''}.$$

Man ersieht leicht, dass der Satz nicht gültig bleibt, wenn Zähler und Nenner *mit* demselben Quaternion multiplicirt werden.

Auch ist

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{q'}{q''}}{\frac{q}{q''}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 73^{**})$$

weil nach ($b.\ 73^*$)

$$\frac{q'}{q} = \frac{q' \frac{1}{q''}}{q \frac{1}{q''}} = \frac{\frac{q'}{q''}}{\frac{q}{q''}}.$$

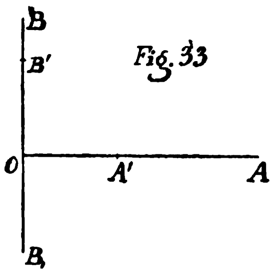
53. Rechte Quaternionen. Eine besonders wichtige Art der Quaternionen ist diejenige, bei welcher $\angle q = \frac{\pi}{2}$. Ein solcher Quaternion, dessen Winkel recht ist, soll ebenfalls recht genannt werden; mehrere rechten Quaternionen werden im Folgenden mit r, r', r'' .... bezeichnet.

Wenn ausserdem der Tensor des Quaternions der Einheit gleich ist, so haben wir es mit einem rechten Radial zu tun.

Mit geringer Mühe wird man ersehen, dass der Reciproke und der Conjugirte eines rechten Quaternions ebenfalls recht sind, und dass auch das nämliche für einen Ausdruck der Form xr (x Skalar) gilt.

Wir wollen nun zuerst zeigen

$$U\frac{1}{r} = -Ur \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b.\,74^*)$$



In der Figur 33 sei

$$r = \mathrm{OB} : \mathrm{OA},$$

und

$$T.\mathrm{OA}' = T.\mathrm{OB}' = 1;$$

wenn wir BO verlängern, und

$$T.\mathrm{OB}_1 = 1$$

nehmen, so ist

$$U\frac{1}{r} = \frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OB}'} = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}'} = -\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}'} = -Ur.$$

Ist r ein rechter Radial, so kann man einfach schreiben

$$\frac{1}{r} = -r.$$

Wie unmittelbar aus den Definitionen erfolgt, gilt die Formel

$$Kr = -r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b.\,74)$$

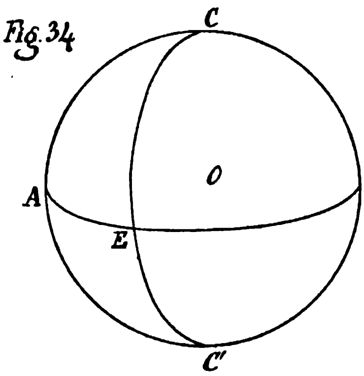
und die allgemeine Formel $K.q'q = KqKq'$ ($b.$ 54) geht demnach über in

$$K.r'r = rr' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b.\,75)$$

Denn es wird nach ($b.$ 74)

$$K.r'r = KrKr' = -r.-r' = (-1)(-1)rr' \text{ nach } (b.\,52) = rr'.$$

Wir wollen die Formel ($b.$ 75) auch noch durch eine Figur veranschaulichen.



Es seien (Fig. 34)

$$\widehat{\mathrm{AC}} = Ur, \; \widehat{\mathrm{CE}} = Ur',$$

so dass

$$\widehat{\mathrm{AC}} = \widehat{\mathrm{CE}} = \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält dadurch nach Art. 45

$$\widehat{\mathrm{AE}} = Ur.Ur'$$

Es ist aber $\widehat{\mathrm{AE}}$ der reciproke oder auch der conjugirte Versor von EA und dieser Bogen kann als das Produkt der Versoren $\widehat{\mathrm{EC'}}$, $\widehat{\mathrm{C'A}}$ betrachtet werden, während

$$\widehat{\mathrm{EC'}} = \widehat{\mathrm{C'E}} = Ur', \ \widehat{\mathrm{C'A}} = \widehat{\mathrm{AC}} = Ur.$$

Es wird deshalb

$$\frac{1}{Ur'\,Ur} = K.(Ur'.Ur) = Ur.Ur'.$$

Und hieraus erhält man weiter:

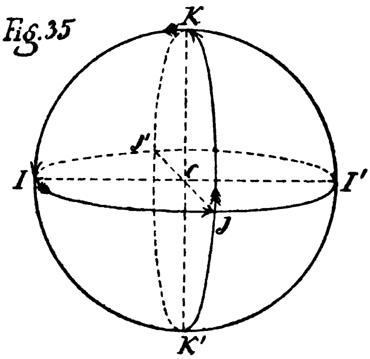
$$K.r'r = K(Tr'\,Tr\,Ur'\,Ur) \doteq Tr'\,Tr K.Ur'\,Ur \text{ nach } (b.\,22)$$
$$= Tr'\,Tr\,Ur\,Ur' \text{ nach der zuletzt bewiesenen Gleichung}$$
$$= rr'.$$

Man ersieht hieraus zugleich, dass wenn der Winkel zwischen den Ebenen der Quaternionen r und r' ein rechter ist, der Versor $\widehat{\mathrm{AE}}$ von rr' und deshalb auch der Quaternion rr' selbst recht wird.

54. Wir werden später häufig einem System dreier rechten Radiale, so construirt, dass die Ebenen von je zwei dieser Radiale unter sich rechtwinklig sind, begegnen, das wir deshalb hier einigen einfachen Betrachtungen unterwerfen.

Hamilton bezeichnet die drei rechten Radiale mit den Symbolen i, j, k.

Fig. 35



Dieselben mögen durch die drei Versorbogen

$\widehat{\mathrm{JK}}$, $\widehat{\mathrm{KI}}$, $\widehat{\mathrm{IJ}}$ (Fig. 35)

veranschaulicht werden und dazu möge man annehmen, OI sei die Achse des Versors $\widehat{\mathrm{JK}}$, OJ diejenige des Versors $\widehat{\mathrm{KI}}$, endlich OK die Achse des Versors $\widehat{\mathrm{IJ}}$.

Durch diese Annahmen ist das System der rechten Radiale vollständig bestimmt. Wir führen noch die Gegenpunkte I′, J′, K′ der Punkte I, J, K auf der Einheitskugel ein. Man erhält sodann die nachstehenden einfachen Formeln

$$i = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OJ}} = \frac{\mathrm{OJ'}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{OK'}}{\mathrm{OJ'}} = \frac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OK'}},$$

$$j = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OK}} = \frac{\mathrm{OK'}}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{OI'}}{\mathrm{OK'}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OI'}},$$

$$k = \frac{OJ}{OI} = \frac{OI'}{OJ} = \frac{OJ'}{OI'} = \frac{OI}{OJ'}.$$

Dadurch erhält man weiter:

$$\frac{1}{i} = \frac{OJ}{OK} = -\frac{OJ'}{OK} = -i, \quad \frac{1}{j} = \frac{OK}{OI} = -\frac{OK'}{OI} = -j,$$

$$\frac{1}{k} = \frac{OI}{OJ} = -\frac{OI'}{OJ} = -k$$

oder kurz

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{j} = -j, \quad \frac{1}{k} = -k. \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 76)$$

$$i^2 = ii = \frac{OJ'}{OK}\,\frac{OK}{OJ} = \frac{OJ'}{OJ} \text{ nach } (b.\ 45) = -1,$$

$$j^2 = jj = \frac{OK'}{OI}\,\frac{OI}{OK} = \frac{OK'}{OK} \text{ nach } (b.\ 45) = -1,$$

$$k^2 = kk = \frac{OI'}{OJ}\,\frac{OJ}{OI} = \frac{OI'}{OI} \text{ nach } (b.\ 45) = -1,$$

oder kurz

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1. \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 77)$$

$$jk = \frac{OK'}{OI}\,\frac{OI}{OJ'} = \frac{OK'}{OJ'} \text{ nach } (b.\ 45) = i,$$

$$ki = \frac{OI'}{OJ}\,\frac{OJ}{OK'} = \frac{OI'}{OK'} \text{ nach } (b.\ 45) = j,$$

$$ij = \frac{OJ'}{OK}\,\frac{OK}{OI'} = \frac{OJ'}{OI'} \text{ nach } (b.\ 45) = k,$$

oder kurz

$$jk = i, \quad ki = j, \quad ij = k \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 78)$$

$kj = K.jk$, nach ($b.$ 75) $= Ki$, nach ($b.$ 78) $= -i$, nach ($b.$ 74);
$ik = K.ki$, nach ($b.$ 75) $= Kj$, nach ($b.$ 78) $= -j$, nach ($b.$ 74),
$ji = K.ij$, nach ($b.$ 75) $= Kk$, nach ($b.$ 78) $= -k$, nach ($b.$ 74),
oder kurz

$$kj = -i, \quad ik = -j, \quad ji = -k. \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 79)$$

$ijk = i(jk) = ii$ nach ($b.$ 78) $= -1$ nach ($b.$ 77),
$jki = j(ki) = jj$ nach ($b.$ 78) $= -1$ nach (b 77),
$kij = k(ij) = kk$ nach ($b.$ 78) $= -1$ nach ($b.$ 77),
oder kurz

$$ijk = jki = kij = -1 \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 80)$$

Cyclische Umtauschung der Faktoren ändert demnach das Symbol ijk nicht.

$jik = j(ik) = j(-j)$ nach ($b.$ 79) $= -j^2 = 1$ nach ($b.$ 76),
$ikj = i(kj) = i(-j)$ nach ($b.$ 79) $= -i^2 = 1$ nach ($b.$ 76) u.s.w.

Acyclische Umtauschung der Faktoren des Symbols ijk ändert das Zeichen.

Noch wird weiter

$$
\begin{aligned}
&iij = (ii)j = -j, \\
&iji = i(ji) = i(-k) = -ik = j, \\
&jii = ji^2 = -j; \\
&i^2j^2k^2 = iijjkk = -iijj = +ii = -1, \\
&(ijk)^2 = (ijk)(ijk) = (-1)(-1) = +1.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$(ijk)^2 \gtrless i^2j^2k^2.$$

Diese Resultate zu benutzen werden wir später mehrmals Gelegenheit haben.

55. Wir kommen nunmehr zur Einführung einer Grösze, die von Hamilton als eine der wichtigsten des Quaternionencalcüls erkannt worden ist und welche später bei unsren Rechnungen eine wichtige Rolle spielen wird.

Im Art. 28 sahen wir, dass die Achse eines Quaternions als ein Vektor unbestimmter Länge zu betrachten sei.

Bei einem rechten Quotienten r nimmt Hamilton einen Vektor in der Richtung $Ax.r$, dessen Tensor gleich Tr ist. Der so bestimmte Vektor ist der Index des rechten Quaternions genannt und mit Ir bezeichnet.

Wir erhalten sodann den wichtigen Satz:

Ein rechter Quaternion ist durch seinen Index ganz bestimmt.

Denn es ist durch die Richtung des Index $Ax.r$, durch den Tensor des Index Tr bestimmt, während $\angle r = \frac{\pi}{2}$, und diese Gröszen bestimmen nach Art. 28 den Quaternion vollständig.

Es folgt hieraus, dass zwei rechte Quaternionen mit gleichen Indices einander gleich sein müssen, oder

Wenn $Ir = Ir'$, so ist auch $r = r'$, und umgekehrt . ($b.$ 81)

Man wird auch leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formel ersehen

$$I.xr = xIr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 62)$$

wenn x ein positiver oder negativer Skalar ist. Denn weil für positives x die in xr enthaltene Drehung mit der in r vorhandenen übereinstimmt, muss nur der Tensor des Index geändert werden, und das Resultat dieser Operation wird durch xIr ausgedrückt. Bei negativem x ist die in xr enthaltene Drehung der in r enthaltenen entgegengesetzt; es ist jedoch in diesem Falle auch xIr entgegengesetzt zu Ir.

Ein besonderer Fall der Formel (b. 82) ist

$$I(-r) = -Ir,$$

und nach (b. 74) kann man die hierin vorkommenden Gröszen zusammenstellen mit $I(Kr)$, wie nachstehend

$$IKr = I(-r) = -Ir \quad \text{(b. 83)}$$

Weil

$U\frac{1}{r} = -Ur$ (nach den Formeln (b. 8) und (b. 74)) so ist

$I\frac{1}{r}$ ein Vektor, dessen Richtung derjenigen des Vektors Ir entgegengesetzt ist; weiter ist

$$TI\frac{1}{r} = T\frac{1}{r} = \frac{1}{Tr} = \frac{Tr}{Nr} = \frac{TIr}{Nr}.$$

Man erhält demnach die Formel

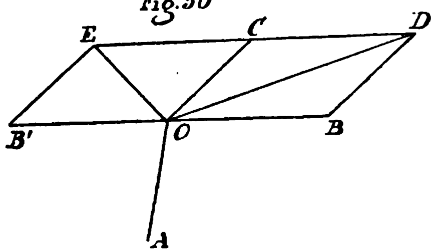
$$I\frac{1}{r} = -\frac{Ir}{Nr} \quad \text{(b. 84)}$$

Noch wird

$$IUr = UIr \quad \text{(b. 85)}$$

Denn IUr ist ein Vektor, senkrecht zur Ebene des Quaternions r, dessen Tensor 1 ist, und dasselbe gilt von UIr.

Fig. 36



56. Wir fassen weiter die Summe zweier rechten Quaternionen näher ins Auge.

In der Figur 34 sei OA ⊥ OB und OA ⊥ OC. Wir setzen voraus, die zwei rechten Quaternionen seien auf denselben Nenner OA reducirt, und man habe dadurch erhalten

$$r = OB : OA, \quad r' = OC : OA.$$

Es ist sodann

$$r + r' = (\mathrm{OB} + \mathrm{OC}) : \mathrm{OA} = \mathrm{OD} : \mathrm{OA}.$$

Weil aber $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$ und $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OC}$, so ist auch $\mathrm{OA} \perp \mathrm{OD}$.

Es folgt hieraus der Satz:

Die Summe zweier rechten Quaternionen ist ein rechter Quaternion.

Weil

$$r' - r = r' + (-r)$$

und $-r$ ein rechter Quotient ist, so wird auch $r' - r$, d. h. die Differenz zweier rechten Quaternionen, ein rechter Quaternion sein. Ist in der Figur 36

$$\mathrm{OB}' = -\mathrm{OB},$$

so ist nach (*b.* 32)

$$r' - r = (\mathrm{OC} - \mathrm{OB}) : \mathrm{OA} = \{\mathrm{OC} + (-\mathrm{OB})\} : \mathrm{OA} =$$
$$= (\mathrm{OC} + \mathrm{OB}') : \mathrm{OA} = \mathrm{OE} : \mathrm{OA},$$

wie man leicht nachweist.

Es kann dieser Satz unschwer verallgemeinert werden zum nachfolgenden:

Wenn x, x', $x''\ldots$ positive oder negative Skalare, r, r' $r''\ldots$ rechte Quaternionen sind, so wird

$$xr + x'r' + x''r'' + \ldots$$

ein rechter Quotient sein.

Es sind nämlich, wie in Art. 53 schon erwähnt ist, xr, $x'r'$, $x''r''\ldots$ rechte Quaternionen. Nach dem ersten und dem zweiten Satze dieses Artikels ist sodann auch $xr + x'r'$ ein rechter Quotient; nach denselben Sätzen wird deshalb auch $xr + x'r' + x''r''$ ein rechter Quaternion sein, u. s. w.

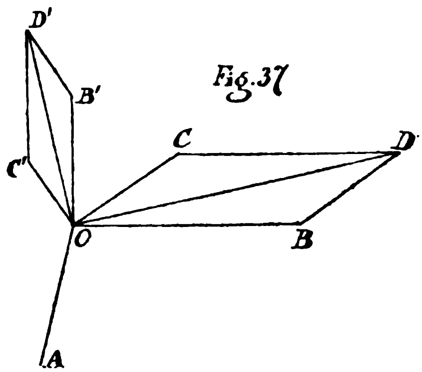


Fig. 37

57. In der Figur 37 sei $\mathrm{OB} : \mathrm{OA} = r$, $\mathrm{OC} : \mathrm{OA} = r'$, $\mathrm{OB}' = Ir$, $\mathrm{OC}' = Ir'$, d. h. $T.\mathrm{OB}' = Tr$, $T.\mathrm{OC}' = Tr'$ und

$\mathrm{OB}' \perp$ zur Ebene AOB,

$\mathrm{OC}' \perp$ zur Ebene AOC.

Es mögen weiter die Parallelogramme OBDC, OB'D'C' construirt werden.

Die Geraden OC′, OD′, OB′, OC, OD, OB sind sämtlich senkrecht zu OA und liegen deshalb in einer Ebene.

Die Dreiecke D′B′O und DBO sind ähnlich; denn es ist

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{B'D'} = T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OC}' = Tr : Tr' = \frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}} : \frac{T.\mathrm{OC}}{T.\mathrm{OA}},$$

oder

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{B'D'} = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OC} = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{BD}$$

und

$$\angle \mathrm{D'B'O} = \angle \mathrm{DBO}.$$

Es folgt hieraus erstens, dass die Winkel D′OB′ und DOB einander gleich sein müssen, und weil OB′ ∥ OB, muss sodann auch OD ⊥ OD′ oder OD′ ⊥ zur Ebene DOA sein. Es folgt aber weiter aus der Ähnlichkeit der Dreiecke D′B′O, DBO

$$T.\mathrm{OD}' : T.\mathrm{OD} = T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OB} = T\,\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} : T.\mathrm{OB} = 1 : T.\mathrm{OA},$$

oder

$$T.\mathrm{OD}' = T.\,\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}.$$

Der Vektor OD′ ist nach diesen beiden Ergebnissen der Index des rechten Quotienten OD : OA, oder in Zeichen

$$\mathrm{OD}' = I\,\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}$$

$$\mathrm{OB}' + \mathrm{OC}' = I.\left(\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}\right)$$

$$Ir + Ir' = I(r + r'). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,86)$$

Es ist dies eine ungemein wichtige Formel; dieselbe drückt aus, dass bei der Addition von rechten Quotienten die Summe der Indices der beiden Quotienten dem Index der Summe gleich ist. Weil aber aus dem Index der Summe diese Summe selbst unmittelbar bekannt ist, so pflegt man zu sagen:

Um rechte Quotienten zu addiren, braucht man nur die Indices derselben zu addiren.

Es ist nunmehr leicht hieraus herzuleiten, dass derselbe Satz auch bei der Subtraction rechter Quotienten gültig bleibt, denn man erhält

$I(r - r') = I[r + (-r')]$ nach $(b.\,31)$ $= Ir + I(-r')$ nach $(b.\,86)$,
$\qquad = Ir + (-Ir')$ nach $(b.\,83)$ $= Ir - Ir'$ nach $(b.\,31)$,

oder kurz

$$I(r - r') = Ir - Ir' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 87)$$

Von nicht wenigerer Wichtigkeit ist der nachfolgende Satz:

Der Quotient zweier rechten Quaternionen ist dem Quotienten ihrer Indices gleich, oder in Zeichen

$$\frac{r}{r'} = \frac{Ir}{Ir'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\ 88)$$

Wir werden diesen Satz leicht mit Hülfe der Figur 38 beweisen können, in der

$$r = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \ r' = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}, \ Ir = \mathrm{OB}', \ Ir' = \mathrm{OC}'.$$

r und r' sind somit auf gleichen Nenner reducirt worden. Es ist nämlich

$$\frac{r}{r'} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} : \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} \text{ nach } (b.\ 67).$$

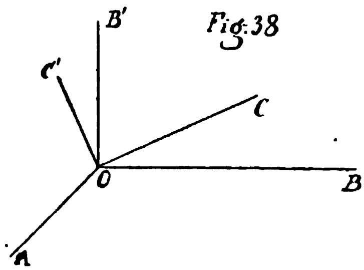


Fig. 38

Die Geraden OB, OC, OB′, OC′, sind sämtlich in einer Ebene senkrecht zu OA enthalten; und weil noch

$$\mathrm{OB}' \perp \mathrm{OB}, \ \mathrm{OC}' \perp \mathrm{OC},$$

so ist

$$\angle \mathrm{B'OC'} = \angle \mathrm{BOC}.$$

Weiter erfolgt wie bei der Figur 35

$$T.\mathrm{OB}' : T.\mathrm{OC}' = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OC}.$$

Die Dreiecke B′OC′, BOC sind somit ähnlich und liegen in derselben Ebene. Nach Art. 29 erhält man dadurch

$$\frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OC}'} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}$$

oder

$$\frac{Ir}{Ir'} = \frac{r}{r'}.$$

Weil das Produkt zweier Indices für uns noch keinen Sinn hat, so können wir die Gültigkeit desselben Satzes bei der Multiplication nicht einer Untersuchung unterwerfen.

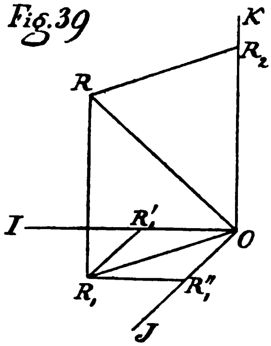
58. Eine sehr wichtige Folge des durch die Gleichung ($b.$ 86) ausgesprochenen Princips ist die nachstehende:

Jeder rechte Quaternion kann als Summe dreier unter sich rechtwinkligen rechten Quotienten dargestellt werden.

Wir fassen zu diesem Zwecke wieder die Bezeichnungen des Artikels 54 auf, wo wir die drei rechten Radiale i, j, k einführten. Wie wir schon in jenem Artikel erörterten, sind dieselben so gewählt, dass wenn

$$i = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OJ}}, \; j = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OK}}, \; k = \frac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OI}}$$

Fig. 39



zugleich OI die Achse von i, OJ von j, OK von k ist.

Nehmen wir auszerdem an

$$T.\mathrm{OI} = T.\mathrm{OJ} = T.\mathrm{OK} = 1,$$

so stellen OI, OJ, OK bzhw. die Indices der rechten Quotienten i, j, k dar, oder

$$\mathrm{OI} = \mathrm{I}i, \; \mathrm{OJ} = \mathrm{I}j, \; \mathrm{OK} = \mathrm{I}k \quad . \; . \; (b.\, 89)$$

Es sei nunmehr ein willkürlicher rechter Quaternion r gegeben. Wir construiren Ir und wählen dazu O als Anfangspunkt, sodass wir erhalten:

$$\mathrm{OR} = Ir.$$

Zieht man $\mathrm{RR_1} // \mathrm{KO}$, und in der Ebene ROK noch $\mathrm{RR_2} // \mathrm{R_1O}$, so ist

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OR_1} + \mathrm{OR_2}.$$

Indem man weiter $\mathrm{R_1R_1}'' // \mathrm{IO}$ und $\mathrm{R_1R_1}' // \mathrm{JO}$ zieht, erhält man

$$\mathrm{OR_1} = \mathrm{OR_1}' + \mathrm{OR_1}''$$

und durch die Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OR_1}' + \mathrm{OR_1}'' + \mathrm{OR_2}.$$

Es kann aber gesetzt werden:

$$\mathrm{OR_1}' = x.\mathrm{OI}, \; \mathrm{OR_1}'' = y.\mathrm{OJ}, \; \mathrm{OR_2} = z.\mathrm{OK},$$

wenn x, y, z drei positive oder negative Skalare bedeuten, und somit wird

$$\mathrm{OR} = x.\mathrm{OI} + y.\mathrm{OJ} + z.\mathrm{OK}$$

oder

$$\begin{aligned} Ir &= xIi + yIj + zIk \text{ nach } (b.\, 89) \\ &= Ixi + Iyj + Izk \text{ nach } (b.\, 82) \\ &= I(xi + yj + zk) \text{ nach } (b.\, 86) \end{aligned}$$

und schlieszlich nach (b. 81)

$$r = xi + yj + zk \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,90)$$

Wenn man in diesem Ausdrucke die Skalare x, y, z sich ändern lässt, so kann man dadurch alle möglichen rechten Quotienten erhalten.

Es ist weiter leicht ersichtlich, dass durch die Verlängerung der Geraden IO, JO, KO der ganze Raum in acht Teile geteilt wird und dass die Zeichen der Gröszen x, y, z bestimmen, in welchem dieser acht Teile Ir liegt.

59. Die in den Artikeln 53—55 gefundenen Sätze setzen uns in den Stand ein neues sehr wichtiges Theorem der Multiplikation rechter Quaternionen darzutun. Es wird dasselbe durch die Gleichungen (b. 91) (b. 92) (b. 93) ausgesprochen:

$$(r' + r'')r = r'r + r''r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,91)$$

$$r(r' + r'') = rr' + rr'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,92)$$

Beweis der Relation (b. 91): Wenn wir mit r_1 den Reciproken des rechten Quotienten r bezeichnen, d. h. $r = \frac{1}{r_1}$ setzen, so ist

$$(r' + r'')r = (r' + r'')\frac{1}{r} = \frac{r' + r''}{r_1} \text{ nach } (b.\,65) =$$

$$= \frac{I(r' + r'')}{Ir_1} \text{ nach } (b.\,88) = \frac{Ir' + Ir''}{Ir_1} \text{ nach } (b.\,86) =$$

$$= \frac{Ir'}{Ir_1} + \frac{Ir''}{Ir_1} \text{ nach } (b.\,25) = \frac{r'}{r_1} + \frac{r''}{r_1} \text{ nach } (b.\,88) =$$

$$= r'\frac{1}{r_1} + r''\frac{1}{r_1} \text{ nach } (b.\,65) = r'r + r''r.$$

Beweis der Relation (b. 92): Weil $r' + r''$ ein rechter Quaternion ist, so hat man die Relationen

$$r(r' + r'') = K.(r' + r'')r \text{ nach } (b.\,75) = K(r'r + r''r) \text{ nach } (b.\,91)$$

$$= K.r'r + K.r''r \text{ nach } (b.\,42) = rr' + rr'' \text{ nach } (b.\,75).$$

Allgemein wird man durch Verknüpfung der Gleichungen (b. 91) (b. 92) finden, wenn r', r'', ..., r_1, r_2 .... rechte Quotienten sind

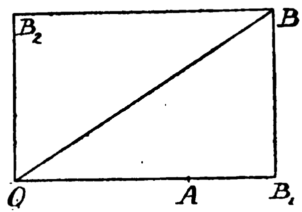
$$(r' + r'' + \ldots)(r_1 + r_2 + \ldots) = \Sigma\, r'r_1 \ldots \quad (b.\,93)$$

wo das Zeichen Σ bedeutet, dass jede der Gröszen r', r''.... durch jede der Gröszen r_1, r_2 .... multiplicirt werden soll.

60. Im Anfange dieses Abschnittes ergab sich die Darstellung eines Quaternions als Produkt der Operationen T und U.

Man kann jedoch auch weiter jeden Quaternion als Summe zweier bestimmten Operationen darstellen, welche durch die Zeichen S und V vertreten werden. Von dieser Darstellung wollen wir in den nächsten Artikeln handeln, und es wird sich daraus eine Menge sehr nützlicher und deshalb wichtiger Beziehungen und Sätze ergeben.

Fig. 40



Betrachten wir den willkürlichen Quaternion $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$ (Figur 40).

Projicirt man OB auf OA mittelst BB_1 und zieht $\mathrm{OB}_2 \mathbin{/\!/\!=} \mathrm{B}_1\mathrm{B}$ so erhält man

$$q = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}_1 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}}{\mathrm{OA}} =$$
$$= \frac{\mathrm{O}_1\mathrm{B} + \mathrm{OB}_2}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}_1}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{OB}_2}{\mathrm{OA}}.$$

Hierdurch ist der Quaternion q dargestellt als die Summe der zwei Quotienten $\mathrm{OB}_1 : \mathrm{OA}$ und $\mathrm{OB}_2 : \mathrm{OA}$.

Der erste is eine positive oder negative Skalargrösze, weil die Richtungen OB_1 und OA entweder zusammenfallen oder einander entgegengesetzt sind. Es wird deshalb dieser Quotient der Skalarteil des Quaternions q genannt und mit Sq bezeichnet.

Der andere Teil ist ein rechter Quotient, wird der Vektorteil des Quaternions q genannt und mit Vq bezeichnet. Es gilt demnach allgemein die Formel

$$q = Sq + Vq \quad \dots\dots\dots\dots \quad (b.\,94)$$

Es ist weiter einleuchtend, dass

$$\text{wenn } q = q',\ Sq = Sq' \text{ und } Vq = Vq' \quad \dots\dots\dots \quad (b.\,95)$$

und das Umgekehrte dieses Satzes ist ebenfalls gültig. (Man sehe auch Art. 67).

Aus den Definitionen ist unmittelbar ersichtlich, dass die zwei nachstehenden Formeln bestehen

$$SVq = 0 \text{ und } VSq = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (b.\,96)$$

61. Wir wenden jetzt unsre Aufmerksamkeit speciell dem Skalarteil zu, und werden dann leicht ersehen, dass

$$\left.\begin{array}{l} Sq > 0\,,\ \text{wenn}\ \angle q < \frac{\pi}{2} \\ Sq = 0\,,\ \text{wenn}\ \angle q = \frac{\pi}{2} \\ Sq < 0\,,\ \text{wenn}\ \angle q > \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (b.\,97)$$

und auch die Umgekehrten dieser Sätze kommen zur Geltung.

Weiter findet man die nachstehenden Beziehungen

1°. $S(Sq)$ oder $S^2q = Sq$ und allgemein $S^n q = Sq$ . . (b. 98)

2°. $TSq = \pm Sq$, je nachdem $\angle q < \frac{\pi}{2}$ oder $\angle q > \frac{\pi}{2}$.

Es folgt dies daraus, dass der Tensor stets positiv sein muss nach Art. 28.

3°. $$Sq = Tq\cos\angle q \ldots\ldots\ldots (b.\,99)$$

Denn mit Hülfe der Figur 40 wird gefunden

$$Sq = \frac{\mathrm{OB_1}}{\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OB_1}}{T.\mathrm{OA}} = \frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}}\,\frac{T.\mathrm{OB_1}}{T.\mathrm{OB}} = Tq\cos\angle q.$$

4°. $$S\frac{1}{q} = \frac{Sq}{Nq} \ldots\ldots\ldots (b.\,100)$$

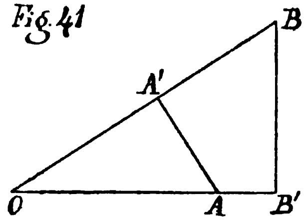
Denn es ist in der Figur 41, wo $\mathrm{AA'} \perp \mathrm{OB}$, $\mathrm{BB'} \perp \mathrm{OA}$,

$$S\frac{1}{q} = S\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB}} = \frac{T.\mathrm{OA'}}{T.\mathrm{OB}} =$$

$$= \frac{T.\mathrm{OA}.T.\mathrm{OB'}}{(T.\mathrm{OB})^2}\ \text{weil}\ \triangle\mathrm{OAA'} \backsim \mathrm{OBB'}$$

$$= \frac{T.\mathrm{OB'}}{T.\mathrm{OA}}\left(\frac{T.\mathrm{OA}}{T.\mathrm{OB}}\right)^2 = \frac{Sq}{Tq^2} = \frac{Sq}{Nq}.$$

Fig. 41



5°. $$SKq = Sq \ldots\ldots\ldots (b.\,101)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von Kq.

6°. $$Sxq = xSq \ldots\ldots\ldots (b.\,102)$$

Es wird nämlich, wenn der Vektor OB geändert wird, die Projection OB′ in demselben Verhältnisse geändert, und deshalb ist:

$$Sxq = S\frac{x.\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{x.\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA}} = x\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA}} = xSq.$$

Als besondere Fälle ergeben sich noch die Formeln

$$S(-q) = -Sq \ldots\ldots\ldots (b.\,102^*)$$
$$Sx = x$$

7°. $$SUq = \cos \angle q \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 103)$$

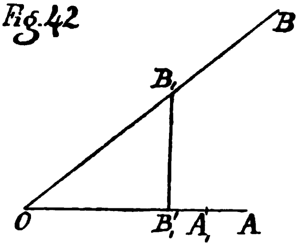
Aus $Sq = Tq \cos \angle q$ ($b.$ 99) lässt sich schlieszen:

$$SUq = TUq \cos \angle Uq.$$

Weil aber $TUq = 1$ und $\angle Uq = \angle q$, so vereinfacht diese Formel sich zu ($b.$ 103).

Dieselbe Formel ist aber auch leicht mit Hülfe der Figur 42 zu ersehen.

Fig. 42



Es sei $OA_1 = U.OA$, $OB_1 = U.OB$ und $B_1B_1' \perp OA$, so wird

$$SUq = \frac{OB_1'}{OA_1} = \frac{T.OB_1'}{T.OB_1} = \cos \angle q.$$

8°. $$SU\frac{1}{q} = SUq \, . \; . \; . \; . \quad (b. 104)$$

Nach ($b.$ 103) wird zunächst

$$SU\frac{1}{q} = \cos \angle \frac{1}{q},$$

und die zweite Seite ist nach ($b.$ 8) $= \cos \angle q = SUq$.

9°. Wenn ein Vektor β auf einen anderen projicirt wird, so ist die Projection $= \left(S\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha$ . . . . ($b.$ 105)

In der Figur 40 z. B. wird die Projection

$$OB_1 = \frac{OB_1}{OA} OA = (Sq)\,\alpha, \text{ wo } q = \frac{\beta}{\alpha}.$$

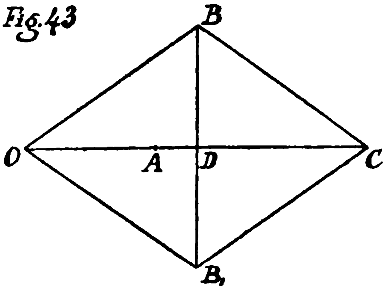
10°. $$KSq = Sq \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 136)$$

Diese Formel ist unmittelbar der Construction des conjugirten Quaternions (Art. 35) zu entnehmen.

11°. $q + Kq = 2\,Sq$ oder symbolisch $1 + K = 2\,S$ oder

$$S = \tfrac{1}{2}(1 + K) \, . \; . \; . \quad (b. 107)$$

Fig. 43



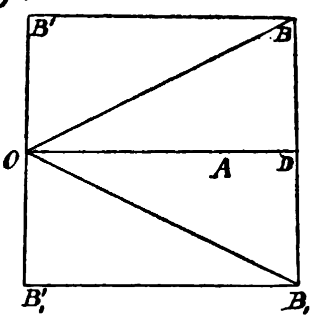
In der Figur 43 wird

$$q + Kq = \frac{OB}{OA} + \frac{OB_1}{OA} = \frac{OC}{OA} = 2\,\frac{OD}{OA} = 2\,Sq.$$

Es ist nämlich das Parallelogramm, auf OB und OB_1 construirt, ein gleichseitiges, dessen Diagonalen die Winkel und auszerdem einander senkrecht halbiren. Die Diagonale OC fällt demnach längs OA und man erhält $OC = 2\,OD$.

Es kann jedoch die Formel (*b*. 107) wie nachstehend bewiesen werden mit Hülfe der Figur 44, und dieser Beweis führt zugleich auf die nützliche Relation (*b*. 108).

Fig. 44



$$Kq = \frac{OB_1}{OA} = \frac{OD + DB_1}{OA} = $$

$$= \frac{OD + OB_1'}{OA} = \frac{OD - OB'}{OA} =$$

$$= \frac{OD}{OA} - \frac{OB'}{OA} = Sq - Vq$$

oder kurz

$$Kq = Sq - Vq. \quad . \ (b. 108)$$

Addirt man diese Formel zu

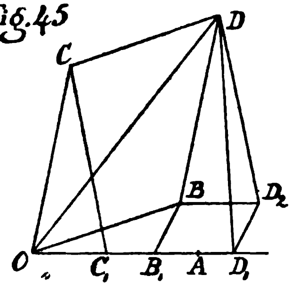
$$q = Sq + Vq,$$

so ergibt sich (*b*. 107).

12°. $$S(q + q') = Sq + Sq' \ldots\ldots\ldots \quad (b. 109)$$

Wir wollen diesen Satz mit Hülfe der Figur 45 dartun. Es sei in derselben $q = OB : OA$, $q' = OC : OA$; wir construiren das Parallelogramm OBDC und projiciren die Punkte B, D, C sämtlich auf OA in B_1, D_1, C_1 bzhw. Die Geraden CC_1, DD_1, BB_1 werden im allgemeinen nicht parallel sein. Weiter ziehen wir $BD_2 \parallel OA$ und projiciren D auf BD_2 in D_2. Es ist sodann $DD_1 \perp OA$, und deshalb $DD_1 \perp BD_2$ und auch ist $DD_2 \perp BD_2$, woraus folgt $BD_2 \perp D_2D_1$ oder $D_2D_1 \parallel BB_1$. Das Viereck $BD_2D_1B_1$ ist somit ein Parallelogramm und $B_1D_1 = BD_2$.

Fig. 45



Es ist aber weiter $\triangle OCC_1 \cong \triangle BDD_2$ ($OC = BD$, $\angle COC_1 = \angle DBD_2$, $\angle CC_1O = \angle DD_2B = \frac{\pi}{2}$) und deshalb $BD_2 = OC_1$; hierdurch wird auch $B_1D_1 = OC_1$. Nun ist noch

$$\mathrm{OD_1 = OB_1 + B_1D_1 = OB_1 + OC_1}$$

und indem durch OA dividirt wird, erhält man hieraus den Satz (b. 109).

Die Formel (b. 109) lässt sich leicht verallgemeinern zur nachstehenden

$$S\Sigma q = \Sigma Sq \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 109^*)$$

z. B. $S(q + q' + q'') = S\{(q + q') + q''\} = S(q + q') + Sq'' =$
$= Sq + Sq' + Sq''$.

13°. $$S(q - q') = Sq - Sq' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 110)$$

$$S(q - q') = S\{q + (-q')\} = Sq + S(-q') =$$
$$= Sq + (-Sq') \text{ nach } (b.\ 102^*) = Sq - Sq'.$$

62. Den Begriff des Skalarteils eines Quaternions wollen wir auch noch dazu verwenden eine unsrer vorher erhaltenen Formeln zu vereinfachen. Es ist dies die Relation (b. 41), welche wir in Art. 40 fanden:

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\, TqTq' \cos \angle \mathrm{B'OB}$$

wenn

$$q = \mathrm{OB : OA} \text{ und } q' = \mathrm{OB' : OA}.$$

Zuerst wollen wir beachten, dass in diesem Falle nach (b. 67)

$$\frac{q}{q'} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} : \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}},$$

wodurch es möglich wird $\angle \mathrm{B'OB}$ durch $\angle \frac{q}{q'}$ oder $\angle \frac{q'}{q}$ zu ersetzen. Wir erhalten dadurch

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\, Tq\, Tq' \cos \angle \frac{q}{q'} \; . \; . \quad (b.\ 111)$$

Es ist jedoch nach (b. 99)

$$S\frac{q}{q'} = T\frac{q}{q'} \cos \angle \frac{q}{q'} = \frac{Tq}{Tq'} \cos \angle \frac{q}{q'}$$

und hiermit geht (b. 111) über in:

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\, Nq' .\, S\frac{q}{q'} \; . \; . \; . \; . \quad (b.\ 112)$$

Man hätte in gleicher Weise erhalten können, indem $\angle \mathrm{B'OB}$ durch $\angle \frac{q'}{q}$ ersetzt würde,

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2\, Nq .\, S\frac{q'}{q}.$$

Die Formel (b. 112) ergibt weiter, indem man beachtet, dass

$$qKq' = q\frac{Nq'}{q'} \text{ nach } (b.24^*) = Nq'\frac{q}{q'} \quad \ldots\ldots (b.113)$$

und deshalb auch

$$S(qKq') = Nq'.S\frac{q}{q'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b.114)$$

$$N(q+q') = Nq + Nq' + 2\,S(qKq') \ldots\ldots (b.115)$$

eine Beziehung, in welcher q und q' umgetauscht werden können.

Als besonderer Fall ergibt sich aus (b. 115), wenn x ein positiver oder negativer Skalar ist

$$N(q+x) = Nq + x^2 + 2\,x\,Sq \ldots\ldots (b.116)$$

und hieraus für einen rechten Quotienten r

$$N(r+x) = Nr + x^2 \ldots\ldots\ldots (b.116^*)$$

63. Wir wollen nunmehr den Vektorteil Vq näher in Betracht ziehen.

Wie unmittelbar aus der Definition dieses Symbols erhellt, ist

$$Ax.Vq = Ax.q \text{ und } \angle\, Vq = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (b.117)$$

Und weil Vq ein rechter Quotient ist, so ist nach (b. 74)

$$KVq = -\,Vq \ldots\ldots\ldots\ldots (b.118)$$

Indem man wieder V^2q statt $V(Vq)$ schreibt, und in analogem Sinne das Symbol V^mq verwendet, ersieht man leicht

$$V^mq = Vq \ldots\ldots\ldots\ldots (b.119)$$

wo m eine ganze Zahl sein soll.

Wir fanden schon bei dem Beweise der Formel (b. 107), dass der Vektorteil des conjugirten Quaternions der Negative des Vektorteils des Quaternions q ist oder

$$VKq = -\,Vq \ldots\ldots\ldots\ldots (b.120)$$

und indem man dieses Resultat mit (b. 118) verknüpft

$$VKq = KVq \ldots\ldots\ldots\ldots (b.121)$$

Die Symbole V, K, nach einander angewandt, sind deshalb commutativ.

Suchen wir $V\frac{1}{q}$ auszudrücken und benutzen wir dazu die Gleichung (b. 24*).

Es wird dadurch gefunden:

$$V\frac{1}{q} = \frac{1}{Nq}\,VKq = -\frac{Vq}{Nq} \text{ oder kurz } V\frac{1}{q} = -\frac{Vq}{Nq}. \quad (b.\,121^*)$$

Es wird weiter

$$Vxq = x\,Vq \quad \dots\dots\dots\dots \quad (b.\,122)$$

Wenn nämlich der Vektor OB geändert wird, so erfährt die projicirende Gerade BB_1 eine Änderung in demselben Verhältnis (Figur 46), und deshalb ist

$$Vxq = V\frac{x.OB}{OA} = \frac{x.OB_2}{OA} = x.\,Vq.$$

Als besonderer Fall ergibt sich noch

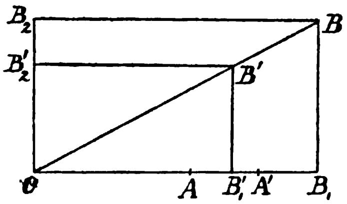
$$V(-q) = -\,Vq \quad \dots\dots\dots\dots \quad (b.\,122^*)$$

Eine sehr wichtige Grösze ist das Symbol UVq. Weil Vq ein rechter Quotient ist in der Ebene von q, so ist UVq ein rechter Radial in dieser Ebene. Nach der Formel (b. 117) und Art. 30 wird

$$Ax.\,UVq = Ax.q \quad \dots\dots\dots\dots \quad (b.\,123)$$

sein.

Fig. 46



Betrachten wir weiter das Symbol VUq (Figur 46). Wenn $q = OB : OA$, und OA′ und OB′ Einheitsvektoren in den Richtungen OA, OB sind, so ist

$$Uq = OB' : OA'$$

und

$$VUq = OB_2' : OA'.$$

Es ist somit VUq kein rechter Radial, sondern ein rechter Quotient in der Ebene des Quaternions q, dessen Achse mit $Ax.q$ zusammenfällt und nur wenn q ein rechter Quotient ist, wird VUq einen rechten Radial vorstellen. Man kann deshalb im allgemeinen die Ungleichheit hinschreiben

$$VUq \gtrless UVq, \text{ ausgenommen wenn } \angle q = \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält nun die beiden nachstehenden Ausdrücke für Vq.

$$Vq = TVq\,UVq = Tq \sin\angle q.UVq \quad \dots \quad (b.\,124)$$

und

$$Vq = Tq\,VUq \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (b.\,125)$$

Die Formel (b. 124) zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass

$$TVq = Tq \sin \angle q \quad \text{. . . . .} \quad (b.\,126)$$

und dies geschieht leicht mit Hülfe der Figur 46. Es ist nämlich

$$TVq = T\frac{OB_2}{OA} = \frac{T.OB_2}{T.OA} = \frac{T.OB}{T.OA}\,\frac{T.OB_2}{T.OB} = Tq \sin \angle q.$$

Der Beweis der Formel (b. 125) ist:

$$Vq = V(Tq\,Uq) = Tq\,VUq \text{ nach } (b.\,122)$$

Aus der Formel (b. 125) in Verbindung mit (b. 16) erfolgt noch

$$TVq = Tq\,TVUq \quad \text{. . . . .} \quad (b.\,127)$$

und indem man diese Formel mit (b. 126) vergleicht, erhält man

$$TVUq = \sin \angle q \quad \text{. . . . .} \quad (b.\,128)$$

ein Resultat, das auch leicht mit Hülfe der Figur 46 verificirt werden kann. Denn es ist

$$VUq = OB_2' : OA'$$

und demnach

$$TV\,Uq = \frac{T.OB_2'}{T.OA'} = \frac{T.OB_2'}{T.OB'} = \sin \angle q.$$

Weil UVq ein rechter Radial ist in der Ebene von q, so muss $(UVq)^2$ bewirken, dass ein Vektor in der Ebene von q eine Drehung um zwei rechte Winkel erfährt, d. h. entgegengesetzte Richtung erhält. Es ist deshalb dieses Symbol mit — 1 identisch oder

$$(UVq)^2 = -1 \quad \text{. . . . .} \quad (b.\,129)$$

und hiermit erhält man leicht

$$(Vq)^2 = (TVq\; UVq)^2 = (TVq)^2\,(UVq)^2 = -(TVq)^2 = -NVq$$

oder, indem man noch Vq^2 als gleichbedeutend mit $(Vq)^2$ annimmt,

$$Vq^2 = (Vq)^2 = -NVq \quad \text{. . . . . . .} \quad (b.\,130)$$

Eine andere sehr nützliche Formel entsteht aus der Verknüpfung der Gleichungen (b. 94) (b. 108) oder

$$q = Sq + Vq, \quad Kq = Sq - Vq.$$

Durch Subtraction wird nämlich erhalten

$$q - Kq = 2\,Vq \text{ oder symbolisch } 1 - K = 2\,V, \text{ oder}$$

$$V = \tfrac{1}{2}(1 - K) \quad \text{. . . . .} \quad (b.\,131)$$

In gleicher Weise kann man die Formeln (b. 99) und (b. 126) combiniren und erhält daraus durch Quadriren und Addiren

$$(Sq)^2 + (TVq)^2 = Tq^2 \quad \ldots\ldots\ldots (b.\,132)$$

Nach (b. 130) ist aber $(TVq)^2$ oder $NVq = -Vq^2$, und somit wird, wenn wir noch die Schreibweise

$$Sq^2 = (Sq)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (b.\,133)$$

einführen, erhalten

$$Sq^2 - Vq^2 = Tq^2 \quad \ldots\ldots\ldots (b.\,134)$$

In andrer Gestalt lautet diese Gleichung

$$Sq^2 = Tq^2 + Vq^2 = Nq - NVq \quad \ldots\ldots (b.\,135)$$

Weil Sq eine skalare Grösze ist, so kann Sq^2 durch NSq ersetzt werden und dadurch geht die vorige Gleichung über in

$$NSq = Nq - NVq$$

oder

$$Nq = NSq + NVq,$$

eine Gleichung, die keineswegs als unmittelbare Folge der Gleichung (b. 94) betrachtet werden kann, weil im allgemeinen

$$N(q+q') \gtrless Nq + Nq'.$$

Es hätte dieselbe jedoch leicht aus (b. 116*) erhalten werden können, indem man darin r durch Vq, und x durch Sq ersetzt hätte.

Noch eine äusserst wichtige Formel ist durch die Combination dreier anderen zu erhalten, nämlich aus (b. 94), (b. 99) und (b. 124). Dieselbe lautet

$$q = Tq\,(\cos \angle q + \sin \angle q . UVq) \quad \ldots\ldots (b.\,136)$$

und kann unmittelbar aus den drei genannten Gleichungen gefolgert werden.

Mit Hülfe der Figur 45, können wir beweisen

$$V(q+q') = Vq + Vq' \quad \ldots\ldots\ldots (b.\,137)$$

Denn es wird

$$V(q+q') = V\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{D_1D}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{D_1D_2} + \mathrm{D_2D}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{B_1B} + \mathrm{C_1C}}{\mathrm{OA}} =$$

$$= \frac{\mathrm{B_1B}}{\mathrm{OA}} + \frac{\mathrm{C_1C}}{\mathrm{OA}} = Vq + Vq'.$$

Es lässt sich diese Formel wieder verallgemeinern zur nachstehenden:

$$V(q+q'+q''+\dots)=Vq+Vq'+Vq''+\dots \text{ oder}$$
$$V\Sigma q=\Sigma Vq \quad \dots\dots\dots\dots (b.\,138)$$

Und weiter kann man erhalten

$$V(q-q')=Vq-Vq' \quad \dots\dots\dots (b.\,139)$$

weil

$$V(q-q')=V\{q+(-q')\}=Vq+V(-q') \text{ nach } (b.\,137)=$$
$$=Vq+(-Vq') \text{ nach } (b.\,122^*)=Vq-Vq'.$$

64. Im Art. 57 hatten wir Gelegenheit zu beweisen, dass die Multiplikation *rechter* Quaternionen in Bezug auf jeden der beiden Faktoren distributiv ist.

In diesem Artikel wollen wir zeigen, dass dieselbe Eigenschaft bei der Multiplikation solcher Quaternionen gültig ist, deren Ebenen eine Gerade gemeinsam ist. Es sind diese Quaternionen collinear genannt worden. Wir setzen voraus im nachfolgenden seien q, q', q'' collineare Quaternionen.

In der Figur 47 mögen $OB:OA=q'$, $OC:OA=q''$ angenommen werden, wo demnach OA ein Vektor in der Richtung der den Ebenen der Quaternionen q' und q'' gemeinsamen Geraden ist. Wir construiren das Parallelogramm OBDC, so wird

$$q'+q''=OD:OA.$$

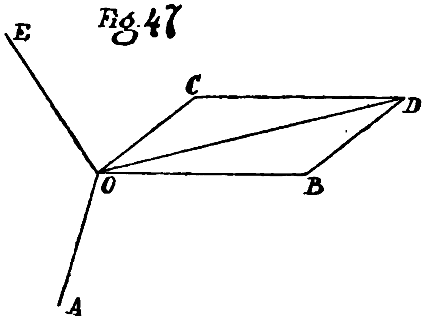
Nun setzen wir weiter voraus, dass q auf den Zähler OA reducirt ist, was, unsrer Voraussetzung der Collinearität gemäsz, stets möglich ist, und es sei demnach

$$q=OA:OE.$$

Es wird hierdurch

$$(q'+q'')q=\frac{OD}{OA}\frac{OA}{OE}=\frac{OD}{OE}=$$
$$=\frac{OB+OC}{OE}=$$
$$=\frac{OB}{OA}\frac{OA}{OE}+\frac{OC}{OA}\frac{OA}{OE}$$

Fig. 47



oder

$$(q'+q'')q=q'q+q''q \text{ wenn } q,\ q',\ q'' \text{ collinear} \quad \dots (b.\,140)$$

Wenn man mit k, k', k'' die Conjugirten der Quaternionen q, q', q'' bzhw. bezeichnet, so sind dieselben ebenfalls collinear, weil ein Quaternion und dessen Conjugirte in derselben Ebene enthalten sind.

Nach (b. 140) gilt deshalb auch der Satz

$$(k' + k'')\,k = k'k + k''k$$

und sodann

$$K(k' + k'')\,k = K(k'k + k''k)$$

Berücksichtigt man nunmehr die Relationen (b. 54), (b. 42), so wird

$$Kk.K(k' + k'') = K.k'k + K.k''k = Kk\,Kk' + Kk\,Kk''$$

oder

$$q(q' + q'') = qq' + qq'' \text{ wenn } q,\ q',\ q'' \text{ collinear} \ldots \quad (b.\,141)$$

Es wird, den Gleichungen (b. 140) (b. 141) zufolge, nun auch ganz allgemein, wenn q', q'', q''', ... q_1, q_2, q_3 .... collineare Quaternionen sind,

$$(q' + q'' + \ldots)(q_1 + q_2 + \ldots) = \Sigma\, q'q_1 \ldots \quad (b.\,142)$$

wo das Zeichen Σ bedeutet, dass jede der Gröszen q', q''.... durch jeden der Quaternionen q_1, q_2.... multiplicirt werden soll.

65. Die Verknüpfung der Resultate des vorigen Artikels mit denen des Art. 57 setzt uns in den Stand zu beweisen, dass auch für willkürliche Quaternionen die drei Relationen stattfinden:

$$(q' + q'')\,q = q'q + q''q \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,143)$$

$$q\,(q' + q'') = qq' + qq'' \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,144)$$

$$(q' + q'' + \ldots)(q_1 + q_2 + \ldots) = \Sigma\, q'q_1 \ldots \quad (b.\,145)$$

Und es wird ausreichen die Formel (b. 143) zu beweisen, weil die beiden anderen Formeln aus jener auf dieselbe Weise hergeleitet werden können, wie die beiden Gleichungen (b. 141), (b. 142) aus (b. 140) hergeleitet worden sind.

Um den Nachweis der Formel (b. 143) zu liefern, fangen wir damit an zu erinnern, dass die Ebene des Skalarteils eines Quaternions unbestimmt ist, sodass man jede willkürliche Ebene dazu wählen kann. Wählt man deshalb als die Ebenen der Gröszen Sq', Sq diejenigen der Vektorteile Vq', Vq, bzhw. so hat man es bei Sq', Vq', Sq, Vq mit vier collinearen Quaternionen zu tun und es wird nunmehr die allgemein gültige Formel erhalten

$$q'q = (Sq' + Vq')(Sq + Vq)$$
$$= Sq'Sq + Sq'Vq + Vq'Sq + Vq'Vq \text{ nach } (b.\ 142)$$

oder weil die Skalarteile mit einander und mit den Vektorteilen commutativ sind

$$q'q = Sq'Sq + Sq'Vq + SqVq' + Vq'Vq \ldots (b.\ 146)$$

Wendet man dieselbe Formel bei $(q' + q'')q$ an, so wird erhalten

$$(q' + q'')q = S(q' + q'')Sq + S(q' + q'')Vq + SqV(q' + q'') +$$
$$+ V(q' + q'')Vq,$$
$$= (Sq' + Sq'')Sq + (Sq' + Sq'')Vq + Sq(Vq' + Vq'') +$$
$$+ (Vq' + Vq'')Vq, \text{ nach } (b.\ 109)\ (b.\ 137)$$
$$= Sq'Sq + Sq''Sq + Sq'Vq + Sq''Vq + SqVq' + SqVq'' +$$
$$+ Vq'Vq + Vq''Vq, \text{ nach } (b.\ 29)\ (b.\ 30)\ (b.\ 91)$$
$$= \{Sq'Sq + Sq'Vq + SqVq' + Vq'Vq\} + \{Sq''Sq +$$
$$+ Sq''Vq + SqVq'' + Vq''Vq\}, \text{ nach } (b.\ 26)\ (b.\ 27)$$
$$= q'q + q''q, \text{ nach } (b.\ 146).$$

Die Relationen (*b.* 143) (*b.* 144) (*b.* 145) sagen aus, dass das distributive Princip bei der Multiplikation von Quaternionen allgemein gültig ist. Es ist dies eine sehr wichtige Errungenschaft.

66. Es mögen in diesem Artikel noch einige Formeln Platz finden, zu denen die Ergebnisse der vorhergehenden Artikel uns führen.

Aus (*b.* 75) oder

$$rr' = K.r'r,$$

erhält man durch beiderseitige Addition von $r'r$

$$rr' + r'r = r'r + K.r'r = (1 + K)\, r'r = 2\, Sr'r \text{ nach } (b.\ 107)$$

oder kürzer

$$S.r'r = \tfrac{1}{2}(rr' + r'r) \ldots\ldots\ldots (b.\ 146)$$

Hätte man zu (*b.* 75) beiderseits $r'r$ nicht addirt, sondern subtrahirt, so wäre entstanden

$$r'r - rr' = r'r - K.r'r = (1 - K)r'r = 2\, V.r'r \text{ nach } (b.\ 131)$$

oder

$$V.r'r = \tfrac{1}{2}(r'r - rr') \ldots\ldots\ldots (b.\ 147)$$

Aus den erhaltenen Formeln (*b.* 146) (*b.* 147) lässt sich auch schlieszen

$$\left.\begin{array}{l} S.r'r = S.rr' \\ V.r'r = -V.rr' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,148)$$

Es seien q, q' wieder willkürliche Quaternionen. Nimmt man von den beiden Seiten der Gleichung (b. 146) die Skalarteile, welche einander gleich sein müssen, und ebenso die Vektorteile, so wird erhalten

$$\left.\begin{array}{l} S.q'q = Sq'Sq + S(Vq'Vq) \\ V.q'q = Sq'Vq + SqVq' + V(Vq'Vq) \end{array}\right\} \ldots \quad (b.\,149)$$

Wenn man in (b. 146) $q' = q$ annimmt, so geht die Gleichung über in

$$q^2 = Sq^2 + 2\,SqVq + Vq^2 \quad \ldots\ldots \quad (b.\,150)$$

oder

$$q^2 = Sq^2 + 2\,SqVq - NVq \quad \text{nach } (b.\,130)$$

und dadurch werden die Gleichungen (b. 149) zu den nachstehenden

$$\left.\begin{array}{l} S.q^2 = Sq^2 - NVq \\ V.q^2 = 2\,SqVq \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (b.\,151)$$

Aus (b. 146) oder

$$q'q = Sq'Sq + Sq'Vq + SqVq' + Vq'Vq$$

und

$$qq' = SqSq' + Sq'Vq + SqVq' + VqVq'$$

erfolgt durch Addition und Subtraction

$$q'q + qq' = 2\,(SqSq' + Sq'Vq + SqVq') + 2\,S(VqVq') \quad \text{nach } (b.146)$$
$$q'q - qq' = Vq'Vq - VqVq' = 2\,V(Vq'Vq) \quad \text{nach } (b.147)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\,(q'q + qq') = SqSq' + Sq'Vq + SqVq' + S(VqVq') \\ \tfrac{1}{2}\,(q'q - qq') = V(Vq'Vq) \end{array}\right\} . \quad (b.\,152)$$

Ein anderer wichtiger Schlusz kann aus (b. 149) gezogen werden. Wenn man darin q' und q mit einander verwechselt und beachtet, dass nach (b. 148)

$$S(Vq'Vq) = S(VqVq'),$$

so erhält man aus der ersten dieser Gleichungen

$$S.q'q = S.qq' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,153)$$

Dasselbe Verfahren, auf die zweite der Gleichungen (b. 149) angewandt, in Verbindung mit (b. 148) ergibt

$$V.q'q \gtrless V.qq' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b.\,154)$$

Die Gleichung (*b.* 153) kann auch auf andre Weise erhalten werden.

Nach (*b.* 99), ist nämlich

$$S.q'q = Tq'q \cos \angle q'q$$
$$S.qq' = Tqq' \cos \angle qq'$$

Die zweiten Seiten sind nach (*b.* 48) (*b.* 57) einander gleich, somit auch die ersten.

67. Die Zerlegung eines Quaternions in einen Skalar- und einen Vektorteil können wir auch dazu verwenden, die Gültigkeit des commutativen und associativen Princips bei der Addition mehrerer Quaternionen darzutun, ein Beweis, welchen wir im Art. 37 hier zu geben versprachen.

Es gilt zu zeigen, dass allgemein

$$\left.\begin{aligned} q+q'+q''+q'''+\ldots &= q+q'''+q'+q''+\ldots \\ q+q'+q''+q'''+\ldots &= q+q'+(q''+q''')+\ldots \end{aligned}\right\} . \quad (b.\ 155)$$

Nach (*b.* 94) ist

$$q+q'+q''+q'''+\ldots = S(q+q'+q''+q'''+\ldots)+V(q+q'+q''+q'''+\ldots)$$

Nun ist jedoch

$$S(q+q'+q''+q'''+\ldots) = Sq+Sq'+Sq''+Sq'''+\ldots \text{ nach } (b.\ 109^*)$$
$$= Sq+Sq'''+Sq'+Sq''+\ldots$$

oder

$$= Sq+Sq'+(Sq''+Sq'''+\ldots)$$

nach (*b.* 29*), wenn hierin die Grösze q durch die Einheit ersetzt wird. Und hierdurch ist weiter

$$\left.\begin{aligned} S(q+q'+q''+q'''+\ldots) &= S(q+q'''+q'+q''+\ldots) \\ \text{oder} \quad &= S[q+q'+(q''+q'''+\ldots)] \end{aligned}\right\} (b.\ 155^*)$$

Weil aber

$$IV(q+q'+q''+q'''+\ldots) = I(Vq+Vq'+Vq''+Vq'''+\ldots)$$

nach (*b.* 138)

$$= IVq+IVq'+IVq''+IVq'''+\ldots$$

nach (*b.* 86)

$$= IVq+IVq'''+IVq'+IVq''+\ldots$$

nach (*a.* 1)

$$= IV(q+q'''+q'+q''+\ldots)$$

und

$$IV(q+q'+q''+q'''+....)=IVq+IVq'+IVq''+IVq'''+....$$
$$=IVq+IVq'+(IVq''+IVq'''+...)$$
nach (a. 2)
$$=IVq+IVq'+IV(q''+q'''+....)$$
nach (b. 86), (b. 138)
$$=IV[q+q'+(q''+q'''+....)]$$
so kann nach (b. 81) geschlossen werden
$$V(q+q'+q''+q'''+....)=V(q+q'''+q'+q''+....)$$
oder
$$=V[q+q'+(q''+q'''+....)]$$
und aus diesen Gleichungen in Verbindung mit (b. 155*) und dem umgekehrten des Satzes (b. 95) folgen die Relationen (b. 155).

68. Zurückführung eines Quaternions auf die viergliedrige Grundform.

Nach allem Bisherigen können wir einen Satz begründen, der unter dem in der Überschrift dieses Artikels enthaltenen Namen bekannt ist und welcher eine so grosze Bedeutung für die Theorie und die Anwendungen hat, dass manchmal die Ansicht ausgesprochen ist, derselbe sei als Definition der Quaternionen zu verwenden. Wir haben indessen vorgezogen eine mehr an die geometrischen Begriffe sich anschliessende Definition zu benutzen.

Unser Ausgangspunkt sei die Gleichung (b. 94)
$$q=Sq+Vq$$
Beachten wir, dass Vq ein rechter Quotient ist, und dass derselbe nach (b. 90) als Summe Vielfächer der drei rechten Radiale i, j, k dargestellt werden kann, so erhält man, indem noch gesetzt wird
$$Sq=w,$$
$$q=w+xi+yj+zk \quad .... \quad (b.\ 156)$$
wo w, x, y, z irgend welche positive oder negative Skalare sein können.

Es ist diesem viergliedrigen Ausdruck gemäsz der Name »Quaternion" entstanden.

69. Es wird seinen Nutzen haben, die wichtigeren der bisher vorgekommenen Gröszen mit Hülfe der eingeführten Skalare w, x, y, z und der rechten Radiale i, j, k auszudrücken;

man erhält dabei nach den Definitionen

1°. $$Sq = w \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 157)$$

2°. $$Vq = xi + yj + zk \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 158)$$

3°. $$TVq = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 159)$$

Denn es ist $TVq = TIVq$ und nach Art. 56 hat IVq die Componenten xIi, yIj, zIk, deren Tensoren x, y, z bzhw. sind; weil diese Componenten sämtlich unter sich rechtwinklig sind, so ist deshalb

$$(TIVq)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Er erfolgt hieraus noch:

$$NVq = x^2 + y^2 + z^2$$

4°. $$Vq^2 = -(x^2 + y^2 + z^2) \text{ nach } (b.\ 130) \quad \ldots \quad (b.\ 160)$$

5°. $$UVq = \frac{Vq}{TVq} = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 161)$$

6°. $$\left.\begin{aligned} Nq &= w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \text{ nach } (b.\ 135) \\ Tq &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b.\ 162)$$

7°. $$Uq = \frac{q}{Tq} = \frac{w + xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 163)$$

8°. $$VUq = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 164)$$

9°. $$\cos \angle q = \frac{Sq}{Tq} = \frac{w}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad \ldots \quad (b.\ 165)$$

10°. $$\frac{1}{q} = \frac{1}{w + xi + yj + zk} = \frac{w - xi - yj - zk}{(w + xi + yj + zk)\,(w - xi - yj - zk)}$$
nach $(b.\ 73^*)$

oder in Übereinstimmung mit $(b.\ 24)$

$$\frac{1}{q} = \frac{w - xi - yj - zk}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \ldots \quad (b.\ 166)$$

Denn es ist

11°. $$Kq = Sq - Vq = w - xi - yj - zk \quad \ldots \quad (b.\ 167)$$

70. Wenn Quaternionen in der viergliedrigen Grundform gegeben sind, so lässt sich deren Summe und deren Differenz leicht in derselben Gestallt angeben. Ist nämlich

$$q = w + xi + yj + zk, \quad q' = w' + x'i + y'j + z'k,$$
$$q'' = w'' + x''i + y''j + z''k, \text{ u. s. w.}$$

so ist nach $(b.\ 168)$ in Verbindung mit $(b.\ 29^*)$

$$q + q' + q'' + \ldots = w + w' + w'' \ldots + (x + x' + x'' + \ldots)\, i + \\ + (y + y' + y'' + \ldots)\, j + \\ + (z + z' + z'' + \ldots)\, k.$$

71. Wenn zwei Quaternionen

$$q = w + xi + yj + zk \text{ und } q' = w' + x'i + y'j + z'k$$

einander gleich sind, so lassen sich hieraus die vier Skalargleichungen folgern:

$$w = w', \; x = x', \; y = y', \; z = z' \quad \ldots\ldots \quad (b.\,168)$$

Denn wenn

$$q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \; q' = \mathrm{OB}' : \mathrm{OA}',$$

so müssen, damit $q = q'$ sein kann, OA, OB, O′A′, O′B′ complanar sein, und weiter

$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'O'A'} \text{ und } T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{O'B'} = T.\mathrm{O'A'}.$$

Fällt man sodann die Senkrechten $\mathrm{BB_1}$, $\mathrm{B'B_1'}$ auf OA, O′A bzhw., so werden die Dreiecke $\mathrm{OBB_1}$, $\mathrm{O'B'B_1'}$ ähnlich sein, weil

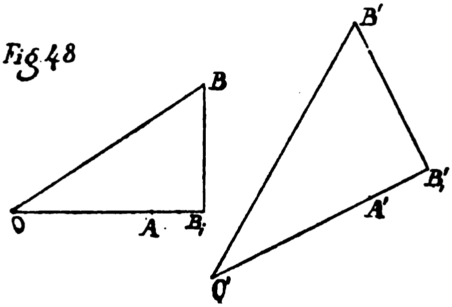
$$\angle \mathrm{BOA} = \angle \mathrm{B'O'A'},$$

$$\angle \mathrm{OB_1B} = \angle \mathrm{O'B'_1B'} = \frac{\pi}{2}$$

und dadurch wird:

$$T.\mathrm{OB_1} : T.\mathrm{O'B_1'} = \\ = T.\mathrm{OB} : T.\mathrm{O'B'} = \\ = T.\mathrm{OA} : T.\mathrm{O'A'}$$

Fig. 48



oder

$$T.\mathrm{OB_1} : T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{O'B_1'} : T.\mathrm{O'A'}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass die Skalarteile der beiden Quaternionen einander gleich sein müssen, oder $w = w'$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathrm{OBB_1}$, $\mathrm{O'B'B_1'}$ folgt aber auch unmittelbar, dass die Vektorteile der beiden Quaternionen $\mathrm{BB_1} : \mathrm{OA}$ und $\mathrm{B'B_1'} : \mathrm{O'A'}$ ebenfalls nicht verschieden sein können, denn es ist

$$\frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OB_1}}\,\frac{\mathrm{OB_1}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{BB_1}}{\mathrm{OB_1}}\,Sq, \quad \frac{\mathrm{B'B_1'}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{B'B_1'}}{\mathrm{OB_1'}}\,Sq'$$

und nach Art. 29 musz $\mathrm{BB_1} : \mathrm{OB_1} = \mathrm{B'B_1'} : \mathrm{OB_1'}$ sein, während auch $Sq = Sq'$.

Es wird deshalb auch die Gleichung stattfinden

$$xi + yj + zk = x'i + y'j + z'k$$

oder

$$(x - x')\,i + (y - y')\,j + (z - z')\,k = 0.$$

Wären nun die letzten drei der Gleichungen (b. 168) nicht gültig, so würde man aus dieser Relation herleiten können:

$$I\,[(x - x')\,i + (y - y')\,j + (z - z')\,k] = 0$$

oder

$$I.(x - x')\,i + I.(y - y')\,j + I.(z - z')\,k = 0 \text{ nach } (b.\,86)$$

oder

$$(x - x')\,Ii + (y - y')\,Ij + (z - z')\,Ik = 0 \text{ nach } (b.\,82)$$

oder endlich mit den Bezeichnungen der Artikel 54, 58:

$$(x - x')\,\mathrm{OI} + (y - y')\,\mathrm{OJ} + (z - z')\,\mathrm{OK} = 0$$

und diese Gleichung würde nach Art. 2 aussagen, dass die drei Einheitsvektoren OI, OJ, OK complanar sind, ein Schlusz mit unsrer Voraussetzung, OI, OJ, OK seien unter sich rechtwinklig, streitig.

Es müssen somit auch die letzten drei der Relationen (b. 168) stattfinden.

72. Eine Anwendung der Einführung der viergliedrigen Grundform kann man finden in einem neuen Beweis der Gültigkeit des associativen Princips bei der Quaternionenmultiplikation.

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk \\ q' &= w' + x'i + y'j + z'k \\ q'' &= w'' + x''i + y'j + z''k \end{aligned}$$

und berechnet mit Hülfe des schon bewiesenen distributiven Princips (Art. 65) die beiden Ausdrücke $q(q'q'')$ und $(qq')q''$, so wird man in der Tat dasselbe Resultat erhalten, wodurch die Identität dieser Ausdrücke dargetan ist.

Wir unterlassen die Berechnung hier; allein wollen wir die Formel für das Produkt zweier Quaternionen, des frequenten Nutzens wegen, hier hinschreiben

$$\begin{aligned} qq' = ww' - xx' - yy' - zz' &+ i\,(w'x + wx' + yz' - y'z) + \\ &+ j\,(w'y + wy' + zx' - z'x) + \\ &+ k\,(w'z + wz' + xy' - x'y) \quad . \; . \; (b.169) \end{aligned}$$

Das Quadrat eines Quaternions im besonderen wird

$$q^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2\,wxi + 2wyj + 2\,wzk. \; . \; . \; (b.\,170)$$

73. Proportionen mit Quaternionen. Wenn wir vier Quaternionen q, q', q'', q''' wählen, die der Relation genügen

$$q : q' = q'' : q''' \text{ oder } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \quad \ldots\ldots \quad (b.\,171)$$

so sollen dieselben proportional genannt werden.

Weil $\frac{q}{q'}$ und $\frac{q''}{q'''}$ Quaternionen siud, so kann nach Art. 29 die Beziehung ($b.$ 171) nur stattfinden, falls

$$T\frac{q}{q'} = T\frac{q''}{q'''} \text{ oder } Tq : Tq' = Tq'' : Tq''' \text{ nach } (b.\,69) \;.\;.\; (b.\,172)$$

und

$$U\frac{q}{q'} = U\frac{q''}{q'''} \text{ oder } Uq : Uq' = Uq'' : Uq''' \text{ nach } (b.\,70) \;.\; (b.\,173)$$

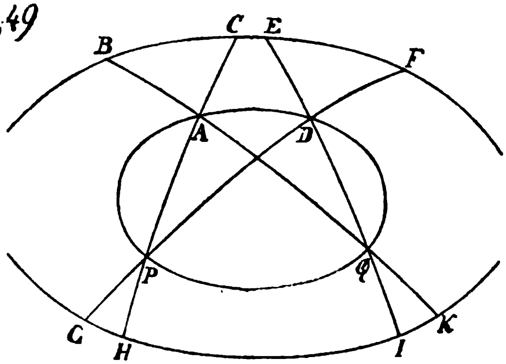
Wir wollen uns in diesem Artikel mit einigen wenigen Eigenschaften dieser Proportionen beschäftigen.

Nach ($b.$ 72) in Verbindung mit dem Satze: wenn $q = q'$, so ist auch $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$, erfolgt aus ($b.$ 171) unmittelbar

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'''}{q''} \text{ wenn } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \;\ldots\ldots\ldots\; (b.\,174)$$

Wenn wir die Einheitskugel, deren wir uns vorher schon bedienten, construirt denken, so sei auf derselben (Figur 49)

Fig. 49



$$\widehat{AB} = Uq\,,\ \widehat{AC} = Uq'$$

und deshalb wird

$$\frac{Uq}{Uq'} = Uq \cdot \frac{1}{Uq'}$$

eine Drehung von C nach A, gefolgt von einer Drehung von A nach B, d. h. den Vektorbogen $\widehat{CB}$ bedeuten. Es sei weiter

$$\widehat{DE} = Uq'', \widehat{DF} = Uq''',$$

so wird

$$Uq'' : Uq''' = \widehat{FE}.$$

Nach der gegebenen Proportionalität der Gröszen q, q', q'', q''' müssen $\widehat{CB}$ und $\widehat{FE}$ Teile eines einzigen gröszten Kreises sein, und $\widehat{CB} = \widehat{FE}$. In der Figur 49 sei dies angenommen. Es wird dadurch auch $\widehat{BE} = \widehat{CF}$ sein.

Wenn wir die Bogen $\widehat{BA}$ und $\widehat{ED}$ verlängern bis über den Schnittpunkt Q derselben hinaus, und ebenso $\widehat{CA}$ und $\widehat{FD}$ über ihren Schnittpunkt P hinaus, so wird ein sphaerischer Kegelschnitt construirt werden können, welcher durch A, D, Q, P geht und von welchem $\widehat{BF}$ einer der cyclischen Bogen ist. Indem man nämlich $\widehat{PH} = \widehat{CH}$ und $\widehat{QK} = \widehat{BA}$ nimmt, werden zwei Punkte H, K erhalten, die einen grösten Kreis bestimmen und es ist leicht ersichtlich, dass der sphaerische Kegelschnitt, dessen cyclische Bogen $\widehat{BF}$ und $\widehat{HK}$ sind, und welcher durch den Punkt A hindurchgeht, auch weiter durch P, Q, D gehen musz; durch P und Q, weil $\widehat{PH} = \widehat{AC}$ und $\widehat{QK} = \widehat{BA}$, durch D wegen des nachstehenden indirekten Beweises.

Gesetzt der Kegelschnitt ginge nicht durch den Punkt D von $\widehat{PF}$, sondern durch einen anderen Punkt D′ desselben Bogens, so könnte man $\widehat{QD'}$ ziehen, welcher $\widehat{BF}$ in E′ schnitte. Es wäre sodann nach Art. 49 $\widehat{CB} = \widehat{FE'}$, während gegeben ist $\widehat{CB} = \widehat{FE}$. Es müssen somit E′ mit E und D′ mit D zusammenfallen.

Aus allem dem schlieszt man

$$\widehat{GP} = \widehat{DF} = Uq''', \widehat{IQ} = \widehat{DE} = Uq'', \widehat{GH} = \widehat{IK}$$

Weil aber

$$\widehat{\mathrm{HP}} = \widehat{\mathrm{AC}} = Uq', \; \widehat{\mathrm{KQ}} = \widehat{\mathrm{AB}} = Uq$$

genommen sind, so lässt die Gleichung

$$\widehat{\mathrm{GH}} = \widehat{\mathrm{IK}}$$

sich wie nachstehend interpretiren:

$$\frac{Uq'''}{Uq'} = \frac{Uq''}{Uq} \text{ wenn } \frac{Uq}{Uq'} = \frac{Uq''}{Uq'''}$$

und weil aus (*b.* 172) nach den Eigenschaften der gewöhnlichen Proportionen folgt:

$$Tq''' : Tq' = Tq'' : Tq,$$

so schlieszt man

$$q''' : q' = q'' : q \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \; . \; . \; . \; . \; (b.\ 175)$$

oder in Worten: Bei einer Quaternionenproportion können die beiden äuszeren Quaternionen umgetauscht werden.

Vergleicht man die Relation (*b.* 175) mit (*b.* 174), statt dessen wir auch schreiben können:

$$q''' : q'' = q' : q$$

so erhält man den Satz:

In einer Quaternionenproportion können die beiden mittleren Quaternionen umgetauscht werden, oder in Zeichen

$$q : q'' = q' : q''' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \; . \; . \; . \; . \; (b.\ 176)$$

Aus den beiden Sätzen (*b.* 175) (*b.* 176) kann man schlieszen, dass im allgemeinen das Produkt der äuszeren Gröszen demjenigen der mittleren nicht gleich kommt.

Denn weil die mittleren Gröszen umgetauscht werden können, so würde man, falls die genannte Eigenschaft gültig wäre, daraus schlieszen, dass auch bei der Quaternionenmultiplikation die Faktoren umgetauscht werden können, was mit dem Vorhergehenden streitig ist.

Aus einer gegebenen Proportion $q : q' = q'' : q'''$ kann man eine jede der Gröszen auflösen, und zwar geschieht dies wie nachstehend:

Aus $\quad \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''}$ folgt $\frac{q}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q'$ oder $q \frac{1}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q'$

oder schlieszlich

$$q = \frac{q''}{q'''} q' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad \ldots\ldots (b.177)$$

Aus $q : q' = q'' : q'''$ folgt nach ($b.$ 176):

$$\frac{q}{q''} = \frac{q'}{q'''}, \text{ oder } \frac{q}{q''} q''' = \frac{q'}{q'''} q''',$$

$$\text{oder } q' = \frac{q}{q''} q''' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad \ldots\ldots (b.178)$$

In derselben Weise findet man

$$q'' = \frac{q}{q'} q''' \text{ und } q''' = \frac{q'}{q} q'' \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . (b.179)$$

Wir schlieszen diesen Artikel und die Betrachtungen über Proportionen mit der Bemerkung, dass die Proportion

$$q : q' = q'' : q'''$$

auch in andrer Gestalt erscheinen kann. So ist z. B. nach ($b.$24*)

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Nq}$$

und deshalb wird

$$\frac{qKq'}{Nq'} = \frac{q''Kq'''}{Nq'''}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} Nq'''.qKq' &= Nq'.q''Kq''' \\ \text{und} \quad Nq''.qKq' &= Nq.q'Kq''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b.180)$$

weil

$$Nq : Nq' = Nq'' : Nq'''.$$

74. Allgemeine Theorie der Potenzen und Wurzeln von Quaternionen.

Wir definiren $(Uq)^n$, wo n eine willkürliche ganze oder gebrochene arithmetische Zahl ist, dadurch, dass wir dieses Symbol als einen Versor betrachten, dessen Achse mit $Ax.q$ übereinstimmt, während sein Winkel dem n-fachen des Drehungswinkels des Quaternions q gleich ist. In Zeichen ist dies

$$Ax.(Uq)^n = Ax.q, \ \angle (Uq)^n = n \angle q \quad \ldots\ldots (b.181)$$

Wenn jedoch n eine negative Zahl sein möchte, z. B. $= -m$, so sei unter $(Uq)^{-m}$ der Reciproke des Quaternions $(Uq)^m$ verstanden, oder

$$(Uq)^{-m} = \frac{1}{(Uq)^m} \ldots\ldots\ldots\ldots (b.\ 182)$$

Nehmen wir weiter durch die Definition an

$$q^n = (Tq)^n\,(Uq)^n = Tq^n\,Uq^n \ldots\ldots (b.\ 183)$$

eine Gleichung, die zugleich aussagt, dass die Klammern bei $(Tq)^n\,(Uq)^n$ im weiteren fortgelassen werden sollen, so erscheint hierdurch die n^{te} Potenz eines Quaternions als ein Quaternion, dessen Achse mit derjenigen von q übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, je nachdem n eine positive oder eine negative Zahl ist, dessen Tensor der n^{ten} Potenz des ursprünglichen Tensors, und dessen Winkel dem n-fachen des ursprünglichen Drehungswinkels gleich ist.

Es erfolgt somit aus der Gleichung ($b.$ 183)

$Ax.q^n = \pm\, Ax.q$, je nachdem $n \gtrless 0$, $T.q^n = Tq^n$, $U.q^n = Uq^n$ ($b.$184)

Die Gleichung ($b.$ 181) gestattet einen wichtigen Schlusz. Wenn wir nämlich die Relation ($b.$ 136) in Betracht ziehen, so erhalten wir

$$Uq = \cos \angle q + \sin \angle q . UVq \ldots\ldots (b.\ 185)$$

Nach ($b.$ 181) ist jedoch, weil ein rechtes Radial in der Ebene des Quaternions q^n einem solchen in der Ebene von q gleich sein musz (der Übereinstimmung der Ebenen zufolge)

$$(Uq)^n = \cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq \ \ldots (b.\ 186)$$

eine Formel, die nicht nur für positive Werte von n, sondern auch für negative Werte gültig ist. Denn wenn $n = -m$, so erhält man nach ($b.$ 182)

$$(Uq)^{-m} = \frac{1}{(Uq)^m} = \frac{1}{\cos (m \angle q) + \sin (m \angle q) . UVq} =$$
$$= \cos (m \angle q) - \sin (m \angle q) . UVq.$$

indem man nach ($b.$ 73*) Zähler und Nenner durch

$$\cos (m \angle q) - \sin (m \angle q) . UVq$$

multiplicirt und die Formel ($b.$ 129) beachtet. Es wird deshalb

$$(Uq)^{-m} = \cos (-m \angle q) + \sin (-m \angle q) . UVq$$

oder auch bei negativem n

$$(Uq)^n = \cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen ($b.$ 185) ($b.$ 186) resultirt nun für alle Werte von n:

$$(\cos \angle q + \sin \angle q . UVq)^n = \cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq \quad (b.\ 187)$$

Das in der Algebra gültige Moivre'sche Theorem erscheint daher auch bei Quaternionen.

Es ist übrigens leicht, dasselbe für ganze Werthe von n durch Multiplikation nach den gegebenen Regeln nachzuweisen.

Hat man es mit einem rechten Quaternion r zu tun, so geht (b. 186) über in:

$$(Ur)^n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).UVr.$$

Es wird weiter im allgemeinen nach (b. 183) (b. 186)

$$\left.\begin{aligned} q^n &= Tq^n\,[\cos(n\angle q) + \sin(n\angle q).UVq] \\ r^n &= Tr^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).UVr\right] \end{aligned}\right\}\ \ldots\ (b.\ 188)$$

Und hierbei schlieszen sich die nachstehenden Formeln an:

1°. $$S.q^n = Tq^n \cos(n\angle q) \ \ldots\ldots\ (b.\ 189)$$

2°. $$V.q^n = Tq^n \sin(n\angle q).UVq \ \ldots\ldots\ (b.\ 190)$$

3°. $$S.r^n = Tr^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \ \ldots\ldots\ (b.\ 191)$$

Es ist deshalb $S.r^n$ nur dann $=0$, wenn n eine ungerade Zahl ist.

4°. $$V.r^n = Tr^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) UVq \ \ldots\ldots\ (b.\ 192)$$

Hiernach ist $V.r^n = 0$, wenn n eine gerade Zahl bedeutet.

5°. $$K.q^n = Tq^n[\cos(n\angle q) - \sin(n\angle q).UVq]\ .\ (b.\ 193)$$

6°. $$\frac{1}{q^n} = q^{-n} = (Tq)^{-n}[\cos(n\angle q) - \sin(n\angle q).UVq].\ (b.194)$$

7°. $$q^n\,K.q^n = Tq^{2n} = (qKq)^n \ \ldots\ldots\ (b.\ 195)$$

75. Besonders wichtig ist das Symbol q^{-1}, weil es nach der Definition (b. 184) mit $\frac{1}{q}$ identisch ist. Es ist somit q^{-1} der Reciproke des Quaternions q. Man kann die Grösze q^{-1} auch bei dem Quotienten zweier Quaternionen einführen und erhält dann

$$\frac{q_1}{q} = q_1 q^{-1} \ \ldots\ldots\ (b.\ 196)$$

Die zweite Seite ist natürlich von $q^{-1}q_1$ verschieden, wie wir schon in Art. 52 bemerkten. Man erhält weiter

$$\frac{1}{q} = q^{-1} = Tq^{-1}\,[\cos\angle q - \sin\angle q.UVq]$$

76. Wir wollen noch einige allgemeine Sätze über Potenzen beweisen.

1°. $q^m q^n = q^{m+n}$. . . . . (b. 197)

Denn

$$q^m q^n = Tq^m Tq^n [\cos (m \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq]$$
$$[\cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq] =$$
$$= Tq^{m+n} [\cos (m+n) \angle q + \sin (m+n) \angle q . UVq],$$
weil $(UVq)^2 = -1$
$$= q^{m+n}$$

2°. $(q^n)^m = q^{nm}$ . . . . (b. 198)

Weil

$$(q^n)^m = (Tq^n)^m [\cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq]^m =$$
$$= Tq^{nm} [\cos (mn \angle q) + \sin (mn \angle q) . UVq] \text{ nach } (b. 187)$$
$$= q^{nm}.$$

Eine Folgerung lässt sich hieraus ziehen:

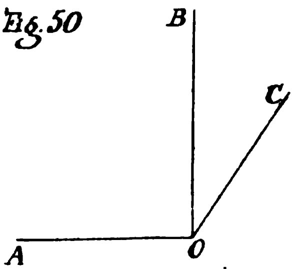
Weil $q^{mn} = q^{nm}$, so ist auch $(q^n)^m = (q^m)^n$.

3°. $q^n q'^n \gtrless (qq')^n$.

Denn man erhält:

$$q^n q'^n = Tq^n Tq'^n [\cos (n \angle q) + \sin (n \angle q) . UVq]$$
$$[\cos (n \angle q') + \sin (n \angle q') . UVq']$$
$$= (Tq Tq')^n [\cos (n \angle q) \cos (n \angle q') + \sin (n \angle q) \cos (n \angle q') . UVq +$$
$$+ \cos (n \angle q) \sin (n \angle q') . UVq' + \sin (n \angle q) \sin (n \angle q') . UVq\, UVq']$$

Fig. 50



UVq, UVq' sind beide rechte Radiale. Es sei in der Figur 50

$$UVq' = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}}, \quad UVq = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}},$$

so ist

$$UVq . UVq' = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}.$$

Diese Grösze ist somit ein **Radial** in einer zu den Ebenen der Quaternionen q, q' senkrechten Ebene.

Die erhaltene Formel lässt sich nicht weiter vereinfachen und kann nicht in der Gestalt

$$(Tq Tq')^n [\cos (n \angle qq') + \sin (n \angle qq') . UVqq']$$

erhalten werden.

77. Die Grösze $q^{\frac{1}{n}}$, in den in Art. 74 definirten Sinn genommen, wollen wir die n^{te} Wurzel aus dem Quaternion q nennen und schreiben

$$q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{q} = Tq^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\angle q}{n} + \sin\frac{\angle q}{n}.UVq\right). \;. \quad (b.\,199)$$

Es folgt hieraus, dass die n^{te} Wurzel eines Quaternions ein neuer Quaternion ist, dessen n^{te} Potenz dem Quaternion q gleich kommt, denn nach (b. 197) ist

$$(q^{\frac{1}{n}})^n = q^{(\frac{1}{n}n)} = q.$$

Man kann hierdurch noch statt $q^{\frac{m}{n}}$ die Bezeichnung $\sqrt[n]{q^m}$ einführen, denn es ist:

$$q^{\frac{m}{n}} = (q^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{q^m}.$$

78. **Konisch spaltende Quaternionen.** In Art. 17—19 fanden wir, dass das Symbol $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ gedeutet werden kann als ein Vektorkegel, nämlich als die Gesammtheit der Seitenlinien des Kegels, dessen Scheitel mit dem Anfangspunkt des Vektors α zusammenfällt, während die Grundfläche ein Kreis ist, aus dem Endpunkte von α mit dem Radius $T\beta$ beschrieben in einer zu β senkrechten Ebene.

Wenn nun ein dritter Vektor γ gegeben ist, so wollen wir die Gesammtheit der Operationen, welche den Vektor γ in den Vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ überführen, einen konisch spaltenden Quaternion nennen und mit

$$\frac{\alpha + \sqrt{-1}\,\beta}{\gamma}$$

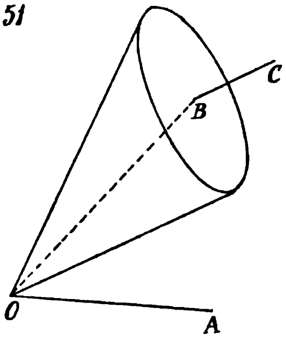
bezeichnen. Dabei wollen wir aber unmittelbar eine weitere Definition aufstellen; wenn nämlich $\frac{\alpha}{\gamma} = q$, $\frac{\beta}{\gamma} = q'$ gesetzt wird, so wollen wir annehmen, dass identisch sei

$$\frac{\alpha + \sqrt{-1}\,\beta}{\gamma} = q + \sqrt{-1}\,q' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (b.\,200)$$

Die Figur 51 veranschaulicht den Begriff des konisch spaltenden Quaternions. Von O aus ist der Vektor OA $= \gamma$ gezogen, weiter AB $= \alpha$, BC $= \beta$. Der Kreis B ist in der Ebene, durch B senkrecht zu β gebracht mit dem Radius $T\beta$ beschrieben und nachher der Strahlenkegel aus A nach dem Umfange dieses Kreises construirt.

Der Ausdruck $q + \sqrt{-1}\, q'$ spaltet somit den Strahl OA in diesen Strahlenkegel.

Fig. 51



Es ist klar, dass die vorher gegebenen Definitionen in diesem Falle keinen Sinn haben und es erscheint deshalb angemessen, die wichtigsten Gröszen aufs Neue zu deuten.

79. Zwei konisch spaltende Quaternionen $q + \sqrt{-1}\, q'$ und $q_1 + \sqrt{-1}\, q_1'$ sollen einander gleich heiszen, wenn $q = q_1$ und $q' = q_1'$.

Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier konisch spaltenden Quaternionen wollen wir dadurch definiren, dass diese Gröszen bestimmt werden sollen, indem man $\sqrt{-1}$ als einen gewöhnlichen skalaren Faktor betrachtet; somit schreiben wir:

$$(q + \sqrt{-1}\, q') \pm (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = q \pm q_1 + \sqrt{-1}\, (q' \pm q_1') \quad (b.\,201)$$

$$(q + \sqrt{-1}\, q')\, (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = q q_1 - q' q_1' + \sqrt{-1}\, (q' q_1 + q q_1') \quad (b.\,202)$$

Wenn man bei einem Produkte, welches drei oder mehrere Faktoren enthält, die Multiplikation wirklich ausführt, so zeigt sich, dass auch bei der Multiplikation konisch spaltender Quaternionen das associative Princip gültig bleibt.

Der Reciproke eines konisch spaltenden Quaternions

$$\frac{1}{q + \sqrt{-1}\, q'}$$

sei ein solcher, welcher *mit* dem Nenner $q + \sqrt{-1}\, q'$, oder auch *durch* denselben, multiplicirt die Einheit ergibt.

Setzen wir nämlich

$$\frac{1}{q + \sqrt{-1}\, q'} = q_1 + \sqrt{-1}\, q_1',$$

so lässt sich hieraus schlieszen

$$(q + \sqrt{-1}\, q')\, (q_1 + \sqrt{-1}\, q_1') = 1$$

oder

$$(q_1 + \sqrt{-1}\, q_1')\, (q + \sqrt{-1}\, q') = 1. \; . \; . \; . \; . \quad (b.\,203)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen kann gefolgert werden

$$qq_1 - q'q_1' = 1 \quad \text{und} \quad qq_1' + q'q_1 = 0$$

und die zweite Relation dieses Systems ergibt

$$q_1' = -q^{-1}q'q_1,$$

wodurch nach Einführung dieses Wertes in die erste

$$(q + q'q^{-1}q')q_1 = 1$$

erhalten wird; somit ist

$$q_1 = \frac{1}{q + q'q^{-1}q'} = \frac{(q')^{-1}}{q(q')^{-1} + q'q^{-1}}$$

und

$$q_1' = -\frac{q^{-1}}{q(q')^{-1} + q'q^{-1}}.$$

Dasselbe Resultat hätte man aber auch aus der zweiten der Gleichungen (*b.* 203) erhalten.

Die Gleichung (*b.* 53) oder

$$\frac{1}{(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1')} = \frac{1}{(q_1+\sqrt{-1}\,q_1')}\,\frac{1}{(q+\sqrt{-1}\,q')}. \quad (b.\,204)$$

bleibt nun auch bei konisch spaltenden Quaternionen gültig. Denn die zweite Seite dieser Gleichung ergibt *mit* dem Nenner der ersten Seite (oder *durch* denselben) multiplicirt die Einheit.

Nunmehr ist es ein Leichtes den Quotienten zweier konisch spaltenden Quaternionen zu deuten. Wir setzen nämlich fest, dass

$$\frac{q + \sqrt{-1}\,q'}{q_1 + \sqrt{-1}\,q_1'} = (q + \sqrt{-1}\,q')\frac{1}{q_1 + \sqrt{-1}\,q_1'}. \quad (b.\,205)$$

Daraus ergibt sich dann wieder weiter, dass man Zähler und Nenner des so erhaltenen Bruches *durch* denselben konisch spaltenden Quaternion multipliciren kann.

Nach der Gleichung (*b.* 205) ist noch

$$\frac{q' + \sqrt{-1}\,q''}{q} = (q' + \sqrt{-1}\,q'')\frac{1}{q} = q'\frac{1}{q} + \sqrt{-1}\,q''\frac{1}{q} \text{ nach}(b.202)$$

$$= \frac{q'}{q} + \sqrt{-1}\frac{q''}{q}$$

und hierdurch kann für den reciproken des Ausdrucks $q + \sqrt{-1}\,q'$ eine neue Form angegeben werden. Mit Hülfe der Relationen (*b.* 203) fanden wir nämlich

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'}=\frac{(q')^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}}+\sqrt{-1}\,\frac{-q^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}}$$

und dieses Resultat lässt sich nun auch darstellen durch

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'}=\frac{(q')^{-1}-\sqrt{-1}\,q^{-1}}{q\,(q')^{-1}+q'\,q^{-1}}\quad\ldots\ldots\ (b.\,206)$$

Bemerkenswert ist noch, dass die Gleichung

$$\frac{1}{q+\sqrt{-1}\,q'}=\frac{q-\sqrt{-1}\,q'}{(q+\sqrt{-1}\,q')\,(q-\sqrt{-1}\,q')}$$

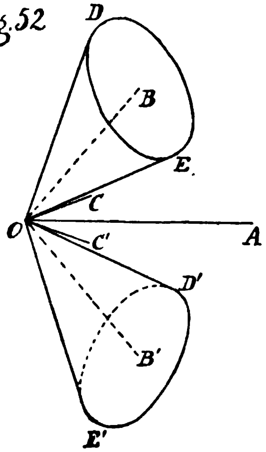
in der Quaternionenrechnung nicht dazu dienen kann aus dem Nenner das Symbol $\sqrt{-1}$ fortzuschaffen.

Aus der Gleichung ($b.$ 206) entnehmen wir, dass dieser Zweck hingegen unmittelbar durch die Multiplikation von Zähler und Nenner des Ausdrucks $1:(q+\sqrt{-1}\,q')$ *durch* $(q')^{-1}-\sqrt{-1}\,q^{-1}$ erreicht wird. Dieses Verfahren kann natürlich nun auch bei dem Quotienten zweier willkürlichen konisch spaltenden Quaternionen angewandt werden, z. B.

$$\frac{q+\sqrt{-1}\,q'}{q_1+\sqrt{-1}\,q_1'}=\frac{(q+\sqrt{-1}\,q)\,[(q_1')^{-1}-\sqrt{-1}\,q_1^{-1}]}{q_1\,(q_1')^{-1}+q_1'\,q_1^{-1}}$$
$$=\frac{q\,(q_1')^{-1}+q'\,q_1^{-1}+\sqrt{-1}\,\{q'\,(q_1')^{-1}-q\,q_1^{-1}\}}{q_1\,(q_1')^{-1}+q_1'\,q_1^{-1}}$$

und hiermit ist der Quotient wieder in die Form eines konisch spaltenden Quaternions geraten.

Fig. 52



Weiter definiren wir den Conjugirten eines konisch spaltenden Quaternions $q+\sqrt{-1}\,q'$ als die Grösze $Kq+\sqrt{-1}\,Kq'$; es ist hierdurch identisch

$$K(q+\sqrt{-1}\,q')=Kq+\sqrt{-1}\,Kq'\ (b.207)$$

Es ist ein Leichtes eine geometrische Vorstellung des conjugirten Quaternions zu gewinnen. In der Figur 52 sei nämlich

$$OB:OA=q,\quad OC:OA=q',$$
$$OB':OA=Kq,\ OC':OA=Kq'.$$

Bringt man durch B, B′ Ebenen senkrecht zu OC, OC′ bzhw. und beschreibt man in denselben um **B, B′**

Kreise, deren Radius $T.OC$ gleich kommt, so spaltet $q+\sqrt{-1}\,q'$ den Vektor OA in den Strahlenkegel OBDE, $K(q+\sqrt{-1}\,q')$ dagegen in den Strahlenkegel OB'D'E'.

Es bleibt nun der wichtige Satz in (b. 54) ausgesprochen auch bei konisch spaltenden Quaternionen bestehen. Denn es ist

$$K.(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1')=K.\{qq_1-q'q_1'+\sqrt{-1}(q'q_1+qq_1')\}$$

nach (b. 202)

$$=K(qq_1-q'q_1')+\sqrt{-1}\,K(q'q_1+qq_1')$$

nach (b. 207)

$$=Kq_1Kq-Kq_1'Kq'+\sqrt{-1}\,Kq_1Kq'+$$
$$+\sqrt{-1}\,Kq_1'Kq \text{ nach } (b.\ 44)\ (b.\ 54)$$
$$=(Kq_1+\sqrt{-1}\,Kq_1')\,(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')$$
$$=K(q_1+\sqrt{-1}\,q_1')\,K(q+\sqrt{-1}\,q')$$

nach (b. 207)

Den Skalar und den Vektorteil eines konisch spaltenden Quaternions zu definiren, wählen wir die Gleichungen (b. 107) (b. 131)

$$S=\tfrac{1}{2}(1+K),\quad V=\tfrac{1}{2}(1-K).$$

Es wird deshalb

$$S(q+\sqrt{-1}\,q')=\tfrac{1}{2}\,[(q+\sqrt{-1}\,q')+(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')] \text{ nach } (b.207)$$
$$=\tfrac{1}{2}\,[q+Kq+\sqrt{-1}\,(q'+Kq')] \text{ nach } (b.\ 201)$$

oder

$$S\,(q+\sqrt{-1}\,q')=Sq+\sqrt{-1}\,Sq' \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 208)$$

und ebenso

$$V(q+\sqrt{-1}\,q')=Vq+\sqrt{-1}\,Vq' \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 209)$$

Hieraus ersieht man, dass der Grösze $\sqrt{-1}$ Skalarcharakter zukommt.

Lassen wir weiter, indem wir unter q einen konisch spaltenden Quaternion verstehen, auch die Relation (b. 51)

$$qKq=Tq^2=Nq$$

gelten, so ist dadurch der Tensor und der Norm eines solchen Quaternions definirt. Es wird

$$N(q+\sqrt{-1}q')=\{T(q+\sqrt{-1}q')\}^2=(q+\sqrt{-1}q')\,(Kq+\sqrt{-1}\,Kq')=$$
$$=qKq-q'Kq'+\sqrt{-1}(qKq'+q'Kq)$$
$$=Nq-Nq'+2\sqrt{-1}\,S(qKq')$$

weil

$$S.qKq' = S.K(qKq') \text{ nach } (b.\,101) = S.q'Kq \text{ nach } (b.\,54).$$
$$V.qKq' = V.K(qKq') \text{ nach } (b.\,120) = - V.q'Kq \text{ nach } (b.\,54)$$

Die erhaltene Formel

$$N(q + \sqrt{-1}\, q') = Nq - Nq' + 2\sqrt{-1}\, S(qKq') \,.\,.\, (b.\,210)$$

ist dieselbe wie ($b.$ 115), wenn man darin q' durch $\sqrt{-1}\, q'$ ersetzt und $\sqrt{-1}$ als einen gewöhnlichen algebraischen Faktor betrachtet.

Die Formel für den Tensor des Produktes zweier Quaternionen bleibt auch bei konisch spaltenden Quaternionen bestehen. Es wird nämlich

$$N(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1') =$$
$$=(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1')K.(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1') \text{ nach } (b.51)$$
$$=(q+\sqrt{-1}q')(q_1+\sqrt{-1}q_1')K(q_1+\sqrt{-1}q_1')K(q+\sqrt{-1}q') \text{ nach} (b.54)$$
$$=(q + \sqrt{-1}\, q')\, N(q_1+ \sqrt{-1}q_1')K(q+\sqrt{-1}\, q') \text{ nach } (b.\,51)$$
$$= N(q + \sqrt{-1}\, q')\, N(q_1 + \sqrt{-1}\, q_1')$$

Nunmehr wird es auch leicht sein den Versor eines Quaternions der betrachteten Art zu interpretiren. Wir setzen nämlich

$$U(q + \sqrt{-1}\, q') = \frac{q + \sqrt{-1}\, q'}{T(q + \sqrt{-1}\, q')} \,.\,.\,.\,.\,.\, (b.\,211)$$

Und es lässt dieser Ausdruck sich leicht in einen solchen mit reellem Nenner transformiren. Denn nach dem Vorhergehenden erhält man

$$U(q + \sqrt{-1}\, q') = \frac{(q + \sqrt{-1}\, q')\, T[(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}{T.(q + \sqrt{-1}\, q')\, [(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}$$
$$= \frac{(q + \sqrt{-1})\, T[(q')^{-1} - \sqrt{-1}\, q^{-1}]}{T[q(q')^{-1} + q'q^{-1}]}$$

Es sind durch diese Definitionen die Grundformeln aufrecht erhalten und es gelingt leicht nachzuweisen, dass jede einzelne Formel, welche die hier definirten Gröszen enthält und in diesem Abschnitte für gewöhnliche Quaternionen bewiesen ist, auch gültig bleibt, wenn man darin dieselben durch konisch spaltende Quaternionen ersetzt und auszerdem $\sqrt{-1}$ als einen gewöhlichen algebraischen Faktor betrachtet.

Ist es, der Deutung wegen, angemessen die Namen »Vektorkegel" und »konisch spaltender Quaternion" zu wählen, der

Algebra gemäsz werden wir doch häufig α einen reellen, $\sqrt{-1}\,\beta$ einen imaginären, $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ einen complexen Vektor nennen mit analogen Bezeichnungen bei den Quaternionen.

Schlieszlich sei erwähnt, dass HAMILTON für die Symbole

$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta, \quad q + \sqrt{-1}\,q'$$

die Namen Bivektor, Biquaternion vorgeschlagen hat.

80. Quaternionen kommen in der Natur häufig vor; wir brauchen z. B. nur an die Lichterscheinungen zu erinnern. Wenn eine Lichtbewegung mit bestimmter Richtung und Geschwindigkeit sich ausbreitet, so kann man einen Vektor α construirt denken derart, dass $U\alpha$ in die Richtung der Fortpflanzung fällt und $T\alpha$ der Geschwindigkeit der Fortpflanzung gleich kommt.

Stöszt diese Bewegung an ein andres Mittel, so werden Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit geändert und es kann ein zweiter Vektor β construirt werden, welcher für das zweite Mittel dieselbe Bedeutung hat wie α für das erste.

Die Wirkung des zweiten Mittels ist somit die Überführung des Vektors α in β und man kann daher sagen, das zweite Mittel habe wie ein Quaternion operirt.

Es sei i der Einfallswinkel, r die Neigung des Strahles gegen das Lot beim Austritt, der einfallende Strahl BO sei α, v und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Mitteln, ε ein rechter Versor in der Einfallsebene, dessen Drehung von AO nach OC erfolgt, so ist zu setzen

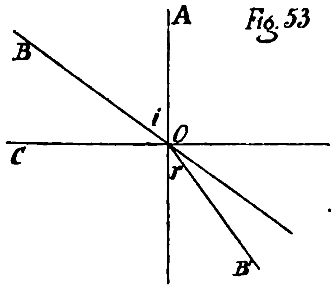


Fig. 53

$$\beta = \frac{v'}{v}\,[\cos(i-r) - \sin(i-r).\varepsilon]\,\alpha \; . \; . \; . \; . \; (b.\ 212)$$

wozu noch kommt

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

Der Quaternion $\beta : \alpha$ erscheint hier als Funktion des Skalars i.

Wie Hamilton dargetan hat, liegt bei doppelbrechenden Krystallen die Möglichkeit vor, dass unter gewissen Umständen ein einziger auffallender Strahl in einen Strahlenkegel zweiten Grades gespalten wird. Es ist dies die Erscheinung der konischen Refraction. Man kann somit sagen, ein doppelbrechender Krystall könne wie ein konisch spaltender Quaternion wirken.

PRODUKTE VON VEKTOREN.

81. In Art. 57 haben wir gezeigt, dass die Summe und die Differenz zweier rechten Quaternionen durch die Summe und die Differenz der Indices derselben bestimmt wird und dass das Quotient zweier rechten Quaternionen dem Quotiente der Indices gleich ist.

Das Produkt zweier Vektoren ist bisher nicht definirt worden. HAMILTON hat diesen Umstand benutzt, ein solches Produkt zu deuten als das Produkt der rechten Quaternionen, deren Indices jenen Vektoren gleich kommen.

Es ist dies ein sehr wichtiger Schritt für die Lehre der hier betrachteten Operatoren gewesen. Denn es wird dadurch ermöglicht, bei allen vorkommenden Operationen (Addition, Subtraction, Multiplikation, Division, Potenzirung) die Vektoren durch rechte Quaternionen und umgekehrt zu ersetzen.

Demgemäsz werden wir im Folgenden mehrmals die Benennung Vektor benutzen, wo der Vektorteil eines Quaternions, ein rechter Quotient, damit gemeint ist.

In gleicher Weise wird man häufig die Symbole i, j, k, welche wir im vorigen Abschnitte ausführlich behandelten, nicht als ein System rechter Radiale, sondern als ein System unter sich rechtwinkliger Einheitsvektoren bezeichnet finden.

Es wird damit gemeint, dass dieselben als die Indices der drei rechten Radiale betrachtet werden.

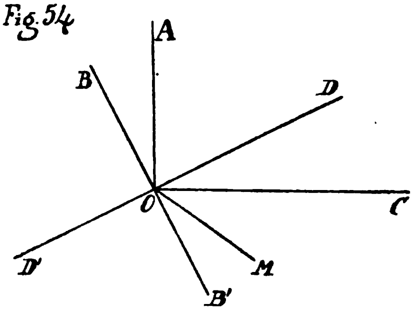
Der Kürze halber wollen wir noch eine neue Schreibweise einführen; den rechten Quotienten r, dessen Index α ist, wollen wir mit $I^{-1}\alpha$ bezeichnen.

Durch die von HAMILTON aufgestellte Definition ist sodann

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots = I^{-1}\alpha\,.\,I^{-1}\beta\,.\,I^{-1}\gamma\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 1)$$

82. Beschäftigen wir uns zunächst nur mit dem zwei Faktoren enthaltenden Produkte $\alpha\beta$.

Fig. 54



Es sei in der Fig. 54

$$OA = \alpha,\quad OB = \beta.$$

Wir denken zwei Ebenen angebracht senkrecht zu OA, OB bzhw. Dieselben mögen sich längs OM schneiden, so ist OM $\perp$ OA und $\perp$ OB. In diesen Ebenen seien OC, OD senkrecht zu OM gezogen, so liegen die Geraden OA, OB, OC, OD sämtlich in einer zu OM senkrechten Ebene, und

$$\angle AOB = \angle COD$$

T.OM sei willkürlich. Es können dann stets T.OC, T.OD derart bestimmt werden, dass

$$T.OC : T.OM = T.OA,\quad T.OD : T.OM = T.OB \ \ldots \quad (c.\ 2)$$

Es sei nun

$$I^{-1}\alpha = \frac{OC}{OM},\quad I^{-1}\beta = \frac{OD}{OM}.$$

Das Produkt $\alpha\beta$ zu bestimmen, müssen wir noch $I^{-1}\beta$ auf den Zähler OM reduciren. Dazu soll DO verlängert werden zu OD', und

$$T.OD : T.OM = T.OM : T.OD' \ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 3)$$

angenommen werden. Es wird dadurch $I^{-1}\beta = OM : OD'$ und

$$\alpha\beta = I^{-1}\alpha . I^{-1}\beta = \frac{OC}{OM}\,\frac{OM}{OD'} = \frac{OC}{OD'}.$$

Wenn man nun den Vektor BO verlängert nach B', so ist

$$\angle AOB' = \pi - \angle AOB = \pi - \angle COD = \angle COD';$$

und bestimmt man noch T.OB' derart, dass

$$T.OA : T.OB' = T.OC : T.OD'$$

so kann man statt des Quaternions OC : OD' auch OA : OB' nehmen und erhält dadurch

$$\alpha\beta = OA : OB' = \alpha : OB'.$$

Den in dieser Weise erhaltenen Vektor OB′ nennt Hamilton den Revektor des Vektors β und man bezeichnet denselben mit $R\beta$. Es wird somit

$$\alpha\beta = \alpha : R\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 4)$$

Diese Gleichung spricht die Definition eines Produktes zweier Vektoren bei Hamilton aus. Der englische Mathematiker zeigt dann weiter, dass $\alpha\beta$ dadurch auch als das Produkt zweier rechten Quotienten, deren Indices α, β sind, gedeutet werden kann, und erst bei Produkten, welche drei und mehr Faktoren enthalten, wird die am Anfang des vorigen Artikels gegebene Definition aufgestellt. Wir haben vorgezogen dieselbe voran zu setzen.

Betrachten wir den Revektor von β etwas näher.

Wie unmittelbar aus dem Vorhergehenden ersichtlich, ist

$$UR\beta = -U\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 5)$$

und weiter ist

$$TR\beta = T.\mathrm{OB}' = \frac{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OD}')}{T.\mathrm{OC}} = \frac{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OD}')}{(T.\mathrm{OA})\,(T.\mathrm{OM})} \text{ nach } (c.\ 2) =$$

$$= \frac{T.\mathrm{OM}}{T.\mathrm{OD}} \text{ nach } (c.\ 3) = \frac{1}{T\beta} \text{ nach } (c.\ 2)$$

oder kurz

$$TR\beta = \frac{1}{T\beta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 6)$$

Durch Verbindung dieser Resultate wird deshalb

$$R\beta = -\frac{U\beta}{T\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 7)$$

Aus ($c.$ 7) erhält man leicht

$$RR\beta = -\frac{UR\beta}{TR\beta} = \frac{U\beta}{\frac{1}{T\beta}} \text{ nach } (c.\ 5)\,(c.\ 6) = T\beta\, U\beta = \beta. \quad (c.\ 8)$$

oder in Worten: der Revektor eines Revektors ist der ursprüngliche Vektor.

Mit Hülfe der Figur 55 lässt sich weiter der Satz beweisen: Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Revektoren zweier Vektoren $\alpha = \mathrm{OA}$, $\beta = \mathrm{OB}$ ist parallel der Tangente, welche in O an den um $\triangle$ OAB beschriebenen Kreis geht.

Es sei

$$OA' = R\alpha, \; OB' = R\beta,$$

so ist

$$T.OA' : T.OB' = \frac{1}{T.OA} : \frac{1}{T.OB}.$$

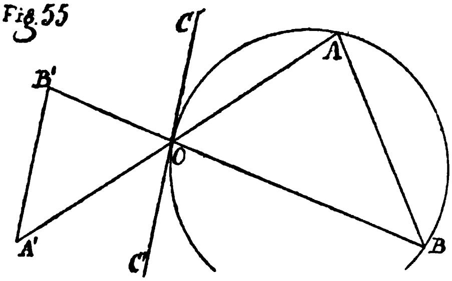
Demnach ist

$$\triangle\, OA'B' \backsim \triangle\, OAB$$

und dadurch

$$\angle\, OB'A' = \angle\, OBA.$$

Fig. 55



Wenn OC die Tangente in C ist, so wird

$$\angle\, B'OC = \angle\, C'OB = \\ = \angle\, OAB$$

und deshalb

$$\angle\, OB'A' = \angle\, B'OC,$$

oder

$$A'B' \,//\, OC,$$

wie zu beweisen war.

83. Das Symbol α^n, oder die Potenz eines Vektors, wird in derselben Weise gedeutet wie das Produkt. Man erhält demnach, wenn man die Gleichung (*b.* 188) berücksichtigt

$$\alpha^n = (I^{-1}\,\alpha)^n = (T\alpha)^n \left[\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right).\, U\alpha\right] \;.\;.\; (c.\; 9)$$

wo $U\alpha$ einen rechten Radial in einer Ebene senkrecht zu α bedeutet.

Für einen rechten Radial ε erhalten wir somit die merkwürdige Formel

$$\varepsilon^n = \cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right).\,\varepsilon.$$

Nehmen wir speciell $n = -1$, so wird

$$\alpha^{-1} = -\frac{U\alpha}{T\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c.\; 10)$$

und ein Blick auf die Gleichung (*c.* 7) zeigt unmittelbar die Identität der Symbole $I.\alpha^{-1}$ und $R\alpha$. Nach Art. 73 ist α^{-1} identisch mit $\frac{1}{\alpha}$, und daher wird

$$R\alpha = I.\alpha^{-1} = I.\frac{1}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 11)$$

Mit dieser Bezeichnung geht nun die Gleichung ($c.$ 4) über in

$$\alpha\beta = \alpha : I.\beta^{-1} \text{ oder } = \frac{\alpha}{I.\beta^{-1}}.$$

Indessen wird gewöhnlich geschrieben:

$$\alpha\beta = \alpha : \beta^{-1} \text{ oder } = \frac{\alpha}{\beta^{-1}},$$

indem in der zweiten Seite dieser Gleichung unter α ein rechter Quotient verstanden ist.

84. Eine merkwürdige hierbei anschlieszende Transformation ist auch die nachstehende bei der in Art. 52 angegebenen Bedeutung der Gröszen j, k, während s Skalar ist:

$$kj^{-s} = j^s k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 11^*)$$

Denn nach dem Vorhergehenden ist

$$kj^{-s} = k\left[\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).j\right] = k\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).kj$$
$$= k\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).jk = \left[\cos\left(s\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(s\frac{\pi}{2}\right).j\right]k$$
$$= j^s k.$$

Es lässt sich hieraus noch folgern, dass

$$k = j^s k j^s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 11^{**})$$

für jeden willkürlichen Skalarwert von s.

85. Wenn q ein willkürlicher Quaternion ist, so kann derselbe stets auf die Form α^t gebracht werden, wo α ein rechter Quotient und t ein positiver Skalar ist. Denn wenn die Gleichung

$$q = \alpha^t$$

stattfinden soll, so ist nothwendig, dass

$$Ax.q = Ax.\alpha^t, \ \angle q = \angle \alpha^t = t\frac{\pi}{2}, \ Tq = T\alpha^t.$$

Die erste dieser Gleichungen erfordert nur, weil t immer positiv ist, dass der Vektor α mit $Ax.q$ der Richtung nach zusammenfällt. Nach der zweiten Gleichung ist

$$t = \frac{2\angle q}{\pi}$$

und nach der dritten schliesslich

$$T\alpha = (Tq)^{\frac{1}{t}} = Tq^{\frac{1}{t}}.$$

Es erhellt hieraus, dass α und t eindeutig bestimmt werden, und dass der Wert von t stets zwischen 0 und 2 enthalten sein wird.

Für $t=0$ ist $\angle q = 0$, somit ist q ein positiver Skalar; in diesem Falle verliert die Transformation $q=\alpha^t$ seine Bedeutung. Für $t=2$ ist $\angle q = \pi$, somit ist q ein negativer Skalar und die Ebene des rechten Quotienten ist wie im vorigen Falle unbestimmt.

86. Die wichtigsten Formeln der Vektorenmultiplikation lassen sich unmittelbar den Artikeln 53 und flg. entnehmen. Es seien dieselben in der neuen Bezeichnung kurz wiederholt. Nach (*b.* 74) wird, wenn α in dem Sinne eines rechten Quotienten genommen wird

$$K\alpha = -\alpha \qquad (c.\ 12)$$

Nach (*b.* 75) ist $$\alpha\beta = K.\beta\alpha \qquad (c.\ 13)$$

Nach (*b.* 146) ist $$S.\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha) \qquad (c.\ 14)$$

Nach (*b.* 147) ist $$V.\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \qquad (c.\ 15)$$

Nach (*b.* 148) ist $$\left\{\begin{array}{l} S.\alpha\beta = S.\beta\alpha \\ V.\alpha\beta = -\ V.\alpha\beta \end{array}\right\} \qquad (c.\ 16)$$

Nach (*b.* 47) ist $$\left\{\begin{array}{l} T.\alpha\beta = T\alpha T\beta \\ U.\alpha\beta = U\alpha U\beta \end{array}\right\} \qquad (c.\ 17)$$

Nach (*b.* 91) ist $$(\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha \qquad (c.\ 18)$$

Nach (*b.* 92) ist $$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \qquad (c.\ 19)$$

Nach (*b.* 93) ist $$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)(\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots) = \Sigma\,\alpha\alpha' \qquad (c.\ 20)$$

wobei das Zeichen Σ bedeutet, das jede der Gröszen α, β, $\gamma\ldots$ durch jede der Gröszen α', β', γ',.. multiplicirt werden soll; die erhaltenen Produkte addire man.

Wir wollen nunmehr die bei dem Produkte $\alpha\beta$ vorkommenden Gröszen mit denen bei $\frac{\alpha}{\beta}$ vergleichen. Aus (*c.* 4) oder

$$\alpha\beta = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}'$$

und

$$\alpha : \beta = \mathrm{OA} : \mathrm{OB}$$

folgt unmittelbar

$$Ax.\,\alpha\beta = -\,Ax.\frac{\alpha}{\beta},\quad \angle\,\alpha\beta = \pi - \angle\frac{\alpha}{\beta} \qquad (c.\ 21)$$

$$U.\alpha\beta = \frac{U.OA}{U.OB'} = -\frac{U.OA}{U.OB} = -U\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots \quad (c. 22)$$

Deshalb wird

$$\alpha\beta = T\alpha\beta . U\alpha\beta = -T\alpha\beta U\frac{\alpha}{\beta} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c. 23)$$

$$S\alpha\beta = T\alpha\beta . \cos \angle \alpha\beta = -T\alpha \, T\beta \cos \angle \frac{\alpha}{\beta} \ldots \ldots \quad (c. 24)$$

und weiter

$$S\alpha\beta = -N\beta \frac{T\alpha}{T\beta} \cos \angle \frac{\alpha}{\beta} = -N\beta \, S\frac{\alpha}{\beta} \ldots \ldots \ldots \quad (c. 25)$$

$$V\alpha\beta = V.(T\alpha \, T\beta \, U.\alpha\beta) = T\alpha \, T\beta \, VU\alpha\beta =$$

$$= -T\alpha \, T\beta \, VU\frac{\alpha}{\beta} \text{ nach } (c. 22) \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c. 26)$$

und weiter

$$V\alpha\beta = -N\beta \, T\frac{\alpha}{\beta} VU\frac{\alpha}{\beta} = -N\beta \, V\frac{\alpha}{\beta} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c. 27)$$

Aus ($c.$ 24) lässt sich noch schlieszen:

Wenn $\alpha \perp \beta$, so ist $S.\alpha\beta = 0$ . . . . . . ($c.$ 28)

und es ist in diesem Falle weiter

$$\alpha\beta = V\alpha\beta = -V\beta\alpha = -\beta\alpha \text{ nach } (c. 16)$$

Umgekehrt

wenn $S.\alpha\beta = 0$, so musz auch $\alpha \perp \beta$. . . . ($c.$ 29)

denn es ist sodann nach ($c.$ 24)

$$\angle \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Aus ($c.$ 27) kann in gleicher Weise geschlossen werden:

Wenn $\alpha \, // \, \beta$, so ist $V\alpha\beta = 0$ . . . . . . ($c.$ 30)

Denn es ist in diesem Falle $\frac{\alpha}{\beta} =$ Skalar und $V\frac{\alpha}{\beta} = 0$.

Es wird sodann weiter

$$\alpha\beta = S\alpha\beta = S\beta\alpha = \beta\alpha.$$

Umgekehrt

wenn $V\alpha\beta = 0$, so ist $\alpha \, // \, \beta$, ... ($c.$ 31)

Denn nach ($c.$ 27) ist sodann auch $V\frac{\alpha}{\beta} = 0$, d. h. $\frac{\alpha}{\beta}$ ist skalar, oder α und β müssen der Richtung nach zusammenfallen.

Aus (c. 25) und (c. 27) erfolgt durch Addition:

$$\alpha\beta = - N\beta . \left(S\frac{\alpha}{\beta} + V\frac{\alpha}{\beta} \right) = - N\beta . \frac{\alpha}{\beta} \quad . \; . \; . \; . \quad (c. 32)$$

und dieselbe Gleichung hätte auf einen anderen Weg erhalten werden können, wie weiter erhellt. Aus (c. 26) geht hervor, indem man beachtet, dass der Tensor nicht negativ sein kann,

$$TV\alpha\beta = T\alpha\, T\beta\, TVU\frac{\alpha}{\beta} = T\alpha\, T\beta \sin \angle \frac{\alpha}{\beta} \text{ nach } (b. 128)$$

oder

$$TV\alpha\beta = 2 \text{ Inhalt des Dreiecks OAB} \quad . \; . \; . \; . \quad (c. 33)$$

wenn man das Zeichen dieses Flächeninhaltes nicht beachtet.

Zum Schlusze dieses Artikels betrachten wir noch das wichtige Symbol α^2.

Nach (b. 130) ist

$$\alpha^2 = - N\alpha = - (T\alpha)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c. 34)$$

Die Anwendung dieser Formel gestattet in vielen Fällen Vereinfachung. Mit Hülfe derselben hätte z. B. auch die Relation (c. 32) sehr einfach erhalten werden können. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \alpha\beta^{-1}\beta^2 \text{ nach } (b. 197) \\ &= \beta^2\alpha\beta^{-1}, \text{ weil } \beta^2 \text{ skalar ist,} \\ &= - N\beta.\alpha\beta^{-1} \text{ nach } (c. 34) = - N\beta . \frac{\alpha}{\beta} \text{ nach } (b. 196). \end{aligned}$$

87. Wir gehen weiter zu denjenigen Vektorenprodukten über, welche drei Faktoren enthalten, wie $\alpha\beta\gamma$.

Aus der Gültigkeit des associativen Princips bei der Multiplikation willkürlicher Quaternionen schlieszt man, dass auch hier

$$\alpha\beta\gamma = \alpha.\beta\gamma = \alpha\beta.\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c. 35)$$

Wir erhalten zwei sehr wichtige Formeln, indem wir $S.\alpha\beta\gamma$ und $V.\alpha\beta\gamma$ näher in Betracht ziehen. Es steht hierbei dann $S.\alpha\beta\gamma$ statt $S(\alpha\beta\gamma)$, und wir wollen im Folgenden mehrmals diese Abkürzung benutzen, wie wir auch schon gelegentlich wohl taten. Es ist

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = S.\alpha S\beta\gamma + S.\alpha\, V\beta\gamma \text{ nach } (b. 109).$$

Weil α ein rechter Quotient ist, so wird dasselbe von $\alpha S\beta\gamma$

gelten. Deshalb musz das erste Glied des erhaltenen Resultats verschwinden. Es wird demnach

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha V\beta\gamma \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (c.\ 35^*)$$

und die zweite Seite dieser Gleichung kann nach (*c.* 24) umgestaltet werden. Dadurch wird

$$S.\alpha\beta\gamma = - T\alpha . TV\beta\gamma \cos \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = T\alpha . TV\beta\gamma . \cos\left(\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

In Art. 79 fanden wir, dass $\beta\gamma$ ein Quaternion in der Ebene der Vektoren β, γ ist; es ist demnach $V\beta\gamma$ ein rechter Quotient in dieser Ebene, und $\angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}$ wird der Winkel sein zwischen α und der senkrechten zur Ebene BOC ($\mathrm{OA} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \beta$, $\mathrm{OC} = \gamma$ vorausgesetzt).

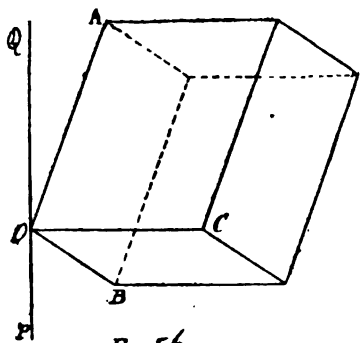


Fig. 56

Weil weiter

$$Ax.V\beta\gamma = Ax.\beta\gamma \text{ nach } (b.\ 117) = - Ax.\frac{\beta}{\gamma} \text{ nach } (c.\ 21) =$$

$$= Ax.\frac{\gamma}{\beta} \text{ nach } (b.\ 8)$$

so wird in der Figur 56

$$\mathrm{OP} = Ax.V\beta\gamma$$

sein und deshalb ist

$$\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = \pi - \angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{AOQ}.$$

Weiter wird nun $T\alpha \cos \angle \mathrm{AOQ}$ die Höhe des auf α, β, γ construirten Parallelepipeds darstellen und nach (*c.* 33) ist

$$TV\beta\gamma = \text{Flächeninhalt Parallelogramm BOC.}$$

Man erhält demnach schlieszlich

$$S.\alpha\beta\gamma = \text{Volumen Parallelepiped OABC.}$$

Wenn jedoch in der Figur 56 die Vektoren β, γ umgetauscht würden, so wäre

$$\angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha} = \angle \mathrm{AOQ}$$

und

$$T\alpha \cos\left(\pi - \angle \frac{V\beta\gamma}{\alpha}\right)$$

wäre die negativ genommene Höhe des Parallelepipeds. Somit hätte man auch erhalten

$$S.\alpha\beta\gamma = - \text{Volumen Parallelepiped OABC.}$$

Die erhaltenen Resultate lassen sich vereinigen zur nachstehenden Formel

$$S.\alpha\beta\gamma = \pm \text{Volumen Parallelepiped OABC} \ldots (c.\ 36)$$

und es musz hierbei das obere oder das untere Zeichen genommen werden, je nachdem die Drehung von β nach γ, von der Seite, wo der Vektor α liegt, aus gesehen, negativ oder positiv erscheint.

Es wird deshalb $S.\alpha\beta\gamma$ verschwinden, wenn die Vektoren α, β, γ in einer Ebene enthalten sind oder in Zeichen

$$S.\alpha\beta\gamma = 0 \text{ wenn } \alpha,\ \beta,\ \gamma\ |||, \text{ und umgekehrt.} \ldots (c.\ 37)$$

Man kann weiter schliessen

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha(\beta\gamma) = S.(\beta\gamma)\alpha \text{ nach } (b.\ 153) = S.\beta\gamma\alpha. \ldots (c.\ 38)$$

oder in Worten: Bei einer cyclischen Umtauschung der Faktoren in einem drei Faktoren enthaltenden Produkte, bleibt der Skalarteil ungeändert. Man kann aber auch wie nachstehend transformiren

$$S.\alpha\beta\gamma = S.\alpha V\beta\gamma \text{ nach } (c.\ 35^*) = S.\alpha(-V\gamma\beta) \text{ nach } (c.\ 16) =$$
$$= S.\alpha V\gamma\beta = - S.\alpha\gamma\beta \ldots\ldots\ldots\ldots (c.\ 39)$$

oder in Worten: Bei acyclischer Umtauschung der Faktoren in einem drei Faktoren enthaltenden Produkte ändert sich das Zeichen.

Wir gehen weiter zum Vektorteil über

$$V.\alpha\beta\gamma = V.\alpha(S\beta\gamma + V\beta\gamma) = \alpha S\beta\gamma + V.\alpha V\beta\gamma,$$

weil $\alpha S\beta\gamma$ ein Vektorteil ist.

Man erhält jedoch nach ($c.$ 15)

$$V.\alpha V\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\left[\alpha V\beta\gamma - (V\beta\gamma)\alpha\right]$$

und es ist identisch

$$0 = \tfrac{1}{2}\,[\alpha S\beta\gamma - (S\beta\gamma)\alpha]$$

Durch Addition wird somit erhalten

$$V.\alpha\, V\beta\gamma = \tfrac{1}{2}\,(\alpha\beta\gamma - \beta\gamma\alpha) \text{ nach } (c.\,18),\ (c.\,19)$$

oder

$$\begin{aligned} V.\alpha\, V\beta\gamma &= \tfrac{1}{2}\,(\alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma - \beta\alpha\gamma - \beta\gamma\alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[(\alpha\beta + \beta\alpha)\gamma - \beta(\alpha\gamma + \gamma\alpha)] \text{ nach } (c.\,18), (c.\,19) \end{aligned}$$

und zuletzt nach (c. 14)

$$V.\alpha\, V\beta\gamma = \gamma S\alpha\beta - \beta S\gamma\alpha \;\ldots\ldots\ldots\; (c.\,40)$$

Indem man dieses Resultat in den für $V.\alpha\beta\gamma$ erhaltenen Ausdruck einträgt, erhält man

$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma - \beta S.\gamma\alpha + \gamma S.\alpha\beta. \;\ldots\ldots\; (c.\,41)$$

Die Vektoren unter dem Zeichen S sind hierin commutativ.

Es folgt aus der zuletzt erhaltenen Gleichung unmittelbar

$$V.\gamma\beta\alpha = V.\alpha\beta\gamma. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (c.\,42)$$

88. Zu den drei vorigen Vektoren sei jetzt noch ein vierter ρ in Betracht gezogen. Unser Ausgangspunkt sei die Gleichung (c. 40).

Wenn wir in derselben α durch $V\alpha\rho$ ersetzen und der Kürze halber

$$V.V\alpha\rho\, V\beta\gamma \text{ anstatt } V(V\alpha\rho.V\beta\gamma)$$

schreiben, so erhalten wir

$$\begin{aligned} V.V\alpha\rho\, V\beta\gamma &= \gamma S.\beta\, V\alpha\rho - \beta S.\gamma\, V\alpha\rho \\ &= \gamma S.\beta\alpha\rho - \beta S.\gamma\alpha\rho, \text{ weil } \beta S\alpha\rho \text{ und } \gamma S\alpha\rho \text{ Vektoren sind} \end{aligned}$$

oder nach (c. 39)

$$V.V\alpha\rho\, V\beta\gamma = -\gamma S.\alpha\beta\rho - \beta S.\gamma\alpha\rho \;\ldots\ldots\; (c.\,43)$$

und

$$V.V\beta\gamma\, V\alpha\rho = \beta S.\gamma\alpha\rho + \gamma S.\alpha\beta\rho$$

weil nach (c. 16), wenn in der ersten Seite $V\beta\gamma$, $V\alpha\rho$ umgetauscht werden, das Zeichen geändert werden musz.

Es ist jedoch auch, indem man die Gleichung (c. 43) auf $V.V\beta\gamma\, V\alpha\rho$ anwendet

$$\begin{aligned} V.V\beta\gamma\, V\alpha\rho &= -\rho S\beta\alpha\gamma - \alpha S\rho\beta\gamma \\ &= \rho S\alpha\beta\gamma - \alpha S\beta\gamma\rho \text{ nach } (c.\,38)\,(c.\,39).\;.\; (c.\,44) \end{aligned}$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (c. 43) (c. 44) mit einander entspringt die Formel

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\beta\gamma\rho + \beta S.\gamma\alpha\rho + \gamma S.\alpha\beta\rho. \;\ldots\ldots\; (c.\,45)$$

eine Relation, welche gestattet einen willkürlichen rechten Quotienten mit Hülfe dreier gegebenen rechten Quotienten auszudrücken.

Nimmt man von den beiden Seiten der erhaltenen Gleichung die Indices, so müssen dieselben nach (b. 81) auch einander gleich sein; und weil nach (b. 82)

$$I.\rho S(\alpha\beta\gamma) = I\rho . S\alpha\beta\gamma\,,$$

so ersieht man, dass in der Gleichung (c. 45) die nicht unter dem Zeichen S stehenden Vektoren ebenso gut als Vektoren wie als rechte Quotienten betrachtet werden können.

Es ist dies auch mit einem in ersten Abschnitte erhaltenen Resultate im Einklang.

Denn wenn wir die Gleichung (c. 36) beachten, so lässt sich (c. 45) auch in die Gestalt schreiben (wobei OP $= \rho$ angenommen ist)

$$\rho \text{ Vol. Ppd. OABC} = \alpha \text{ Vol. Ppd. OBCP} + \beta \text{ Vol. Ppd. OCAP} + \\ + \gamma \text{ Vol. Ppd. OABP}\,,$$

und dieses Resultat stimmt ganz mit der Gleichung (a. 36) überein.

Aus der Relation (c. 45) kann noch eine andre hergeleitet werden.

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = \alpha S.\rho V\beta\gamma + \beta S.\rho V\gamma\alpha + \gamma S.\rho V\alpha\beta, \text{ nach } (c.\ 35^*), (b.\ 153)$$

$$= \alpha\frac{\rho V\beta\gamma + V\beta\gamma.\rho}{2} + \beta\frac{\rho V\gamma\alpha + V\gamma\alpha.\rho}{2} + \gamma\frac{\rho V\alpha\beta + V\alpha\beta.\rho}{2} \quad \text{nach } (c.\ 14)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{4}[\alpha(\beta\gamma - \gamma\beta) + \\ + \beta(\gamma\alpha - \alpha\gamma) + \gamma(\alpha\beta - \beta\alpha)] \text{ nach } (c.\ 15)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{4}[(\beta\gamma - \gamma\beta)\alpha + \\ + (\gamma\alpha - \alpha\gamma)\beta + (\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma]\rho$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha\rho V\beta\gamma + \beta\rho V\gamma\alpha + \gamma\rho V\alpha\beta) + \tfrac{1}{2}\, V\beta\gamma.\alpha\rho + \\ + V\gamma\alpha.\beta\rho + V\alpha\beta.\gamma\rho \text{ nach } (c.\ 15).$$

Operirt man jetzt an die beiden Seiten der erhaltenen Gleichung mit dem Symbol V, so bleibt die erste Seite ungeändert; indem man jedes einzelne Glied der zweiten Seite nach Formel (c. 41) behandelt, erhält man

$$\rho S.\alpha\beta\gamma = S\alpha\rho.V\beta\gamma + S\beta\rho.V\gamma\alpha + S\gamma\rho.V\alpha\beta \quad . . . (c.\ 46)$$

Dieselbe Formel hätte auf einfachere Weise erhalten werden können.

Gesetzt es sei

$$\rho S\alpha\beta\gamma = x V\beta\gamma + y V\gamma\alpha + z V\alpha\beta,$$

so gilt es hieraus x, y, z zu bestimmen. Indem man die beiden Seiten dieser Gleichung mit α multiplicirt und nachher den Skalarteil nimmt, wird

$$\begin{aligned} S\alpha\rho . S\alpha\beta\gamma &= xS.\alpha V\beta\gamma + yS.\alpha V\gamma\alpha + zS.\alpha V\alpha\beta \\ &= xS\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Denn

$$S.\alpha V\gamma\alpha = S.(V\gamma\alpha)\alpha = S(\gamma\alpha.\alpha) = S\gamma\alpha^2 = \alpha^2 S\gamma,$$

weil α^2 eine skalare Grösze ist, und der letzte Ausdruck verschwindet, weil γ ein Vektor ist.

In gleicher Weise ist

$$S.\alpha V\alpha\beta = S.\alpha(\alpha\beta) = S\alpha^2\beta = \alpha^2 S\beta = 0.$$

Es ist somit

$$x = S\alpha\rho;$$

In analoger Weise erhält man

$$y = S\beta\rho, \quad z = S\gamma\rho.$$

Aus der Gleichung (c. 46), wo ρ ein willkürlicher Vektor ist, lässt sich noch schlieszen, dass die Bedingung der Complanarität,

$$S.\alpha\beta\gamma = 0$$

auch wie nachstehend geschrieben werden kann.

$$S\alpha\rho V\beta\gamma + S\beta\rho V\gamma\alpha + S\gamma\rho V\alpha\beta = 0, \text{ wenn } \alpha, \beta, \gamma \;|||\; . \quad (c. 47)$$

89. Einige anderen Formeln mögen hier noch Platz finden:

1°.
$$\left.\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha) \\ V.\alpha\beta\gamma &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c. 48)$$

$$\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma &= S.\alpha V\beta\gamma \quad \text{nach } (c. 35^*) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha V\beta\gamma + (V\beta\gamma)\alpha] \quad \text{nach } (c. 14) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha V\beta\gamma - (V\gamma\beta)\alpha] \quad \text{nach } (c. 16) \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(\beta\gamma - S\beta\gamma) - (\gamma\beta - S\gamma\beta)\alpha] \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha) \end{aligned}$$

$$V.\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma - S.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha)$$

Ein allgemeinerer Beweis ist der nachstehende:

$$\begin{aligned} K.\alpha\beta\gamma &= K.\alpha(\beta\gamma) = K\beta\gamma . K\alpha \quad \text{nach } (b. 54) \\ &= \gamma\beta . -\alpha \quad \text{nach } (c. 13),\ (c. 12) = -\gamma\beta\alpha \end{aligned}$$

und deshalb

$$S.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(1+K)\,\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha)$$
$$V.\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(1-K)\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha)$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S.\alpha\beta\gamma\delta &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta + \delta\gamma\beta\alpha) \\ V.\alpha\beta\gamma\delta &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma\delta - \delta\gamma\beta\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (c.\ 49)$$

Denn es wird

$$\begin{aligned} K.\alpha\beta\gamma\delta &= K\delta.K\gamma.K\beta.K\alpha \text{ nach } (b.\ 54) \\ &= -\delta.-\gamma.-\beta.-\alpha \text{ nach } (c.\ 12) \\ &= \delta\gamma\beta\alpha \end{aligned}$$

und dadurch wird die Richtigkeit der Formeln (*c.* 49) einleuchten.

Es kann hieraus auch leicht eine allgemeine Regel gefolgert werden für die Skalar- und Vektorteile der Produkte von Vektoren, je nachdem dieselben eine gerade oder eine ungerade Zahl der Faktoren enthalten.

3°. Bisweilen können die nachstehenden Formeln Nutzen gewähren:

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha\delta\gamma\beta = S.\gamma\beta\alpha\delta \ldots\ldots\ldots (c.\ 50)$$

Denn es ist

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha\,V\beta\gamma\delta = S.\alpha\,V\delta\gamma\beta \text{ nach } (c.\ 42) = S.\alpha\delta\gamma\beta$$
$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.(V\alpha\beta\gamma)\delta = S.(V\gamma\beta\alpha)\delta \text{ nach } (c.\ 42) = S.\gamma\beta\alpha\delta.$$

Weiter ist

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\beta\gamma\delta\alpha = S.\gamma\delta\alpha\beta = S.\delta\alpha\beta\gamma \ \ldots\ldots (c.\ 51)$$

oder cyclische Umtauschung der Faktoren ist gestattet.

Denn

$$S.\alpha\beta\gamma\delta = S.\alpha(\beta\gamma\delta) = S.(\beta\gamma\delta)\alpha \text{ nach } (b.\ 153) = S.\beta\gamma\delta\alpha.$$

Durch die Anwendung dieser Formel auf die in (*c.* 50) erhaltenen Beziehungen kann man neue Umtauschungen erhalten, doch wollen wir nicht näher darauf eingehen.

4°. Im Vorhergehenden fanden wir die allgemeine Formel (*c.* 44) für den Vektorteil des Quaternions $V\alpha\beta.V\gamma\delta$. Wir wollen nun auch den Skalarteil dieses Ausdrucks transformiren. Es ist

$$S.\,V\alpha\beta\,V\gamma\delta = S.\alpha\beta\,V\gamma\delta, \text{ weil } S\alpha\beta\,V\gamma\delta \text{ ein Vektor ist,}$$
$$= S.\alpha\beta\frac{\gamma\delta-\delta\gamma}{2} \text{ nach } (c.\ 15)$$

$$= S\frac{\alpha(\beta\gamma + \gamma\beta)\delta - \alpha\gamma\beta\delta - \alpha\beta\delta\gamma}{2}$$
$$= S\frac{\alpha(\beta\gamma + \gamma\beta)\delta - \alpha\delta\beta\gamma - \alpha\beta\delta\gamma}{2} \text{ nach } (c.\ 50)$$
$$= S\frac{\alpha.2S\gamma\beta.\delta - \alpha.2S\delta\beta.\gamma}{2}$$
$$= S\gamma\beta S\alpha\delta - S\delta\beta S\alpha\gamma$$

oder kurz

$$S.\,V\alpha\beta\,V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta \quad \ldots\ldots \quad (c.\ 52)$$

5⁰. Aus (b 134), angewandt auf den Fall, dass $q = \alpha\beta$, folgt unmittelbar

$$(S.\alpha\beta)^2 - (V.\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 53)$$

Denn es ist

$$(T.\alpha\beta)^2 = (T\alpha.T\beta)^2 = T\alpha^2 T\beta^2 = -\alpha^2.-\beta^2 = \alpha^2\beta^2.$$

Dieselbe Gleichung hätte natürlich aus (c. 14) (c. 15) erhalten werden können

$$(S\alpha\beta)^2 - (V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta - V\alpha\beta)(S\alpha\beta + V\alpha\beta) = (K.\alpha\beta)\alpha\beta =$$
$$= \beta\alpha\alpha\beta = \beta\alpha^2\beta = \alpha^2\beta\beta = \alpha^2\beta^2.$$

Es ist auch leicht mit Hülfe der gefundenen Formeln zu zeigen, dass $IV\alpha\beta$ ein zu α und β senkrechter Vektor ist, wie wir schon aus dem Vorigen wissen, weil $\alpha\beta$ ein Quaternion in der Ebene der Vektoren α, β ist und somit auch $V\alpha\beta$ ein rechter Quotient in dieser Ebene. $IV\alpha\beta$ ist deshalb senkrecht zur Ebene der Vektoren α, β.

Der andere Beweis ist der nachstehende

$$S.(\alpha IV\alpha\beta) = S.\alpha.V\alpha\beta \text{ der Bedeutung nach}$$
$$= S.\alpha(\alpha\beta) = S\alpha^2\beta = a^2 S\beta = 0$$
$$S.(\beta IV\alpha\beta) = S.\beta\, V\alpha\beta = S.(V\alpha\beta)\beta = S.(\alpha\beta)\beta = S.\alpha\beta^2 = \beta^2 S\alpha = 0.$$

Nach (c. 29) schlieszt man hieraus $V\alpha\beta \perp \alpha$ und $\perp \beta$.

90. Es erübrigt noch das Produkt eines Vektors mit oder durch einen Quaternion zu deuten und wir wollen allgemein setzen

$$q\alpha q' = q\,I^{-1}\alpha.q' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c.\ 54)$$

d. h. in einem solchen Produkte soll der Vektor durch den rechten Quotienten ersetzt werden, dessen Index dem Vektor gleich kommt.

Im Artikel 28, Gleichung (b. 2), fanden wir schon Gelegenheit einen Ausdruck von der Form $q\alpha$ zu deuten. Es konnte diese Deutung jedoch nur einen Sinn haben für den Fall, wo der Quaternion q an den Vektor α operirte, wo deshalb q mit α complanar sein muszte.

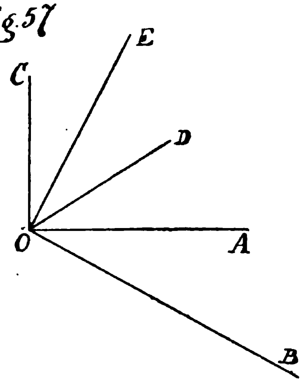
Sehen wir zu, ob wir durch die in der Gleichung (c. 54) ausgesprochene Definition nicht mit jenem Artikel in Widerspruch geraten sind.

Es sei, dies zu untersuchen, in der Figur 57

$$\mathrm{OA} = \alpha, \; q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}, \text{ somit } \mathrm{OB} = q\alpha \text{ nach Art. 28.}$$

Nehmen wir nun weiter den Ausdruck $q\alpha$ in dem durch (c. 53) ausgesprochenen Sinne. α ist sodann als ein rechter Quotient in einer Ebene senkrecht zu OA zu betrachten. Es sei OC die Durchschnittsgerade der Ebene des Quaternions q mit der Ebene des rechten Quotienten α; weiter sei

Fig. 57



$$\mathrm{OC} : \mathrm{OD} = \alpha,$$

womit zugleich angenommen ist, dass

$$\mathrm{OD} \perp \mathrm{OC} \text{ und } \perp \mathrm{OA}.$$

Construirt man noch in der Ebene OCA den Vektor OE derart, dass

$$\mathrm{OE} : \mathrm{OC} = q,$$

so erhalten wir

$$q\alpha = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OC}} \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OD}}.$$

Somit ist $q\alpha$ ein rechter Quotient oder auch in dem vorher erörterten Sinne dessen Index. Wir wollen noch zeigen, dass OB dieser Index ist. Denn es ist, weil OC, OE, OA, OB complanar sind und weil

$$\mathrm{OE} : \mathrm{OC} = q, \; \mathrm{OB} : \mathrm{OA} = q$$

auch

$$\angle \mathrm{COE} = \angle \mathrm{AOB},$$

somit

$$\angle \mathrm{EOB} = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist aber weiter

$$\angle \mathrm{DOB} = \frac{\pi}{2},$$

somit ist OB senkrecht zur Ebene des rechten Quotienten $q\alpha$. Von B aus gesehen erscheint die Drehung von OD nach OE positiv. Endlich ist noch

$$T.\mathrm{OB} = \frac{T.\mathrm{OB}}{T.\mathrm{OA}}\, T.\mathrm{OA} = \frac{T.\mathrm{OE}}{T.\mathrm{OC}}\, T.\mathrm{OA} = \frac{T.\mathrm{OE} : T.\mathrm{OD}}{T.\mathrm{OC} : T.\mathrm{OD}}\, T.\mathrm{OA} =$$
$$= T.\mathrm{OE} : T.\mathrm{OD}.$$

Weil nämlich

$$\alpha = \mathrm{OC} : \mathrm{OD}$$

so ist

$$T\alpha \text{ oder } T.\mathrm{OA} = T.\mathrm{OC} : T.\mathrm{OD}.$$

Und aus diesen Beziehungen geht hervor, dass OB der Index des Quotienten OE : OD ist.

Somit sind die in Art. 28 und die hier gegebene Deutung des Ausdruckes $q\alpha$, für den Fall $q \,|||\, \alpha$, mit einander im Einklange.

91. Eine Formel, welche bisweilen Nutzen gewährt, und welche hier Platz finden möge, ist

$$Sq^2 + (Siq)^2 + (Sjq)^2 + (Skq)^2 = Nq \quad \ldots\ldots (c.\ 55)$$

wo der Quaternion q willkürlich sein kann.

Schreibt man nämlich q in die viergliedrige Form

$$w + xi + yj + zk,$$

so wird

$$Sq = w,\quad Siq = -x,\quad Sjq = -y,\quad Skq = -z,$$

somit ist die erste Seite der Gleichung (c. 55) identisch mit

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \text{ oder mit } Nq \text{ nach } (b.\ 161).$$

Wenn specieller statt q ein Vektor ρ gewählt wird, so geht die vorige Gleichung über in

$$(Si\rho)^2 + (Sj\rho)^2 + (Sk\rho)^2 = N\rho = -\rho^2 \quad \ldots\ldots (c.\ 56)$$

und es ist dies die zumeist sich vorfindende Form jener Gleichung.

92. Wie schon in Art. 78 erwähnt, können bei allen vorkommenden Operationen die Vektoren durch rechte Quaternionen ersetzt werden und umgekehrt.

In gleicher Weise kann man, wenn eine Gleichung zwischen Vektoren gegeben ist, in derselben die Vektoren als rechte Quaternionen betrachten und umgekehrt. Nach Gleichung (*b*. 81) nämlich kann man aus der Gleichheit der Quaternionen zu derjenigen der Indices, d. h. der Vektoren, schlieszen und umgekehrt.

Dieses Princip wollen wir in den nächsten Kapitteln mehrmals anwenden ohne es ausdrücklich hervorzuheben. Wir überlassen sodann dem Studirenden jedesmal zu schlieszen, wo wir von den Indices auf die rechten Quotienten oder umgekehrt übergegangen sind. Bei einigen sehr wenigen Beispielen werden wir dies angeben.

EINIGE GEOMETRISCHEN ÖRTER.

93. Im ersten Abschnitte fanden wir, dass geometrische Örter dadurch dargestellt werden, dass ein Vektor ρ als Funktion zweier oder dreier Vektoren und einer oder mehrerer Skalargröszen u, v, ... erscheint.

Den Vektor ρ wollen wir den abhängigen Veränderlichen, die Gröszen $u, v, \ldots$ die unabhängigen Veränderlichen nennen.

Die in den beiden vorigen Abschnitten eingeführten Gröszen und die daran geknüpften Betrachtungen setzen uns nunmehr in den Stand auch ohne Zuhülfenahme unabhängig veränderlicher Skalare geometrische Örter darzustellen und wir wollen im Folgenden einige einfachen derselben näher ins Auge fassen.

94. In Art. 20 ergab sich, dass mit

$$\rho = \frac{\alpha + u\beta}{1 + u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 1)$$

bei veränderlichem u eine Gerade, die Verbindungslinie der Endpunkte der Vektoren α, β, bezeichnet wird. Man erhält daraus

$$(1 + u)\rho = \alpha + u\beta$$

oder

$$\rho + u\rho = \alpha + u\beta$$
$$u(\rho - \beta) = \alpha - \rho.$$

Es sind hierin α, β, ρ als Vektoren zu betrachten. Doch wird die Gleichheit auch bestehen bleiben, wenn man α, β, ρ als rechte Quotienten auffasst nach (b. 81) (b. 82). Indem in diesem Falle beiderseits mit $\frac{1}{\rho-\beta}$ multiplicirt wird, erhält man

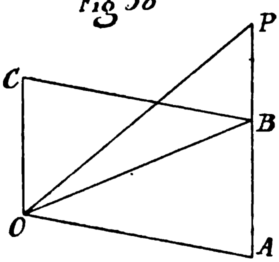
$$u=\frac{\alpha-\rho}{\rho-\beta} \text{ oder } -u=\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\,2)$$

Die zweite Seite ist ein Quaternion, und derselbe muss dem Skalare $-u$ gleich sein; es folgt daraus unmittelbar, dass die nachstehende Relation gültig sein musz

$$V\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\,3)$$

Umgekehrt kann aber auch ($d.$ 1) aus ($d.$ 3) zurückerhalten werden und somit stellt die letzte Gleichung, ebenso gut wie ($d.$ 1) die Verbindungsgerade der Endpunkte der Vektoren α, β dar. Versuchen wir dieses Resultat unabhängig von dem Vorhergehenden zu deuten; mit Hülfe der Figur 58 gelingt dies leicht.

Fig. 58



Es sei

$$\rho=\text{OP}, \ \alpha=\text{OA}, \ \beta=\text{OB},$$

und dadurch

$$\text{AP}=\rho-\alpha, \ \text{BP}=\rho-\beta.$$

Die Gleichung ($d.$ 3) sagt aus, dass die Vektoren AP, BP entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, und dies kann nur der Fall sein, wenn P auf der Geraden AB liegt.

Es kann der Gleichung ($d.$ 3) auch eine andere Gestalt erteilt werden. Denn es folgt aus ($d.$ 3), dass

$$V\left(\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}-1\right)=0 \text{ nach } (b.\,137)$$

oder

$$V\frac{\beta-\alpha}{\rho-\beta}=0.$$

Nun musz aber auch weiter

$$V\frac{\rho-\beta}{\beta-\alpha}=0$$

sein. Indem wir einen neuen Vektor

$$\gamma = \beta - \alpha = OC = AB$$

einführen, ersehen wir, dass

$$V\frac{\rho - \beta}{\gamma} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,4)$$

eine Gerade darstellt, welche durch den Endpunkt des Vektors β parallel zu γ gezogen wird.

Man hätte die Gleichung ($d.$ 3) noch auf andre Weise unmittelbar als Gleichung einer Geraden erhalten können.

Denn

$$TV(\alpha - \rho)(\beta - \rho)$$

ist nach ($c.$ 33) dem Flächeninhalte des Dreiecks PAB gleich. Nach unsren Voraussetzungen soll aber dieses Dreieck verschwinden, und es musz somit ρ der Gleichung genügen:

$$TV(\alpha - \rho)(\beta - \rho) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,5)$$

Das Verschwinden des Tensors eines Quaternions führt aber das Verschwinden des Quaternions selbst mit sich [1]). Somit erhalten wir

$$V(\alpha - \rho)(\beta - \rho) = 0$$

und weil $(\beta - \rho)^{-2}$ eine Skalargrösze ist, folgt hieraus, wenn die zuletzt erhaltene Relation durch $(\beta - \rho)^{-2}$ dividirt wird, die Gleichung ($d.$ 3).

In derselben Weise kann anstatt ($d.$ 4) geschrieben werden

$$V(\rho - \beta)\gamma = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,4^*)$$

95. Auf analogem Wege kann leicht der Bedingung Ausdruck gegeben werden, dass der Endpunkt eines Vektors ρ der Ebene der Endpunkte dreier Vektoren α, β, γ angehört. Es müssen sodann nämlich die Vektoren

$$\alpha - \rho, \; \beta - \rho, \; \gamma - \rho$$

---

1) Man sagt nämlich ein Quaternion verschwinde, wenn dessen Zähler verschwindet, während dasselbe nicht von dem Nenner gilt. (Vergl. Art. 38, Gl. 28). Somit

$$q = \frac{0}{\alpha} = 0$$

Es ist sodann aber weiter

$$Tq = \frac{T0}{T\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad Uq = \frac{U0}{U\alpha} \gtrless 0$$

denn der Einheitsvektor der Grösze Null und im allgemeinen eines jeden Skalars verschwindet nicht, sondern wird unbestimmt.

Aus $Tq = 0$ allein folgt daher auch $q = 0$.

complanar sein, und somit nach (c. 37)

$$S.(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 6)$$

Es lässt sich diese Gleichung wieder leicht umgestalten. Denn wenn man das Produkt berechnet, und beachtet, dass

$$S.\rho^2\gamma,\; S.\rho\beta\rho,\; S.\alpha\rho^2,\; S.\rho^3$$

verschwinden, erhält man

$$S[\alpha\beta\gamma - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)\rho] = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 7)$$

Diese Gleichung ist somit, wie die Gleichung (d. 6), als die Quaterniongleichung der Ebene zu betrachten, welche durch die Endpunkte der Vektoren α, β, γ hindurch geht.

Im allgemeinen kann jedoch die Quaterniongleichung einer Ebene einfacher erhalten werden, wenn man dieselbe auf andre Weise bestimmt, z. B. durch einen zur Ebene gehörigen Punkt und durch eine Senkrechte zur Ebene.

Es sei der Endpunkt eines Vektors $\beta = \mathrm{OB}$ ein gegebener Punkt der zum Vektor $\alpha = \mathrm{OA}$ senkrechten Ebene; ist P ein willkürlicher Punkt dieser Ebene, so musz der Vektor

$$\mathrm{BP} = \rho - \beta$$

senkrecht zu OA sein, d. h. es musz

$$S\frac{\rho - \beta}{\alpha} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d. 8)$$

Es ist diese Gestalt der Gleichung einer Ebene in (d. 7) enthalten, wenn man statt derselben schreibt

$$S[\rho(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - \alpha\beta\gamma] = 0$$

und wie nachstehend transformirt

$$S.\rho V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - S\alpha\beta\gamma = 0$$

oder

$$S\left[\rho - \frac{S\alpha\beta\gamma}{IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)}\right] IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0 \, . \quad (d. 8^*)$$

Hieraus schlieszt man, dass die Ebene, welche die Endpunkte der drei Vektoren α, β, γ enthält, senkrecht zum Vektor

$$IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$$

sein musz, und weiter, dass das Lot, welches aus dem Vektorenanfangspunkt auf jene Ebene gefällt wird, durch

$$S\alpha\beta\gamma . (V\beta\gamma + V\gamma\alpha + V\alpha\beta)^{-1}$$

dargestellt wird.

Es lässt sich dieses Resultat auch leicht direkt nachweisen. Wenn man nämlich setzt

$$IV(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = r,$$

so wird

$$S\alpha r = S.\alpha V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S\alpha(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S.\alpha\beta\gamma$$

und in gleicher Weise

$$S.\beta r = S.\alpha\beta\gamma, \quad S.\gamma r = S.\alpha\beta\gamma,$$

und hieraus

$$S(\beta - \gamma) r = 0, \quad S(\gamma - \alpha) r = 0, \quad S(\alpha - \beta) r = 0$$

d. h. es ist nach (c. 29) r senkrecht zu den Vektoren $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$, $\alpha - \beta$, welche sämtlich in der durch die Endpunkte von α, β, γ gehenden Ebene enthalten sind.

In dem besondere Falle, dass β der Richtung nach mit α zusammenfällt, geht (d. 8) über in

$$S\frac{\rho}{\alpha} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 9)$$

wo a ein Skalar ist. Es wird hiermit eine Ebene in einem Punkt der Geraden OA senkrecht zu OA bezeichnet.

Die Gleichung (d. 8) einer Ebene kann leicht noch umgestaltet werden. Setzen wir nämlich

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = q$$

und erinnern wir uns der Formel (b. 116), aus welcher gefolgert werden kann

$$N(q + 1) = Nq + 1 + 2\,Sq$$
$$N(q - 1) = Nq + 1 - 2\,Sq$$

so ersieht man, dass wenn die Gleichung (d. 8) stattfindet, zugleich auch

$$N(q + 1) = N(q - 1) \text{ oder } \frac{N(q + 1)}{N(q - 1)} = 1$$

und schlieszlich

$$T\frac{q + 1}{q - 1} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 9^*)$$

Umgekehrt kann aus (d. 9*) die Gleichung (d. 8) direkt hergeleitet werden. Es kann deshalb auch (d. 9*) als die Gleichung der Ebene betrachtet werden.

96. Wir wollen uns in diesem Artikel mit der Kugel beschäf-

tigen. Es ist ein Leichtes eine Form der Gleichung derselben anzugeben. Denn wenn A der Mittelpunkt, P irgend ein Punkt der Kugeloberfläche ist, und $OA = \alpha$, $OP = \rho$ gesetzt wird, so soll der Vektor AP eine vorgeschriebene Länge $T\beta$ haben, und dies wird durch die nachstehende Gleichung ausgesprochen

$$T(\rho - \alpha) = T\beta \text{ oder } T\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 10)$$

Dieser Gleichung kann leicht eine andere Gestalt erteilt werden. Denn nach (b. 134) ist dieselbe aequivalent mit

$$\left(S\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 - \left(V\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 11)$$

einer Form, welche deshalb wichtig ist, weil dieselbe die Kugel als einen besonderen Fall des Ellipsoids erscheinen lässt, dessen Gleichung wir nachher angeben wollen.

Hätte man vor der Anwendung der Gleichung (b. 131) in (d. 10) Zähler und Nenner des Bruches verwechselt, so hätte man erhalten

$$\left(S\frac{\beta}{\rho - \alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\beta}{\rho - \alpha}\right)^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 12)$$

Ein besonderer Fall ist derjenige, dass

$$T\beta = T\alpha.$$

Es geht sodann (d. 10) über in

$$T\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = 1 \text{ oder } N\left(\frac{\rho}{\alpha} - 1\right) = 1.$$

Nach (b. 116) kann hierfür geschrieben werden:

$$N\frac{\rho}{\alpha} - 2\,S\frac{\rho}{\alpha} = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2} = S\frac{\rho}{\alpha} : N\frac{\rho}{\alpha} = S\frac{\alpha}{\rho} \text{ nach } (b.\ 100)$$

und schliesslich

$$S\frac{2\,\alpha}{\rho} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 13)$$

97. Wenn wir die Resultate der beiden vorhergehenden Artikel mit einander in Verbindung setzen, so geraten wir zu dem Ergebnis, dass die beiden Gleichungen (d. 14) zusammen

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0 \text{ und } T\frac{\rho - \gamma}{\delta} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 14)$$

einen Kreis darstellen als Durchschnittscurve einer Ebene und einer Kugel.

Ein besonderer Fall ist es, welcher uns am wichtigsten scheint, nämlich derjenige, wo $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$. Die Ebene geht sodann durch den Mittelpunkt A der Kugel. Das System der Gleichungen

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0,\ T\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 1 \ldots\ldots\ldots (d.\,15)$$

bestimmt somit einen grö szten Kreis der Kugel, aus dem Endpunkte des Vektors α mit dem Radius $T\beta$ in einer Ebene senkrecht zum Vektor β beschrieben. Die diesen Gleichungen genügenden Vektoren gehören somit der Fläche eines Kegels an, dessen Scheitel O und dessen Grundfläche jener Kreis ist, oder in anderen Worten: der Vektor ρ beschreibt einen Vektorkegel, wie wir ihn im ersten Abschnitt definirten.

Es musz daher möglich sein aus den beiden Gleichungen ($d.$ 15) den Vektor ρ in die Gestalt $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ zu erhalten, und in der Tat gelingt dies. Denn wenn man die Gleichung ($d.$ 11) statt der zweiten der Relationen ($d.$ 15) nimmt, so wird dieselbe, indem man die erste dieser Gleichungen beachtet

$$\left(V\frac{\rho - \alpha}{\beta}\right)^2 = -1$$

oder nach der allgemeinen Theorie der Potenzen und Wurzeln von Quaternionen

$$V\frac{\rho - \alpha}{\beta} = (-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots (d.\,16)$$

Indem man zu diesem Resultat die erste der Gleichungen ($d.$ 15) addirt, erhält man

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1} \text{ und hieraus } \rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta.$$

Es bedeutet hierin ρ den Vektor irgend eines Punktes des durch die Gleichungen ($d.$ 15) dargestellten Kreises und $\sqrt{-1}$ einen rechten Versor in einer bestimmten Ebene wirksam.

Wenn nun aber die Gleichung

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{-1}$$

die sämtlichen Punkte des Kreises darstellen soll, so müssen auch unter dem Symbole $\sqrt{-1}$ sämtliche in allen verschiedenen Ebenen wirksamen rechten Versoren verstanden werden und dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit der im ersten Abschnitt gegebenen Deutung des Symbols $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$.

98. Als besonders wichtig für unsre Theorie der imaginären Grösze $\sqrt{-1}$ möge das nachstehende betrachtet werden.

In den Gleichungen des vorigen Artikels

$$S\frac{\rho-\alpha}{\beta}=0\,,\quad V\frac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{-1}\,,\quad \frac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{-1}\quad . \ (d.\ 17)$$

war ρ der Vektor eines bestimmten Punktes eines Kreises und $\sqrt{-1}$ auch ein bestimmter rechter Versor.

Wird in dem Symbole

$$\rho=\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$$

die Grösze ρ als Vektorkegel betrachtet, so ist der Versor $\sqrt{-1}$ ein unbestimmter.

Wir geraten somit zur Unterscheidung zweier Symbole $\sqrt{-1}$. Dasselbe kann nämlich *einen einzigen* rechten Versor in einer willkürlichen aber bestimmten Ebene bedeuten und in diesem Falle ergibt die Substitution der dritten der Gleichungen ($d.$ 17) in die beiden ersteren

$$S.\sqrt{-1}=0\,,\qquad V.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}.$$

Es kann aber auch $\sqrt{-1}$ *die Gesamtheit* der rechten Versoren, in allen verschiedenen Ebenen wirksam gedacht, darstellen. Wie wir im Art. 79 ersahen, kommt dem Zeichen $\sqrt{-1}$ sodann aber Skalarcharakter zu, indem wir dort die Gleichungen fanden

$$S.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,,\quad V.\sqrt{-1}=0.$$

99. Man pflegt zu sagen, die Gleichung

$$\rho=\alpha,$$

wo $\alpha = \mathrm{OA}$, stelle den Punkt A dar.

Allgemeiner wollen wir sagen, die Gleichung

$$\rho=x\alpha+y\beta+z\gamma\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (d.\ 18)$$

wo α, β, γ willkürliche Vektoren, x, y, z willkürliche, aber bestimmte Skalare bedeuten, gehöre einem Punkte an und wir können sodann zwei Fälle unterscheiden.

1°. x, y, z, α, β, γ sind reelle Gröszen.

Die Gleichung ($d.$ 18) stellt sodann den Endpunkt des Vektors, dessen Componenten nach den Richtungen α, β, γ den Gröszen $x\alpha$, $y\beta$, $z\gamma$ gleich kommen.

2°. Von den Symbolen x, y, z, α, β, γ ist eins oder sind mehrere complex.

Setzt man

$$x = x_1 + \sqrt{-1}\, x_2, \quad y = y_1 + \sqrt{-1}\, y_2, \quad z = z_1 + \sqrt{-1}\, z_2,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \sqrt{-1}\, \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \sqrt{-1}\, \beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + \sqrt{-1}\, \gamma_2,$$

wo x_1, x_2, ... α_1, α_2, ... reelle Skalare und Vektoren bedeuten, so ergibt sich aus (*d*. 18)

$$\rho = x_1\alpha_1 + y_1\beta_1 + z_1\gamma_1 - x_2\alpha_2 - y_2\beta_2 - z_2\gamma_2$$
$$+ \sqrt{-1}\,(x_2\alpha_1 + y_2\beta_1 + z_2\gamma_1 + x_1\alpha_2 + y_2\beta_1 + z_1\gamma)$$

Man kann nun weiter α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 mittelst dreier nicht complanaren Vektoren λ, μ, ν linear ausdrücken und erhält sodann eine Relation von der Form

$$\rho = a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu + \sqrt{-1}\,(a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu) \quad . \; . \quad (d.\ 19)$$

oder

$$\rho = a\lambda + b\mu + c\nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d.\ 20)$$

wo nun a, b, c complexe Skalare, λ, μ, ν aber reelle Vektoren sind.

In diesem Falle gehört der Vektor ρ der Gleichungen (*d*. 18), (*d*. 19), (*d*. 20) einem Vektorkegel an oder, wie wir sagen wollen, einem jeden Punkte der Kreisperipherie, welche die Grundfläche jenes Vektorkegels ist.

Im Anschluss an den Anfang dieses Artikels sagen wir sodann weiter, die Gleichung (*d*. 18) stelle einen imaginären Punkt dar und diese Redensart führt zur nachstehenden wichtigen Identificirung:

Ein imaginärer Punkt ist eine Kreisperipherie mit einem bestimmten Radius um einen bestimmten Mittelpunkt in einer bestimmten Ebene beschrieben [1].

---

1) Herr Prof. KORTEWEG in Amsterdam hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, dass im Jahre 1889 schon von zwei französischen Mathematikern, den Herren LAGUERRE und TARRY, eine geometrische Darstellung imaginärer Punkte in der Ebene in dem Pariser Congres der „Association française pour l'avancement des sciences" vorgetragen worden ist. Soweit es mir durch das Wohlwollen des Herrn Prof. SCHOUTE in Groningen möglich gewesen ist die seitdem veröffentlichten Theorieen kennen zu lernen, meine ich schliessen zu können, dass Herr LAGUERRE als Darstellung des imaginären Punktes in der Ebene wählt die Durchschnittspunkte des von mir zu Hülfe gezogenen Cykels mit einer Ebene, während Herr TARRY

Die Namen Radius und Mittelpunkt wollen wir auch bei dem imaginären Punkt beibehalten. Die Grösze $a_1\lambda + b_1\mu + + c_1\nu$ in (*d.* 19) soll der Mittelpunktsvektor, $a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu$ die Normale des imaginären Punktes heiszen. Die Länge der Normale ist dem Radius des imaginären Punktes gleich.

100. Wir haben in dieser Weise eine geometrische Darstellung imaginärer Punkte gewonnen. Allein eine völlige Befriedigung wird dieselbe schwer gewähren können, weil dabei

---

zwei andere Punkte dazu verwendet, nämlich den Anfangs- und den Endpunkt der Normale eines Cykels.

Den Weg, auf welchem die genannten Mathematiker zu dieser Darstellung geraten sind, findet sich nicht verzeichnet; doch glaube ich berechtigt zu sein anzunehmen, dass derselbe mit der Theorie der Quaternionen in keinerlei Beziehung steht. Im Art. 105* werde ich näher auf die Betrachtungen des Herrn Tarry zurückkommen.

Hrn Prof. Korteweg verdanke ich auch die Bemerkung, dass man in der analytischen Geometrie zu derselben geometrischen Darstellung imaginärer Punkte wie die von mir vertretene, gelangt, wenn man bei rechtwinkligen Coordinaten als Definition der Distanz d zweier Punkte a, b, c; a_1, b_1, c_1, welche reell oder imaginär sein können, wählt

$$d^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2$$

und nun die reellen Punkte x, y, z bestimmt, welche von dem imaginären Punkte $a_1 + a_2\sqrt{-1}$, $b_1 + b_2\sqrt{-1}$, $c_1 + c_2\sqrt{-1}$ eine Distanz Null haben.

Denn dadurch ergibt sich

$$(x - a_1 - a_2\sqrt{-1})^2 + (y - b_1 - b_2\sqrt{-1})^2 + (z - c_1 - c_2\sqrt{-1})^2 = 0$$

oder

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

und

$$a_2(x - a_1) + b_2(y - b_1) + c_2(z - c_1) = 0.$$

Die Punkte x, y, z sind somit enthalten in dem Durchschnitt einer Kugel um den Mittelpunkt a_1, b_1, c_1 mit dem Radius $\sqrt{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}$ beschrieben in einer Ebene, welche den Kugelmittelpunkt enthält und senkrecht ist zum Vektor mit den Projectionen a_2, b_2, c_2 auf die Coordinatenachsen.

In ähnlicher Weise kann man auch in der Quaternionentheorie verfahren, wenn man die Annahme macht ein konisch spaltender Quaternion verschwinde, wenn dessen Tensor der Null gleich kommt.

Denn aus

$$\rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

folgt sodann

$$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1}\,\beta) = 0$$

Oder nach (*b.* 210)

$$N(\rho - \alpha) = N\beta \text{ und } S(\rho - \alpha)\beta = 0$$

Gleichungen, welche ebenfalls eine Kugel und eine Ebene darstellen.

zwei conjugirt imaginäre Punkte durch dasselbe Gebilde veranschaulicht werden.

Diesem Übelstande abzuhelfen erscheint es wünschenswert mit dem Begriffe der Spaltung eines Vektors denjenigen einer gewissen dabei auftretenden Reihenfolge der einzelnen durch die Spaltung entstandenen Elemente zu verbinden.

Wir wollen daher annehmen, das Symbol $\sqrt{-1}$ an einen Vektor β operirend, spalte denselben in einen Kreis, dessen Elementarpunkte in einer bestimmten Richtung auf einander folgen z. B. in einer Richtung, welche von der Seite aus, nach welcher β errichtet ist, gesehen, der Bewegung der Zeiger einer Uhr entgegengesetzt erscheint.

Einem derartigen Kreise ist schon der Name »Cykel" beigelegt worden. Die Richtung, in die der Kreis beschrieben gedacht wird, kann durch eine hinzugefügte Pfeilspitze verzeichnet werden. Ein willkürlicher Kreis enthält im allgemeinen zwei Cykel entgegengesetzter Richtung.

Es wird nun aber weiter einleuchten, dass der Cykel

$$-\sqrt{-1}\,\beta \text{ oder } \sqrt{-1}\,(-\beta)$$

von der Seite des Vektors $-\beta$ aus gesehen mit demjenigen, welcher $\sqrt{-1}\,\beta$ darstellt, von der Seite des Vektors β aus betrachtet, übereinstimmen musz. In absolutem Sinne genommen muss sodann aber der Cykel $-\sqrt{-1}\,\beta$ dem andern $\sqrt{-1}\,\beta$ entgegengesetzt sein.

Somit können wir auch weiter das nachstehende Resultat aussprechen:

Die beiden conjugirt imaginären Punkte $\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$, $\alpha-\sqrt{-1}\,\beta$ *werden durch zwei einander entgegengesetzte, einen einzigen Kreis bildende Cykel geometrisch dargestellt.*

Unter der Normale eines Cykels $\alpha+\sqrt{-1}\,\beta$ wollen wir stets die Achse desselben verstehen nach *der* Richtung gezogen, von welcher aus gesehen der Cykel entgegengesetzt der Bewegung der Zeiger einer Uhr durchlaufen wird. Die Normalen zweier conjugirt imaginären Punkte sind somit einander entgegengesetzt, während der Radius und der Mittelpunkt derselben übereinstimmen.

101. Wenn ein Vektor

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (d. 21)$$

wo α, β, γ reell sind und x, y, z complex sein können, einer Bedingung

$$f(x, y, z) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (d. 22)$$

unterworfen ist, so beschreibt ρ eine Oberflache, wie schon im ersten Abschnitt erörtert ist.

Dabei können aber zwei Fälle unterschieden werden:

1°. Die Coefficienten der Skalare x, y, z in (d. 22) sind reell. In diesem Falle wird auch die von ρ beschriebene **Oberfläche** eine **reelle** genannt.

Setzen wir voraus, die Funktion f könne nach dem Taylorschen Satze dargestellt werden und setzen wir weiter

$$x = x_1 + x_2 \sqrt{-1}, \; y = y_1 + y_2 \sqrt{-1}, \; z = z_1 + z_2 \sqrt{-1} \quad (d. 23)$$

und nach einer gebräuchlichen symbolischen Schreibweise

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p f(x_1, y_1, z_1) = \Delta_p f$$

so lassen sich aus (d. 22) zwei andere Gleichungen herleiten von der Form

$$\left.\begin{aligned} f - \tfrac{1}{2}\Delta_2 f + \frac{1}{2.3.4}\Delta_4 f \ldots\ldots = 0 \\ \Delta_1 f - \frac{1}{2.3}\Delta_3 f + \frac{1}{2.3.4.5}\Delta_5 f \ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (d. 24)$$

wo f stets anstatt $f(x_1, y_1, z_1)$ geschrieben ist.

Es geht weiter (d. 21) über in

$$\rho = x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma + \sqrt{-1}\,(x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma) \;.\; (d. 25)$$

Indem man nun Werte x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_3 bestimmt, welche den Relationen (d. 24) genügen und dieselben bei (d. 25) verwendet, findet man die reellen und die imaginären Punkte der reellen Oberfläche (d. 22).

Eine allgemeine Bemerkung mag hierbei noch Platz finden. Aus der Form der Gleichungen (d. 24) ist nämlich unmittelbar einleuchtend, dass, wenn denselben ein Wertsystem x_1, y_1 z_1, x_2, y_2, z_2 genügt, ebenfalls das System x_1, y_1, z_1, $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$ diesen Relationen Genüge leisten musz.

Bei einer reellen Oberfläche kommen somit die imaginären Punkte stets paarweise conjugirt vor, sodass dieselben stets durch Kreise, in den beiden Richtungen durchlaufen, dargestellt werden.

2°. Die Coefficienten der Skalare x, y, z in (*d.* 22) sind complex. Die von dem Vektor ρ beschriebene Oberfläche wollen wir sodann eine allgemeine Oberfläche nennen.

Wenn f z. B. eine lineare Gleichung ist mit complexen Coefficienten, so haben wir es mit einer allgemeinen Ebene zu tun. In derselben Weise wollen wir von einer allgemeinen Oberfläche zweiten, dritten Grades u. s. w. reden.

Wenn man nun die Substitution (*d.* 23) in (*d.* 22) vornimmt und die reellen Glieder von den imaginären trennt, so erhält man wieder zwei Relationen, denen die Gröszen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 genügen müssen, die aber eine ganz andre Form als (*d.* 24) haben.

Es wird sich nun finden, dass die imaginären Punkte der allgemeinen Oberfläche nicht stets paarweise conjugirt vorkommen, sodass dieselben in diesem Falle durch Cykel veranschaulicht werden.

102. Wenn mit (*d.* 21) zwei Gleichungen von der Form (*d.* 22) verbunden sind, sodass ρ einer Raumcurve angehört, so ergeben sich hieraus vier Gleichungen, entweder paarweise von der Form (*d.* 24) oder von andrer Gestalt.

Man kann sodann im allgemeinen zwischen den vier Relationen entweder x_2, y_2, z_2 oder x_1, y_1, z_1 eliminiren.

In dem ersten Falle stellt die dadurch entstandene reelle Gleichung in x_1, y_1, z_1 die reelle Fläche der Mittelpunkte der imaginären Punkte, welche der Raumcurve angehören, dar.

Ist die Raumcurve eine reelle Ebene, so ist diese Fläche die Ebene der Curve.

In dem zweiten Falle wird eine Gleichung in x_2, y_2, z_2 erhalten, welche eine Fläche darstellt derart, dass die sämtlichen nach den Punkten dieser Fläche von dem Anfangspunkte aus gezogenen Vektoren Normalen der zur Raumcurve gehörigen imaginären Punkte sein können. Wir wollen diesen Ort die reelle Fläche der coinitialen Normalen der imaginären Punkte nennen.

Zu jedem Mittelpunkte eines imaginären Punktes oder zu jedem Wertsysteme für x_1, y_1, z_1 gehören im allgemeinen eine bestimmte Anzahl Wertsysteme für x_2, y_2, z_2 d. h. auch eine bestimmte Anzahl Normalen des imaginären Punktes. Die Punkte, welche auf den beiden soeben definirten Flächen diesen Wertsystemen entsprechen, wollen wir als correspondirende Punkte der beiden Flächen betrachten. Jede willkürlich gewählte Raumcurve bestimmt in dieser Weise im allgemeinen eine Correspondenz der Punkte zweier reellen Flächen.

103. Die allgemeinen Betrachtungen der vorhergehenden Artikel wollen wir nun auf einige einfachen Fälle anwenden.

Wir werden nämlich zuerst die Lage der imaginären Punkte einer reellen Ebene untersuchen, und wollen dazu den Quaternionencalcül vorzugsweise verwenden.

Die Gleichung der Ebene sei

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 26)$$

wo α, β zwei reelle Vektoren bedeuten.

Setzen wir nun

$$\rho = \rho_1 + \sqrt{-1}\,\rho_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 27)$$

so ergibt die Substitution in die vorhergehende Gleichung

$$S(\rho_1 - \alpha)\beta = 0 \text{ und } S\rho_2\beta = 0 \quad \ldots\ldots, \quad (d.\ 28)$$

Die erste dieser Relationen sagt aus, dass die Mittelpunkte sämtlicher imaginären Punkte der Ebene in derselben enthalten sein müssen.

Nach der zweiten ist die Normale zur Ebene senkrecht zu den Normalen der imaginären Punkte. Diese letzeren sind somit der gegebenen Ebene parallel und die Ebenen der imaginären Punkte sind senkrecht zur gegebenen Ebene. Man erhält daher den Satz:

Die imaginären Punkte einer reellen Ebene sind Kreise, deren Mittelpunkte in derselben enthalten sind, während die Ebenen der imaginären Punkte senkrecht zur gegebenen Ebene sind und der Radius willkürlich gewählt werden kann.

Bei einer reellen Geraden

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 29)$$

ergibt die Substitution ($d.$ 27) das System

$$V(\rho_1 - \alpha)\beta = 0 \text{ und } V\rho_2\beta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 30)$$

Die beiden nach dem vorhergehenden Artikel zu einer Raumcurve in Beziehung stehenden Flächen bestehen bei einer Geraden nicht. Die Mittelpunkte der imaginären Punkte sind nach (*d.* 30) die reellen Punkte der Geraden und die Normalen der imaginären Punkte fallen der Richtung nach mit der gegebenen Geraden zusammen, während die Länge derselben willkürlich bleibt. Wir schlieszen hieraus:

Die imaginären Punkte einer reellen Geraden sind Kreise mit willkürlichen Radien um die Punkte der Geraden als Mittelpunkte in Ebenen senkrecht zur gegebenen Geraden beschrieben.

Noch wollen wir die Lage der imaginären Punkte einer reellen Kugel untersuchen. Dieselbe sei

$$T(\rho - \alpha) = T\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\ 31)$$

Die Substitution (*d.* 27) ergibt nach der Trennung der reellen und der imaginären Teile

$$N(\rho_1 - \alpha) = N\rho_2 + N\beta \text{ und } S(\rho_1 - \alpha)\,\rho_2 = 0 \; . \; (d.\ 32)$$

Die erste dieser Gleichungen spricht aus, dass die Länge der Normale des imaginären Punktes der Länge der Tangente gleich ist, welche von dem Mittelpunkte des imaginären Punktes aus an die Kugel geht. Zugleich sagt jene Gleichung, dass der Mittelpunkt des imaginären Punktes auszerhalb der Kugel liegt.

Die zweite Gleichung besagt weiter, dass die Richtung der Normale des imaginären Punktes zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Kugel und des imaginären Punktes senkrecht ist, dass somit die Ebene des imaginären Punktes jene Verbindungsgerade enthält.

104. Ein Paar Beispiele der allgemeinen Flächen wollen wir hinzufügen, obgleich wir nur einige wenige Resultate im Grundriss herleiten wollen.

Es wird nämlich augenscheinlich durch die auseinandergesetzte Theorie ein ausgedehntes Gebiet für neue Untersuchungen geöffnet, auf das weiter einzugehen, wir für jetzt verzichten müssen.

Die allgemeine Ebene sei durch das System der Gleichungen

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\ 33)$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 34)$$

in denen α, β, γ reelle Vektoren sind, x, y, z, a, b, c, d, ρ aber complexe Gröszen bedeuten können, definirt.

Wenn die Gleichung ($d.$ 33) *durch* $V\beta\gamma$ multiplicirt und an die dadurch erhaltene Gleichung mit dem Symbol S operirt wird, so ergibt sich

$$x = \frac{S\rho\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma}$$

und in gleicher Weise entsteht

$$y = \frac{S\rho\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma}, \quad z = \frac{S\rho\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Diese Ausdrücke können in ($d.$ 34) substituirt werden. Das Resultat lautet

$$S\,[\rho\,(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) + d\alpha\beta\gamma] = 0$$

oder

$$S\left(\rho + \frac{dS\alpha\beta\gamma}{a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta}\right)(a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta) = 0.$$

Hierbei sei bemerkt, dass im allgemeinen

$$a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta \text{ und } \frac{-\,dS\alpha\beta\gamma}{a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta}$$

Vektorkegel sein werden. Setzen wir anstatt dieser Gröszen die einfachen Symbole μ, λ so ist dargetan, dass die Gleichung der allgemeinen Ebene stets in die Form

$$S\,(\rho - \lambda)\,\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 35)$$

gebracht werden kann, wo nun ρ, λ, μ im allgemeinen Vektorkegel bedeuten.

Es sei nun weiter

$$\rho = \rho_1 + \sqrt{-1}\,\rho_2, \quad \lambda = \lambda_1 + \sqrt{-1}\,\lambda_2, \quad \mu = \mu_1 + \sqrt{-1}\,\mu_1 \quad (d.\ 36)$$

gesetzt, so ergibt sich aus ($d.$ 35) das System

$$\left.\begin{array}{l} S\,(\rho_1 - \lambda_1)\,\mu_1 = S\,(\rho_2 - \lambda_2)\,\mu_2 \\ \text{und} \\ S\,(\rho_1 - \lambda_1)\,\mu_2 = -\,S\,(\rho_2 - \lambda_2)\,\mu_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 37)$$

und eine einfachere Gestalt kann diesen Relationen noch erteilt werden durch die Einführung der Gröszen σ_1, σ_2 mittelst der Gleichungen

$$\rho_1 - \lambda_1 = \sigma_1, \quad \rho_2 - \lambda_2 = \sigma_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 38)$$

Man erhält dadurch nämlich

$$S\sigma_1\mu_1 = S\sigma_2\mu_2 \text{ und } S\sigma_1\mu_2 = -S\sigma_2\mu_1 \quad \ldots\ldots (d.\,39)$$

Aus der Form dieser Gleichungen entnehmen wir, dass denselben genügt wird durch die Annahme

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= x\mu_1 V\mu_1\mu_2 + y\mu_2 V\mu_1\mu_2 + z V\mu_1\mu_2 \\ \sigma_2 &= -y\mu_1 V\mu_1\mu_2 + x\mu_2 V\mu_1\mu_2 + u V\mu_1\mu_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (d.\,40)$$

wo x, y, z, u reelle aber beliebige Skalare bedeuten.

Diese Werte sagen aus, dass die Punkte σ_1, σ_2 auf die Ebene durch μ_1, μ_2 gebracht in die Punkte

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= x\mu_1 V\mu_1\mu_2 + y\mu_2 V\mu_1\mu_2 \\ \tau_2 &= -y\mu_1 V\mu_1\mu_2 + x\mu_2 V\mu_1\mu_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (d.\,41)$$

projicirt werden.

Führen wir zwei neue Vektoren ν_1, ν_2 ein, welche aus μ_1, μ_2 dadurch erhalten werden, dass man die letzeren in ihrer Ebene um einen rechten Winkel drehen lässt, sodass

$$\nu_1 = \mu_1 UV\mu_1\mu_2, \quad \nu_2 = \mu_2 UV\mu_1\mu_2$$

gesetzt werden kann und nehmen wir weiter

$$xTV\mu_1\mu_2 = x_1, \quad yTV\mu_1\mu_2 = y_1,$$

so gehen die Gleichungen $(d.\,41)$ über in die nachstehenden

$$\tau_1 = x_1\nu_1 + y_1\nu_2, \quad \tau_2 = -y_1\nu_1 + x_1\nu_2 \quad \ldots\ldots (d.\,42)$$

wo nun x_1, y_1 beliebig gewählt werden können.

In der Figur 58a sind die beiden Vektoren ν_1, ν_2 gezeichnet,

$$ON_1 = \nu_1 \text{ und } ON_2 = \nu_2.$$

Wenn $OT_1 = \tau_1$ nach diesen Richtungen zerlegt wird, so sind die Componenten

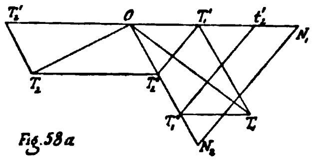


Fig. 58a

$$OT'_1 = x_1\nu_1, \quad OT''_1 = y_1\nu_2.$$

In gleicher Weise ist für $OT_2 = \tau_2$

$$OT'_2 = -y_1\nu_1, \quad OT''_2 = x_1\nu_2$$

Nimmt man

$$Ot'_2 = -OT_2' = y_1\nu_1$$

so ist

$$\frac{T.Ot_2'}{T.OT_1''} = \frac{T\nu_1}{T\nu_2} = \frac{T.OT_1'}{T.OT_2''}.$$

Es kann hieraus geschlossen werden, dass

$$t_2'T_1'' \,//\, N_1N_2 \,//\, T_1'T_2''$$

und hierdurch erhalten wir eine einfache Construction für die correspondirenden Punkte T_1, T_2, wenn einer derselben, z. B. T_1 gegeben ist.

Zerlegen wir nämlich den Vektor OT_1 nach den Richtungen der Vektoren ν_1, ν_2, wodurch die Punkte T_1', T_1'' erhalten werden und ziehen wir die Geraden $T_1'T_2''$ und $T_1''t_2'$ beide parallel zu N_1N_2; nehmen wir weiter $OT_2' = Ot_2'$ und bilden den Vektor, dessen Componenten OT_2', OT_2'' sind, so ist dessen Endpunkt der gesuchte Punkt T_2.

Sind also τ_1, τ_2 gefunden, so sind auch ρ_1, ρ_2 leicht anzugeben. Es ist nämlich

$$\rho_1 = \lambda_1 + \tau_1 + z\,V\mu_1\mu_2\,, \quad \rho_2 = \lambda_2 + \tau_2 + u\,V\mu_1\mu_2$$

wo z und u beliebige reelle Werte beigelegt werden können.

Bei jedem willkürlich gewählten Mittelpunkte des imaginären Punktes gehören daher im allgemeinen eine unendliche Anzahl Normalen, deren Endpunkte zusammen eine reelle Gerade im Raume, senkrecht zur Ebene der Vektoren μ_1, μ_2 bestimmen.

Wenn der Mittelpunkt des imaginären Punktes sich längs der Geraden senkrecht zu jener Ebene bewegt, so ändert sich die von den Endpunkten der Normalen beschriebene Gerade — daher auch die dem Mittelpunkte zugehörigen Normalen — nicht.

Die einem willkürlich gewählten Mittelpunkte ρ_1 zugehörige Gerade der Normalen zu bestimmen, construire man aus jenem Punkte den Vektor $-\lambda_1$ und projicire dessen Endpunkt auf die Ebene der Vektoren μ_1, μ_2. Zum so erhaltenen Punkte T_1 werde nach der Figur 58*a* der correspondirende Punkt T_2 construirt, und aus diesem werde der Vektor λ_2 abgetragen. Die Senkrechte, aus dessen Endpunkt auf die Ebene von μ_1 und μ_2 gefällt, ist die Gerade, dessen Punkte Vektoren haben, welche als Normalen für den gewählten Mittelpunkt genommen werden können.

Die Bearbeitung besonderer Fälle kann hier keinen Platz finden.

105. Wenn auszer (d. 38) zwei lineare Relationen zwischen x, y, z gegeben sind, so haben wir es mit einer allgemeinen Geraden zu tun.

Wir nehmen hierbei an, dass die linearen Gleichungen sind

$$ax + by + cz + 1 = 0\,,\quad a'x + b'y + c'z + 1 = 0 \quad . \; . \; (d.\,43)$$

Setzt man nun in diese Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = (bc' - b'c)\,u - (b' - c' - b + c)\,\triangle \\ y = (ca' - c'a)\,u - (c' - a' - c + a)\,\triangle \\ z = (ab' - a'b)\,u - (a' - b' - a + b)\,\triangle \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (d.\,44)$$

wo u ein neuer complexer Skalar und

$$\frac{1}{\triangle} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

genommen ist, so wird den beiden Gleichungen (d. 43) genügt und die Gleichung (d. 33) wird zur nachstehenden

$$\rho = \triangle\,[\alpha(b - c - b' + c') + \beta(c - a - c' + a') + \gamma(a - b - a' + b')]$$
$$+ u\,[\alpha(bc' - b'c) + \beta(ca' - c'a) + \gamma(ab' - a'b)]\,,$$

eine Gleichung von der Form der Gleichungen (d. 4*), welche wir auf eine reelle Gerade anwendbar fanden. Wir können deshalb sagen, die Gleichung

$$\rho = \alpha + x\beta \text{ oder } V(\rho - \alpha)\,\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,45)$$

stelle eine allgemeine Gerade dar, wenn nur unter ρ, α, β Vektorkegel und unter x ein complexer Skalar verstanden werden.

Setzen wir nun noch für jede Grösze p den Ausdruck $p_1 + \sqrt{-1}\,p_2$, so ergibt sich aus (d. 45) das System

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 = \alpha_1 + x_1\beta_1 - x_2\beta_2 \\ \rho_2 = \alpha_2 + x_2\beta_1 + x_1\beta_2 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d.\,46)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich nun leicht eine geometrische Veranschaulichung der allgemeinen Geraden erhalten.

Die beiden Gleichungen sagen nämlich aus, dass die Endpunkte der Vektoren ρ_1, ρ_2 jeder für sich eine reelle Ebene senkrecht zum Vektor $V\beta_1\beta_2$ beschreiben. Diese Ebenen sind daher parallel und sie enthalten die Endpunkte der gegebenen Vektoren α_1, α_2 bzhw.

Mit Hülfe der Figur 58a ist es ein Leichtes zwei correspondirende Vektoren

$$x_1\beta_1 - x_2\beta_2, \quad x_2\beta_1 + x_1\beta_2$$

zu finden. Dieselben werden von den Endpunkten der Vektoren α_1, α_2 bzhw. abgetragen, wodurch zwei correspondirende Werte von ρ_1 und ρ_2 gefunden sind.

Wir fanden aus (d. 46), dass die Mittelpunkte sämtlicher imaginären Punkte einer allgemeinen Geraden in einer reellen Ebene enthalten sind. Es ist dieses Ergebnis in Übereinstimmung mit der von Hrn Tarry in seiner Abhandlung zur allgemeinen Geometrie für die Gerade aufgestellte Definition. Im Übrigen treffen aber meine Ergebnisse nicht mit dieser Definition zusammen, wie eine Rechnung zeigt, welche der nachfolgenden analog ist. Ich will noch dartun, dass dies nur darin seine Begründung findet, dass Hr Tarry seine Betrachtungen auf Punkte in einer Ebene beschränkt, während ich stets Figuren im Raume der Rechnung unterzog. Im nächsten Artikel, wo ich diese Allgemeinheit fallen lasse, werde ich wirklich auf die Definition der Geraden des Hrn Tarry anlangen.

105*. Wir setzen daher, um zu einer Geraden, zu geraten

$$\left.\begin{array}{l}\rho = x\alpha + y\beta \\ ax + by + c = 0\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 47)$$

wo x, y, a, b, c complexe Skalare, α, β reelle Vektoren bedeuten.

Führen wir weiter ein

$$x = bu - \frac{c}{a+b}, \quad y = -au - \frac{c}{a+b} \quad \ldots\ldots \quad (d. 48)$$

wo u ein neuer variabler complexer Skalar ist, so wird (d. 47) übergehen in

$$\rho = -\frac{c}{a+b}(\alpha + \beta) + (b\alpha - a\beta)u$$

oder

$$\rho = a\lambda + u\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 49)$$

u bedeutet hierin einen complexen Skalar, μ einen complexen Vektor $\mu_1 + \sqrt{-1}\,\mu_2$, bei welchem die reellen Vektoren μ_1, μ_2 mit dem reellen Vektor λ in derselben Ebene enthalten sind.

Ist noch

$$a = a_1 + \sqrt{-1}\,a_2$$
$$u = u_1 + \sqrt{-1}\,u_2$$

so folgt aus (*d.* 49)

$$\rho_1 = a_1\lambda + u_1\mu_1 - u_2\mu_2,$$
$$\rho_2 = a_2\lambda + u_2\mu_1 + u_1\mu_2.$$

Herr TARRY wählt nun als geometrische Darstellung des imaginären Punktes das Punktepaar, welches erhalten wird, wenn man den Vektor ρ_2 um den Endpunkt des Vektors ρ_1 in seiner Ebene um einen rechten Winkel nach beiden Seiten hin dreht.

Es ist dieses Punktepaar bestimmt durch

$$\rho_1 \pm \rho_2\,\varepsilon$$

wenn ε statt $UV\mu_1\mu_2$, des rechten Radials in der Ebene von μ_1, μ_2 gesetzt wird. Statt dieses Ausdrucks kann auch geschrieben werden

$$\lambda\,(a_1 \pm a_2\varepsilon) + u_1\,(\mu_1 \pm \mu_2\,\varepsilon) - u_2\,(\mu_2 \mp \mu_1\varepsilon).$$

Nun ist jedoch

$$\mu_2 - \mu_1\varepsilon = -(\mu_1 + \mu_2\varepsilon)\varepsilon$$
$$\mu_2 + \mu_1\varepsilon = (\mu_1 - \mu_2\varepsilon)\varepsilon.$$

Somit können die beiden Vektoren des Punktepaares in die Form gebracht werden

$$\alpha + \beta\,(u_1 + u_2\varepsilon)\,,\quad \alpha_1 + \beta_1\,(u_1 - u_2\varepsilon)\,,$$

wenn der Kürze halber

$$\alpha = \lambda\,(a_1 + a_2\varepsilon),\quad \beta = \mu_1 + \mu_2\varepsilon$$
$$\alpha_1 = \lambda\,(a_1 - a_2\varepsilon),\quad \beta_1 = \mu_1 - \mu_2\varepsilon$$

gesetzt wird.

Zwei denselben Werten von u_1, u_2 entsprechende Punkte, welche zusammen ein oben verzeichnetes Punktepaar bilden, wollen wir homologe Punkte nennen.

Für $u_1 = u_2 = 0$ erhält man zwei derartige Punkte, welche wir mit P′, P″ bezeichnen wollen. Sind P_1', P_1'' und P_2', P_2'' zwei andere Paare homologer Punkte, welche den Werten u_1', u_2'; u_1'', u_2'' für u_1, u_2 entsprechen, so können die Vektoren $P'P_1'$, $P'P_2'$, $P'P_1''$, $P'P_2''$ leicht hingeschrieben werden. Man findet sodann

$$P'P_1' = \beta\,(u_1' + u_2'\varepsilon)\,,\quad P''P_1'' = \beta_1\,(u_1' - u_2'\varepsilon)$$
$$P'P_2' = \beta\,(u_1'' + u_2''\varepsilon)\,,\quad P''P_2'' = \beta_1\,(u_1'' - u_2''\varepsilon).$$

Daher

$$\frac{P'P_1'}{P'P_2'} = \frac{\beta(u_1' + u_2'\varepsilon)}{\beta(u_1'' + u_2''\varepsilon)} = \frac{(u_1' - u_2'\varepsilon)\beta}{(u_1'' - u_2''\varepsilon)\beta}, \text{ weil } S\varepsilon\beta = 0$$

$$= \frac{u_1' - u_2'\varepsilon}{u_1'' - u_2''\varepsilon} \text{ nach } (b.\ 73^*)$$

und in derselben Weise

$$\frac{P''P_1''}{P''P_2''} = \frac{u_1' + u_2'\varepsilon}{u_1'' + u_2''\varepsilon}.$$

Nun ist aber nach vorhergehenden Formeln und weil

$$u_1' - u_2'\varepsilon,\ u_1'' - u_2''\varepsilon$$

complanar sind

$$K\frac{u_1' + u_2'\varepsilon}{u_1'' + u_2''\varepsilon} = \frac{1}{K(u_1'' + u_2''\varepsilon)} K(u_1' + u_2'\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{u_1'' - u_2''\varepsilon}(u_1' - u_2'\varepsilon) = \frac{u_1' - u_2'\varepsilon}{u_1'' - u_2''\varepsilon}$$

somit ist auch

$$\frac{P''P_1''}{P''P_2''} = K\frac{P'P_1'}{P'P_2'}$$

und diese Gleichung spricht, wie leicht ersichtlich, aus, dass die homologen Punkte zwei invers ähnlichen Figuren angehören.

Wir haben jetzt gezeigt, dass wir für den Fall, wo nur Vektoren in einer Ebene betrachtet werden, auf die Definition des Hrn Tarry zurückkommen.

Ein zweiter von Hrn Tarry in seiner Abhandlung bewiesener Satz ergibt sich wie nachstehend:

Ein willkürlicher Punkt der Verbindungsgerade zweier homologen Punkte hat den Vektor

$$\rho = \frac{\alpha + \beta(u_1 + u_2\varepsilon) + x[\alpha_1 + \beta_1(u_1 - u_2\varepsilon)]}{1 + x}.$$

Beachtet man, dass

$$\beta\varepsilon = \beta UV\beta\beta_1 = \frac{\beta^2\beta_1 - \beta S\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

$$\beta_1\varepsilon = \beta_1 UV\beta\beta_1 = \frac{-\beta_1^2\beta + \beta_1 S\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

so kann man auch schreiben

$$\rho = \alpha + x\alpha_1 + \beta\left[u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 - x\beta_1^2}{TV\beta\beta_1}\right] + x\beta_1\left[u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 - \beta^2 x^{-1}}{TV\beta\beta_1}\right]$$

und durch die Annahme

$$x\beta_1^2 = x^{-1}\beta^2 \text{ oder } x = \pm\frac{T\beta}{T\beta_1}$$

geht dieser Wert über in

$$\rho = \alpha \pm \alpha_1 T\frac{\beta}{\beta_1} + v\left(\beta \pm \beta_1 T\frac{\beta}{\beta_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (d.\ 50)$$

wo der neue veränderliche Skalar v statt der Grösze

$$u_1 - u_2\frac{S\beta\beta_1 \mp T\beta\beta_1}{TV\beta\beta_1}$$

gesetzt ist. Es erhellt hieraus, dass der Ort des Punktes ρ eine reelle Gerade ist. Dies ist der von Hrn TARRY bewiesene Satz:

Wenn man die Strecke zwischen je zwei homologen Punkten in einem bestimmten constanten Verhältnis teilt, so liegen die Teilpunkte auf einer reellen Geraden.

Das Verhältnis x ist zugleich das Verhältnis der Längen zweier homologen Strecken der ähnlichen Figuren. Denn zwei homologe Strecken sind allgemein

$$\beta\,[u_1' - u_1'' + (u_2' - u_2'')\varepsilon],\quad \beta_1\,[u_1' - u_1'' - (u_2' - u_2'')\varepsilon]$$

und die Längen derselben, mit zwei potenzirt, sind

$$N\beta\, N[u_1' - u_1'' + (u_2' - u_2'')\varepsilon] = N\beta\,[(u_1' - u_1'')^2 + (u_2' - u_2'')^2]$$

und

$$N\beta_1 N[u_1' - u_1'' - (u_2' - u_2'')\varepsilon] = N\beta_1[(u_1 - u_1'')^2 + (u_2' - u_2'')^2].$$

In ($d.$ 50) sind zwei Geraden enthalten, welche zu einander senkrecht sind, weil

$$S.(\beta T\beta_1 + \beta_1 T\beta)(\beta T\beta_1 - \beta_1 T\beta) = 0.$$

Es entsprechen diese beiden Örter den beiden Fällen, wo der Teilpunkt der Strecke zwischen zwei homologen Punkten auf der Strecke selbst oder auf deren Verlängerung gewählt worden ist.

106. Die Gleichungen

$$\rho = \alpha \pm \sqrt{-1}\, a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d.\ 51)$$

wo a ein bestimmter arithmetischer Skalar ist, stellen eine Kugel dar, mit dem Radius a um den Endpunkt des Vektors α als Mittelpunkt beschrieben. Denn die Quadrirung dieser Gleichungen ergibt

$$(\rho - \alpha)^2 = - a^2 \text{ oder } T(\rho - \alpha)^2 = a^2$$

somit

$$T(\rho - \alpha) = a$$

und es gehört diese Gleichung einer Kugel an.

In dem besonderen Falle $\alpha = 0$ und $a = 1$, erhält man somit

$$\rho = \sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d.\,52)$$

als die Gleichung einer Einheitskugel.

Die Vieldeutigkeit des Symbols $\sqrt{-1}$ tritt hier besonders deutlich zu Tage, wie auch schon von HAMILTON erkannt worden ist. Es wird nämlich unmittelbar einleuchten, dass in der zweiten Seite der Gleichung ($d.$ 52) $\sqrt{-1}$ jeden willkürlichen Einheitsvektor, aus dem Vektorenanfangspunkte gezogen, darstellt und diese Einheitsvektoren können sodann auch als die Indices rechter Radiale aufgefasst werden, wodurch wir auf der im ersten Abschnitt angegebenen Deutung des Symbols $\sqrt{-1}$ aufs neue angelangt sind.

107. Im Anschluss an den vorhergehenden Artikel mag hier bemerkt werden, dass die bisher angenommene Deutung der Grösze $\sqrt{-1}\,\alpha$ eine Erweiterung zulässt.

Wir sahen in jenem Artikel nämlich, dass in dem Symbole $\sqrt{-1}$ alle möglichen rechten Quotienten enthalten sind, während bei der Deutung des Ausdrucks $\sqrt{-1}\,\alpha$ nur diejenigen rechten Quotienten gewählt sind, welche die Ebene des Vektors α enthalten. Man kann nun aber auch die nachstehende Definition wählen:

Unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ sei verstanden die Gesamtheit der Quaternionen, welche erhalten werden durch die Multiplikation des rechten Quotienten α *mit* einem jeden der in dem Symbole $\sqrt{-1}$ enthaltenen rechten Radiale.

Diese Definition ergibt, dass in dem Zeichen $\sqrt{-1}\,\alpha$ nicht nur eine unendliche Anzahl willkürlicher Quaternionen sondern auch eine derartige Anzahl rechter Quotienten enthalten sind, deren Indices sämtlich senkrecht zum Vektor α sind. Diese Indices bilden sodann den im ersten Abschnitt unter $\sqrt{-1}\,\alpha$ verstandenen Vektorkreis.

108. Betrachten wir weiter die Gleichung

$$\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}\right)^2-\left(V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)^2=1 \quad \ldots\ldots \quad (d.\,53)$$

Wir wollen zeigen, dass dieselbe einem Ellipsoid angehört.

Wenn nämlich δ und ε zwei willkürliche Vektoren sind, so ist

$$\rho=\frac{\delta+u\varepsilon}{1+u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\,54)$$

bei veränderlichem u eine willkürliche Gerade, und wir erhalten die Vektoren der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Gebilde ($d.\,53$), indem wir den Wert von ρ, aus ($d.\,54$) in ($d.\,53$) einführen und die zugehörigen Werte von u bestimmen. Man erhält dadurch

$$\left[S\frac{\delta-\alpha}{\beta}+uS\frac{\varepsilon-\alpha}{\beta}\right]^2-\left[V\frac{\delta-\alpha}{\gamma}+uV\frac{\varepsilon-\alpha}{\gamma}\right]^2=(1+u)^2,$$

somit eine Gleichung zweiten Grades für u.

Eine willkürliche Gerade schneidet demnach die Oberfläche ($d.\,53$) in zwei Punkten; dieselbe ist deshalb zweiten Grades.

Statt

$$\left(S\frac{\rho-x}{\beta}\right)^2$$

können wir setzen

$$NS\frac{\rho-\alpha}{\beta};$$

statt

$$\left(V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)^2 \text{ ebenso } -NV\frac{\rho-\alpha}{\gamma}.$$

Nach ($d.\,53$) wird deshalb

$$NS\frac{\rho-\alpha}{\beta}+NV\frac{\rho-\alpha}{\gamma}=1, \text{ oder } N\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}+V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right)=1,$$

denn wenn man in ($b.\,116$) q durch Vq ersetzt, so wird:

$$N(Vq+x)=NVq+x^2=NVq+Nx.$$

Es wird nun auch

$$T\left(S\frac{\rho-\alpha}{\beta}+V\frac{\rho-\alpha}{\gamma}\right) \text{ oder } T(\rho-\alpha)T\left(S\frac{U(\rho-\alpha)}{\beta}+V\frac{U(\rho-\alpha)}{\gamma}\right)=1$$

sein müssen, und demnach kann $T(\rho-\alpha)$ niemals unendlich werden, es sei denn dass

$$S\frac{U(\rho-\alpha)}{\beta}+V\frac{U(\rho-\alpha)}{\gamma}=0$$

wäre, eine Gleichung, welche nur stattfinden könnte, wenn jedes der Glieder der ersten Seite verschwände, und dies würde erfordern, dass der Vektor $\rho-\alpha \perp \beta$ und $/\!/ \gamma$ wäre; eine Voraussetzung, die bei willkürlicher Wahl der Vektoren β, γ unmöglich ist.

Die einzige Oberfläche zweiten Grades, welche dieser Bedingung genügt, ist das Ellipsoid.

Der Endpunkt des Vektors α ist der Mittelpunkt der Oberfläche; denn die Vektoren $\alpha-\sigma$, $\alpha+\sigma$ müssen stets zugleich der Gleichnng (*d.* 53) genügen.

Wenn $\gamma=\beta$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel über.

109. Bei Benutzung der Relation (*b.* 116) kann die Gleichung des Ellipsoids leicht in eine andre Gestalt erhalten werden. Nach jener Gleichung ist nämlich

$$N\left(S\frac{\rho}{\alpha}+V\frac{\rho}{\beta}\right)=\left(S\frac{\rho}{\alpha}\right)^2+NV\frac{\rho}{\beta}=\left(S\frac{\rho}{\alpha}\right)^2-\left(V\frac{\rho}{\beta}\right)^2$$

und das Ellipsoid kann somit auch durch die Gleichung

$$T\left(S\frac{\rho}{\alpha}+V\frac{\rho}{\beta}\right)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 55)$$

dargestellt werden.

Führen wir weiter statt der Vektoren α, β zwei andre mittelst der Gleichungen

$$\gamma=\frac{2\beta}{\beta+\alpha}\alpha,\ \delta=\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 56)$$

ein. Aus der ersten dieser Gleichungen lässt sich folgern

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\beta}{\beta+\alpha} \text{ und hieraus } \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta+\alpha}{2\beta}=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2\beta}$$

oder

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right),$$

sodass allgemein erhalten wird

$$\frac{\rho}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha}+\frac{\rho}{\beta}\right)$$

und in gleicher Weise

$$\frac{\rho}{\delta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\alpha}-\frac{\rho}{\beta}\right).$$

Somit ist weiter

$$\frac{\rho}{\gamma}+K\frac{\rho}{\delta}=\tfrac{1}{2}(1+K)\frac{\rho}{\alpha}+\tfrac{1}{2}(1-K)\frac{\rho}{\beta}=S\frac{\rho}{\alpha}+V\frac{\rho}{\beta}$$

und die Gleichung (*d.* 55) geht hiermit über in die nachstehende

$$T\left(\frac{\rho}{\gamma}+K\frac{\rho}{\delta}\right)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 57)$$

Es ist dies eine neue Form der Gleichung des Ellipsoids. Eine andre Schreibweise für dieselbe ist

$T(\rho\gamma^{-1}+K\rho\delta^{-1})=1$ oder nach (*c.* 13) $T(\rho\gamma^{-1}+\delta^{-1}\rho)=1$ (*d.* 58)

Schlieszlich können noch zwei neue Vektoren ι und $\varkappa$ mittelst der Gleichungen

$$\gamma^{-1}=\frac{\iota}{\varkappa^2-\iota^2},\quad \delta^{-1}=\frac{\varkappa}{\varkappa^2-\iota^2} \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 59)$$

eingeführt werden, und dadurch erhalten wir die Gleichung des Ellipsoids in die Gestalt

$$T(\iota\rho+\rho\varkappa)=\varkappa^2-\iota^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 60)$$

welche von Hamilton bei verschiedenen Untersuchungen benutzt worden ist.

Es ist zu bemerken, dass die Vektoren ι, $\varkappa$ der Richtung nach mit γ, δ oder deren Negativen übereinstimmen; es kann dies unmittelbar aus (*d.* 59) geschlossen werden, und weiter noch, indem man diese Gleichungen quadrirt und die erhaltenen Resultate subtrahirt,

$$\varkappa^2-\iota^2=\frac{1}{\delta^{-2}-\gamma^{-2}}=\frac{\gamma^2\delta^2}{\gamma^2-\delta^2}$$

Hiermit gehen dieselben Gleichungen über in die nachstehenden

$$\iota=\gamma\frac{\delta^2}{\gamma^2-\delta^2},\quad \varkappa=\delta\frac{\gamma^2}{\gamma^2-\delta^2} \quad \ldots\ldots \quad (d.\ 61)$$

Es kann hieraus geschlossen werden, dass ι, $\varkappa$ mit γ, δ bzhw. der Richtung nach zusammenfallen, wenn $T\gamma > T\delta$. Ist $T\gamma < T\delta$, so haben ι, $\varkappa$ zu γ, δ bzhw. entgegengesetzte Richtungen.

Wenn mann die Gleichung (*d.* 53) mit derjenigen einer Ebene

$$S(\rho-\delta)\,\varepsilon=0$$

combinirt, so wird eine Ellipse erhalten. Eine specielle Wahl der Vektoren δ, ε ergibt die Gleichung der Ellipse in einfacherer Gestalt.

110. Wir wollen noch zwei andere den vorhergehenden verwandte geometrische Örter in Betracht ziehen, nämlich

1°. $$SU\frac{\rho-\alpha}{\beta} = SU\frac{\gamma}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 62)$$

Wenn

$$OA=\alpha,\quad AB=\beta,\quad OP=\rho,\quad OC=\gamma,\quad OD=\delta,$$

so sagt diese Gleichung aus nach (b. 103), dass

$$\cos\angle PAB = \cos\angle COD \text{ oder } \angle PAB = \text{constant.}$$

Es stellt (d. 62) somit einen kreisförmigen Kegel dar, dessen Scheitel der Punkt A, dessen Achse der Vektor β, und dessen Scheitelwinkel $\angle$ COD ist.

Anstatt $SU\frac{\gamma}{\delta}$ kann in der zweiten Seite der Gleichung irgend eine zwischen -1, $+1$ liegende Constante gesetzt werden.

2°. $$TV\frac{\rho-\alpha}{\beta} = TV\frac{\gamma}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d.\ 63)$$

Beachtet man, dass nach (b. 126)

$$TV\frac{\rho-\alpha}{\beta} = T\frac{\rho-\alpha}{\beta}\sin\angle\frac{\rho-\alpha}{\beta} = \frac{T.AP}{T.OB}\sin\angle PAB$$

und dass $T.AP \sin\angle PAB$ das aus dem Punkte P auf die Gerade AB gefällte Lot ist, so sagt die Gleichung (d. 63) aus, dass dieses Lot constant ist.

Es ist diese Gleichung somit diejenige eines kreisförmigen Cylinders, dessen Achse mit AB zusammenfällt.

111. Zum Schlusze dieses Abschnittes seien noch einige andren Formen erwähnt, in welchen geometrische Örter erscheinen können. Es erfordert dieselbe aufs neue die Anwesenheit eines veränderlichen Skalars in der Gleichung und es schlieszt sich deshalb die hier bezeichnete Gestalt sehr enge derjenigen an, welche wir im ersten Abschnitt zu erörtern Gelegenheit fanden. Wir wollen dies an zwei Beispielen erläutern.

Es sei α ein willkürlicher Vektor, ε ein Einheitsvektor in irgend einer Ebene. α und ε können auch als rechter Quotient und Radial bzhw. betrachtet werden.

Der Quaternion ε^x, wo x ein Skalar bedeutet, ist nunmehr ein Radial in der Ebene von ε, dessen Winkel $x\frac{\pi}{2}$ beträgt. Indem man x die Werte von 0 bis ∞ durchlaufen lässt, stellt somit ε^x einen veränderlichen Radial in der Ebene von ε dar.

Führen wir weiter die Bedingung

$$S\varepsilon\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 64)$$

ein, so wirken ε und ε^x in einer durch den Vektor α gehenden Ebene, weil die Ebene des Radials ε^x senkrecht zum Vektor ε ist, und nach ($d.$ 64) auch $\alpha \perp \varepsilon$. Somit wird das Symbol ε^x an den Vektor α operirend, demselben eine Drehung ohne Änderung der Länge erteilen in einer zum Vektor ε senkrechten Ebene. Daher kann auch unter der Bedingung ($d.$ 64)

$$\rho = \varepsilon^x\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 65)$$

bei veränderlichem x als die Gleichung eines Kreises gelten, mit dem Radius $T\alpha$ in einer zum Vektor ε senkrechten Ebene beschrieben.

In gleicher Weise kann eine Ellipse dargestellt werden durch die Gleichung ($d.$ 66) jedoch ohne die Bedingung ($d.$ 64)

$$\rho = V.\varepsilon^x\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 66)$$

Denn man kann diese Gleichung wie nachstehend umgestalten.

$$\rho = V.\left(\cos x\frac{\pi}{2} + \sin x\frac{\pi}{2}.\,\varepsilon\right)\alpha, \text{ nach } (c. 9) \text{ mit der Annahme } T\varepsilon = 1$$

$$= \alpha\cos x\frac{\pi}{2} + V\varepsilon\alpha\,.\,\sin x\frac{\pi}{2}$$

und dieser Ausdruck geht in die im Art. 24 für die Ellipse angegebene über, wenn gesetzt wird

$$\cos x\frac{\pi}{2} = u, \quad V\varepsilon\alpha = \beta.$$

Es ist somit ($d.$ 66) die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Vektorenanfang O ist, während α, $V\varepsilon\alpha$ conjugirte Durchmesser oder vielmehr, weil $\alpha \perp V\varepsilon\alpha$, die Achsen der Curve sind.

Wir wollen auch noch den durch die Gleichung

$$\rho = \alpha^t\beta\alpha^{-t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d. 67)$$

dargestellten geometrischen Ort, wo α, β willkürliche aber constante coinitiale Vektoren, t einen variablen Skalar bedeuten, näher untersuchen.

Wir erhalten aus dieser Relation

$$T\rho = T\alpha^t T\beta\ T\alpha^{-t} = T\beta = \text{constant}.$$

Somit kann die durch ($d.$ 67) dargestellte Curve auf einer Kugel mit dem Radius $T\beta$ beschrieben gedacht werden.

Weiter ist

$$S.\alpha\rho = S.\alpha^{t+1}\beta\alpha^{-t} = S.\alpha^{-t}\alpha^{t+1}\beta = S\alpha\beta = \text{constant}.$$

Mit dem vorhergehenden Resultate ergibt sich somit auch

$$\angle\,\alpha\rho = \text{constant} = \angle\,\alpha\beta.$$

Die Gleichung ($d.$ 67) gehört somit dem Kreise an, welcher durch den Endpunkt des Vektors β beschrieben wird, wenn man denselben um α als Achse konisch drehen lässt.

Die Grösze des Drehungswinkels um diese Achse zu ermitteln sei $\mathrm{OA} = \alpha$, $\mathrm{OB} = \beta$, $\mathrm{OP} = \rho$ gedacht. Es handelt sich sodann darum den Winkel zwischen den beiden Ebenen AOB, AOP zu bestimmen. Dieser Winkel kommt aber demjenigen zwischen den beiden Normalen zu jenen Ebenen, deren Richtungen durch die Symbole $V\alpha\beta$, $V\alpha\rho$ angegeben werden können, gleich. Wir müssen deshalb den Winkel des Quaternions

$$V\alpha\rho : V\alpha\beta$$

bestimmen. Erwägt man, dass

$$\alpha^t\beta\alpha^{-t} = \left(\cos t\frac{\pi}{2} + \sin t\frac{\pi}{2}.U\alpha\right)\beta\left(\cos t\frac{\pi}{2} - \sin t\frac{\pi}{2}.U\alpha\right)$$

$$= \beta\cos^2 t\frac{\pi}{2} - T\alpha^{-1}\sin t\pi\ V\alpha\beta - T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}\,\alpha\beta\alpha,$$

während

$$S\alpha\beta\alpha = 0,$$

sodass

$$\alpha\beta\alpha = V\alpha\beta\alpha = 2\alpha S\alpha\beta - \beta\alpha^2 = 2\alpha S\alpha\beta + \beta T\alpha^2,$$

so wird weiter

$$\rho = \beta\cos^2 t\frac{\pi}{2} - T\alpha^{-1}\sin t\pi.\ V\alpha\beta - 2T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}.\alpha S\alpha\beta - \beta\sin^2 t\frac{\pi}{2}$$

$$= \beta\cos t\pi - T\alpha^{-1}\sin t\pi.\ V\alpha\beta - 2T\alpha^{-2}\sin^2 t\frac{\pi}{2}.\ \alpha S\alpha\beta.$$

Und hieraus kann unmittelbar geschlossen werden:

$$V\alpha\rho = V\alpha\beta.\cos t\pi - \alpha\ V\alpha\beta\sin t\pi.T\alpha^{-1} = V\alpha\beta\cos t\pi - U\alpha.\ V\alpha\beta\sin t\pi.$$

Somit ist

$$\frac{V\alpha\rho}{V\alpha\beta} = \cos t\pi - \sin t\pi . U\alpha$$

woraus erhellt, dass dieser Quaternion ein Versor ist, dessen Winkel $t\pi$ beträgt, während die Achse dem Vektor α entgegengesetzt ist.

Das Resultat dieser Untersuchung ergibt daher als Antwort auf die Frage nach der Grösze der Drehung des Vektors β um die Achse α den Winkel $t\pi$.

Dasselbe Ergebniss hätte man auch auf einfachere Weise erhalten können.

Denken wir uns nämlich den Vektor β in zwei andre β_1 und β_2 zerlegt, welche parallel und senkrecht bzhw. zum gegebenen Vektor α sein mögen. Es wird sodann

$$\rho = \alpha^t(\beta_1 + \beta_2)\alpha^{-t} = \alpha^t\alpha^{-t}\beta_1 + \alpha^t\beta_2\alpha^{-t}$$

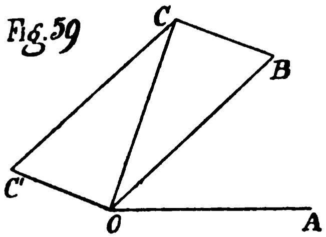
Weil nämlich α^t, β_1, α^{-t} complanare Quaternionen sind, so können dieselben in dem Produkte des ersten Gliedes der letzten Seite umgetauscht werden. Weil aber $U\beta_2$, $U\alpha$ unter sich senkrecht sind, so kann bei dem zweiten Produkt die Gleichung (*c.* 11*) Anwendung finden. Somit ist

$$\rho = \beta_1 + T\beta_2\, U\alpha^t . U\beta_2\, U\alpha^{-t} = \beta_1 + T\beta_2\, U\alpha^t U\alpha^t U\beta_2 = \beta_1 + U\alpha^{2t} . \beta_2$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist ein Vektor, welcher aus β_2 einfach durch eine Drehung um einen Winkel $t\pi$ um α als Achse erhalten wird. Dieselbe Drehung hat sodann aber auch ρ um diese Achse erfahren.

DIFFERENTIALE VON QUATERNIONEN.

Fig. 59



112. Wenn zwei Quaternionen $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, $q' = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}$, auf denselben Nenner reducirt gegeben sind, so wollen wir die Differenz derselben

$$q' - q = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} - \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC} - \mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \\ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OA}}$$

unter einem andern Gesichtspunkte ein **Differential** des Quaternions q nennen und mit dq bezeichnen.

Dieses Differential ist somit ein ganz willkürlicher Quaternion. Achse, Winkel und Tensor bleiben unbestimmt; es braucht der letzte, wie gewöhnlich bei den Differentialen vorausgesetzt wird, nicht unendlich klein zu sein.

113. Wenn ein Quaternion Q eine Funktion eines anderen veränderlichen Quaternions q (und gegebener Quaternionen oder Skalare) ist, sodass man setzen kann,

$$Q = F(q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 1)$$

so wird, wenn q in $q + dq$ geändert wird, auch Q eine Änderung erfahren, welche wir mit $\triangle Q$ bezeichnen. Es ist somit

$$\triangle Q = F(q + dq) - F(q).$$

Die beiden Gröszen $\triangle Q$ und dq nennen wir jedoch *nicht* simultane Differentiale. Wie in dem ersten Abschnitte wollen wir als solche die Gröszen dQ, dq betrachten, wenn dQ nach der Gleichung ($e.$ 2) bestimmt wird

$$dQ = Lim.\, n\left[F\left(q+\frac{dq}{n}\right)-F(q)\right],\ Lim.\, n=\infty \quad . \; . \; (e.\, 2)$$

Um simultane Quaterniondifferentiale zu erhalten, musz man deshalb der unabhängigen Veränderlichen eine Änderung $dq:n$ erteilen, und die dadurch bewirkte Änderung der Funktion mit n multipliciren. Der Grenzwert für $Lim.\, n=\infty$, ist sodann das zu dq gehörige simultane Differential des Quaternions Q.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Division durch n nur den Tensor von dq verringert; der Versor dieser Grösze bleibt ungeändert.

Die Funktion

$$F\left(q+\frac{dq}{n}\right)-F(q)$$

wollen wir im Folgenden mit $\triangle_n Q$ bezeichnen.

Es ist sodann

$$dQ = Lim.\, n \triangle_n Q,\ Lim.\, n=\infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e.\, 3)$$

114. Wenn wir die Funktion

$$Lim.\, n\left[F\left(q+\frac{dq}{n}\right)-F(q)\right]=\Phi\,(q, dq)$$

näher betrachten, — man kann dieselbe an einem Beispiel berechnen — so erkennt man unmittelbar, dass dieselbe im allgemeinen nicht von der Form $\Phi(q)dq$ sein kann. Es ist dies offenbar darin begründet, dass die Faktoren bei der Multiplikation der Quaternionen nicht commutativ sind.

Es musz aber stets die Funktion $\Phi(q, dq)$ linear und homogen in dq sein. Dies zu beweisen teilen wir dq in zwei Teile, welche dr und ds genannt werden mögen. Es wird dadurch:

$$\begin{aligned}\Phi(q, dq) &= Lim.\, n\left[F\left(q+\frac{dr+ds}{n}\right)-F(q)\right]\\ &= Lim.\, n\left[\left\{F\left(q+\frac{dr+ds}{n}\right)-F\left(q+\frac{dr}{n}\right)\right\}+\right.\\ &\qquad\left.+\left\{F\left(q+\frac{dr}{n}\right)-F(q)\right\}\right]\end{aligned}$$

$$\Phi(q, dq) = Lim.\, n\left[F\left(q+\frac{dr+ds}{n}\right) - F\left(q+\frac{dr}{n}\right)\right] +$$
$$+ Lim.\, n\left[F\left(q+\frac{dr}{n}\right) - F(q)\right]$$
$$= Lim.\, \Phi\left(q+\frac{dr}{n}, ds\right) + \Phi(q, dr)$$

und zuletzt

$$\Phi(q, dq) = \Phi(q, ds) + \Phi(q, dr) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (e.\ 3^*)$$

Aus dieser Gleichung kann unmittelbar geschlossen werden, dass $\Phi(q, dq)$ in Bezug auf dq, linear und homogen ist.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch machen, nämlich

$$\Phi(q, xdq) = x\Phi(q, dq) \, . \, . \, . \, . \, . \, , \, . \, . \, . \, (e.\ 4)$$

weil jedes Glied der Funktion Φ mit x multiplicirt wird, wenn dasselbe mit dq stattfindet.

Wenn das Differential einer Quaternionfunktion in Bezug auf einen Skalar x bestimmt wird nach der Definition

$$Df(q,x) = Lim.\, n\left[f\left(q, x+\frac{dx}{n}\right) - f(q, x)\right],\ Lim.\, n = \infty,$$

so bleibt natürlich der Satz gültig, dass dieses Differential in Bezug auf dx linear und homogen ist. Weil aber der Faktor dx mit den anderen Faktoren commutativ ist, so nimmt das Differential die Form an

$$f'(q, x)\, dx$$

$f'(q, x)$ kann in diesem Falle der Differentialquotient in Bezug auf x heiszen.

115. Einige Beispiele der Berechnung der Differentiale einfacher Quaternionfunktionen mögen hier Platz finden.

1°. $$Q = q^2.$$

Es wird hiermit

$$\triangle_n Q = \left(q+\frac{dq}{n}\right)^2 - q^2 = q\frac{dq}{n} + \frac{dq}{n}q + \left(\frac{dq}{n}\right)^2$$
$$dQ = Lim.\, n \triangle_n Q = q\, dq + dq \, . \, q$$

oder kurz

$$d \, . \, q^2 = q\, dq + dq \, . \, q \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (e.\ 5)$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass dq und q nicht complanar sind. Wenn $dq \,|\!|\!|\, q$, so erhält man einfacher

$$d\,.\,q^2 = 2\,q\,dq$$

analog der Differentialrechnung bei Skalaren.

2°. $$Q = q^{-1} = \frac{1}{q}.$$

Man erhält

$$\Delta_n Q = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1} - q^{-1} = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1}\left[1 - \left(q + \frac{dq}{n}\right)q^{-1}\right]$$
$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1}\left[1 - 1 - \frac{dq}{n}q^{-1}\right] = -\left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-1} dq\,.\,q^{-1}$$

und somit

$$d\,.\,q^{-1} = Lim.\, n\, \Delta_n Q = -\,q^{-1}\, dq\,.\,q^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (e.\,6)$$

Wenn $dq \,|||\, q$, so ist $d\,.\,q^{-1} = -\,q^{-2}\,dq$.

3°. $$Q = q^{-2} = \frac{1}{q^2}.$$

Wie bei dem vorigen transformirt man

$$\Delta_n Q = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2} - q^{-2} = \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - \left(q + \frac{dq}{n}\right)^2 q^{-2}\right]$$
$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - \left\{q^2 + q\frac{dq}{n} + \frac{dq}{n}q + \left(\frac{dq}{n}\right)^2\right\}q^{-2}\right]$$
$$= \left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[1 - 1 - q\frac{dq}{n}q^{-2} - \frac{dq}{n}q^{-1} - \left(\frac{dq}{n}\right)^2 q^{-2}\right]$$
$$= -\left(q + \frac{dq}{n}\right)^{-2}\left[q\frac{dq}{n}q^{-2} + \frac{dq}{n}q^{-1} + \frac{(dq)^2}{n^2}q^{-2}\right]$$

somit

$$d\,.\,q^{-2} = Lim.\, n\, \Delta_n Q = -\,q^{-1}\, dq\,.\,q^{-2} - q^{-2}\, dq\,.\,q^{-1} \,.\,. \quad (e.\,7)$$

Wenn $dq \,|||\, q$, wird $d\,.\,q^{-2} = -\,2\,q^{-3}\,dq$

116. In diesem Artikel werden einige allgemeinen Regeln für Quaterniondifferentiation angegeben werden. Es sei dabei stets c ein constanter Quaternion, q ein veränderlicher, $Q = f(q)$ und $\chi = \Phi(q)$ zwei willkürliche Funktionen des Quaternions q. Man erhält sodann

1°. $$dc = 0$$

2°. $$d(Q + c) = Lim.\, n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) + c - \{f(q) + c\}\right] =$$
$$= Lim.\, n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right] = d\,Q$$

oder

$$d(Q+c) = d\,Q \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (e.\,9)$$

3°. Allgemeiner ist

$$d(Q+\chi) = dQ + d\chi \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (e.\,10)$$

Denn es ist

$$d(Q+\chi) = Lim.\, n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)+\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right)\right\} - \{f(q)+\Phi(q)\}\right]$$

$$= Lim.\, n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\} + \left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right) - \Phi(q)\right\}\right]$$

$$= Lim.\, n\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\} + Lim.\, n\left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right) - \Phi(q)\right\}$$

$$= dQ + d\chi.$$

4°.

$$d(Q\chi) = Qd\chi + dQ.\chi \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (e.\,11)$$

Nach der Substitution der Funktionen f, Φ, wird nämlich

$$d.Q\chi = Lim.\, n\left[f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right) - f(q)\,\Phi(q)\right]$$

$$= Lim.\, n\left[\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right) - f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi\,(q)\right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right)\Phi(q) - f(q)\,\Phi(q)\right\}\right]$$

$$= Lim.\, f\left(q+\frac{dq}{n}\right) n\left\{\Phi\left(q+\frac{dq}{n}\right) - \Phi(q)\right\} +$$

$$+ Lim.\, n\left\{f\left(q+\frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\}\Phi(q)$$

$$= f(q)\, d\Phi(q) + df(q)\,.\,\Phi(q)$$

$$= Qd\chi + dQ.\chi$$

Besondere Fälle dieses Satzes sind die nachfolgenden

$$d.cQ = c.dQ,\quad d.Qc = dQ.c \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (e.\,12)$$

117. Es kann der in (*e.* 11) ausgesprochene Satz dazu verwendet werden, das Differential einer willkürlichen Potenz eines Quaternions zu ermitteln.

Wir fanden schon (*e.* 5)

$$d.q^2 = qdq + dq.q.$$

Und es wird jetzt weiter:

$$d.q^3 = d.q^2q = q^2dq + (d.q^2)q \text{ nach } (e.\,11) = q^2dq + qdq.q + dq.q^2$$

$$d.q^4 = d.q^3q = q^3dq + (d.q^3)q = q^3dq + q^2dq.q + qdq.q^2 + dq.q^3.$$

Man erkennt in dieser Weise, dass allgemein für ganze positive Werte von m

$$d.q^m = q^{m-1}\,dq + q^{m-2}\,dq.q + q^{m-3}\,dq.q^2 + \ldots + q^2\,dq.q^{m-3} + \\ + qdq.q^{m-2} + dq.q^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (e.\ 13)$$

Weil aber nach (e. 6)

$$dq^{-1} = -\,q^{-1}\,dq.q^{-1},$$

so wird

$$d.q^{-m} = -\,q^{-m}\,dq^m.q^{-m}$$

und nach Einführung des Wertes von $d.q^m$ aus (e. 13)

$$d.q^{-m} = -\,q^{-1}\,dq.q^{-m} - q^{-2}\,dq.q^{1-m} - q^{-3}\,dq.q^{2-m} \ldots \\ -\,q^{1-m}\,dq.q^{-2} - q^{-m}\,dq.q^{-1} \ldots\ldots (e.\ 14)$$

Wenn m eine gebrochene rationale Zahl ist, so lässt sich $d.q^m$ nicht mehr so leicht berechnen. Dies zu erreichen setzen wir

$$m = \frac{k}{l},$$

wo k und l ganze Zahlen sind und weiter

$$q^{\frac{k}{l}} = r \text{ oder } q^k = r^l \ldots\ldots\ldots\ldots (e.\ 14)$$

Indem wir die Differentiale der beiden Seiten dieser Gleichung bilden, erhalten wir die Gleichung:

$$q^{k-1}\,dq + q^{k-2}\,dq.q + \ldots + qdq.q^{k-2} + dq.q^{k-1} = \\ = r^{l-1}\,dr + r^{l-2}\,dr.r + \ldots + r.dr.r^{l-2} + dr.r^{l-1}$$

und es gilt jetzt aus dieser Gleichung dr aufzulösen. Die Gröszen r, $r^2 \ldots r^{l-1}$ sollen dazu sämtlich in q ausgedrückt werden, also

$$q^{\frac{k}{l}},\ q^{2\frac{k}{l}},\ \ldots\, q^{(l-1)\frac{k}{l}} \text{ oder } q^m,\ q^{2m},\ \ldots\, q^{(l-1)m}.$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung erörtern wir im nächsten Abschnitt; es ist jedoch leicht dieselbe für den besonderen Fall $m = \frac{1}{2}$ zu finden.

Bei dieser Annahme nämlich wird die Gleichung (e. 15) reducirt zur nachstehenden

$$dq = rdr + dr.r \text{ oder } dq = q^{\frac{1}{2}}\,dr + dr.q^{\frac{1}{2}} \ldots (e.\ 16)$$

Wir erhalten daraus, indem wir dieselbe *mit* $q^{-\frac{1}{2}}$ und *durch* $Kq^{\frac{1}{2}}$ multipliciren,

$$q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = dr.Kq^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\,dr.q^{\frac{1}{2}}\,Kq^{\frac{1}{2}}$$
$$= dr.Kq^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}\,dr.Nq^{\frac{1}{2}}$$
$$= dr.Kq^{\frac{1}{2}} + Tq.q^{-\frac{1}{2}}\,dr$$

Nach (b. 24*) ist jedoch

$$Nq.q^{-1} = Kq$$

oder indem man q durch $q^{\frac{1}{2}}$ ersetzt

$$Tq.q^{-\frac{1}{2}} = Kq^{\frac{1}{2}}.$$

Es wird deshalb

$$q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = dr.Kq^{\frac{1}{2}} + Kq^{\frac{1}{2}}\,dr$$

Nach (e. 16) ist weiter

$$dq = dr.q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}\,dr$$

Die Addition dieser Gleichungen ergibt

$$dq + q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}} = 4\,dr.Sq^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus wird gefunden

$$dr = \frac{dq + q^{-\frac{1}{2}}\,dq.Kq^{\frac{1}{2}}}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = d.q^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (e.\,17)$$

Wenn $dq \,|||\, q$, so kann man wieder beträchtlich vereinfachen. Es gehen sodann die beiden Formeln (e. 13), (e. 14) über in

$$d.q^{m} = mq^{m-1}\,dq\,,\quad d.q^{-m} = -\,mq^{-m-1}\,dq$$

und die Formel (e. 17) ergibt

$$dq^{\frac{1}{2}} = \frac{dq(1 + q^{-\frac{1}{2}}\,Kq^{\frac{1}{2}})}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = \frac{dq.q^{-\frac{1}{2}}\,(q^{\frac{1}{2}} + Kq^{\frac{1}{2}})}{4\,Sq^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\,q^{-\frac{1}{2}}\,dq.$$

Diese Resultate stimmen mit den bekannten Formeln der Differentialrechnung bei Skalaren überein.

Als ein einziges Beispiel der Differentiation eines Quaternions oder Vektors in Bezug auf einen Skalar sei die mit (d. 65) bezeichnete Funktion $\rho = \varepsilon^{x}\alpha$ gewählt, in der α willkürlich und ε ein Einheitsvektor senkrecht zu α ist.

Es wird hiermit

$$d\rho = Lim.\,n\left[\varepsilon^{x+\frac{dx}{n}}\,\alpha - \varepsilon^{x}\,\alpha\right] = Lim.\,n\,\varepsilon^{x}\left(\varepsilon^{\frac{dx}{n}} - 1\right)\alpha$$
$$= Lim.\,n\,\varepsilon^{x}\left[\cos\left(\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}\right).\,\varepsilon - 1\right]\alpha.$$

Bei wachsendem m nähert $\cos\frac{dx}{n}\,\frac{\pi}{2}$ sich der Einheit und der Sinus nähert sich dem Bogen; somit ist

$$d\rho = dx \,.\, \frac{\pi}{2}\, \varepsilon^{x+1}\alpha = dx \,.\, \frac{\pi}{2}\, \varepsilon\rho \;\ldots\ldots \quad (e.\ 17^*)$$

118. Wenn ein Quaternion eine Änderung erfährt, so werden natürlich im allgemeinen dessen Tensor, Versor, Skalar und Vektorteil, und Winkel auch geändert werden. Mit der Untersuchung der Differentiale dieser Gröszen wollen wir uns in diesem Artikel beschäftigen und zuerst sei gewählt

$$dKq = Lim.\, n\left[K\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Kq\right] = Lim.\, n\left[K\frac{dq}{n}\right] =$$
$$= Lim.\, n\left[\frac{1}{n}\, Kdq\right] = Kdq.$$

Man ersieht leicht, dass man in dieser Weise die nachstehenden Formeln erhalten kann

$$dKq = K.dq,\ dSq = S.dq,\ dVq = V.dq. \;\ldots \quad (e.\ 18)$$

Weniger einfach gestalten sich jedoch die Differentiale der übrigen Gröszen, wie aus dem weiteren erhellen wird:

$$dNq = d.qKq = dq.Kq + qdKq \text{ nach } (e.\ 11) = dq.Kq + qKdq.$$

Es ist aber allgemein

$$K.q'Kq = KKq.Kq' \text{ nach } (b.\ 54) = qKq'.$$

Indem man dieses Resultat bei der vorhergehenden Formel anwendet, erhält man

$$dNq = dq.Kq + K.dqKq = (1 + K)\, dqKq = 2S.dqKq = 2S.Kqdq$$

oder kürzer

$$dNq = 2\, S(Kqdq) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 19)$$

Dieselbe Formel hätte auch leicht mit Hülfe der Relation (*b.* 115) erhalten werden können in nachfolgender Weise

$$dNq = Lim.\, n\left[N\left(q + \frac{dq}{n}\right) - Nq\right] = Lim.\, n\left[N\frac{dq}{n} + 2S\left(\frac{dq}{n}Kq\right)\right]$$
$$= Lim.\, n\left[\frac{1}{n^2}\, Ndq + \frac{2}{n}\, S(dqKq)\right] = 2\, S(dq.Kq).$$

Hieraus wird leicht dTq erhalten; denn es ist

$$dTq = d(Nq)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\, Nq^{-\frac{1}{2}}\, dNq = \frac{1}{2\,Tq}\, dNq = \frac{S.Kqdq}{Tq} =$$
$$= S\frac{Kqdq}{Tq} \text{ nach } (b.\ 102).$$

Indem man noch die Gleichung (*b.* 24) anwendet, wird

$$dTq = S\frac{dq}{Uq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,20)$$

Man kann jedoch diese Formel auch in anderer Gestalt erhalten. Nehmen wir wieder auf:

$$dTq = S\frac{Kq.dq}{Tq}$$

wie oben gefunden, und beachten wir die Gleichung (b. 24*), so wird

$$\frac{dTq}{Tq} = S.\frac{Kqdq}{Nq} = S\frac{dqKq}{Nq} \text{ nach } (b\ 153) = S\frac{dq}{q} \ldots \quad (e.\,21)$$

Den hier hergeleiteten Relationen schlieszt sich eine andere für $d.\rho^2$, wenn mit ρ ein Vektor bezeichnet wird, an; denn es ist

$$d.\rho^2 = -dN\rho = -2\,S(K\rho d\rho) \text{ nach } (e.\,19) = 2\,S(\rho d\rho) \text{ nach } (c.\,12)$$

oder kurz

$$d.\rho^2 = 2\,S.\rho d\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,22)$$

$$dUq = d\frac{q}{Tq} = \frac{dq}{Tq} - \frac{q}{Tq^2}dTq = \frac{1}{Tq}\left(dq - q\frac{dTq}{Tq}\right) = \frac{1}{Tq}\left(dq - qS\frac{dq}{q}\right) =$$

$$= \left(\frac{dq}{q} - S\frac{dq}{q}\right)\frac{q}{Tq} = V\frac{dq}{q}\,.\,\frac{q}{Tq} = V\frac{dq}{q}.Uq.$$

Bei beiderseitiger Multiplikation *durch* $\frac{1}{Uq}$, erhält man schlieszlich

$$\frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,23)$$

Indem die Gleichungen (e. 21) (e. 23) addirt werden, wird erhalten

$$\frac{dTq}{Tq} + \frac{dUq}{Uq} = \frac{dq}{q}$$

im Einklange mit dem Resultate, welches durch die Differentiation der Gleichung

$$q = TqUq$$

erhalten wird.

119. Wir haben in dem vorigen Artikel einige Fundamentalformeln bewiesen, welche jetzt dazu verwendet werden mögen, einige weniger einfachen herzuleiten. Zuerst sei genommen $dUVq$.

Nach (e. 23) ist

$$\frac{dUVq}{UVq} = V\frac{dVq}{Vq} = V\frac{Vdq}{Vq} \text{ nach } (e.\,18) = V\frac{IVdq}{IVq} \text{ nach}(b.88)\ (e.24)$$

Der Richtung nach fallen $IVdq$ und IVq zusammen mit $Ax.dq$, $Ax.q$ bzhw.

Die Ebene des Quaternions

$$IVdq : IVq$$

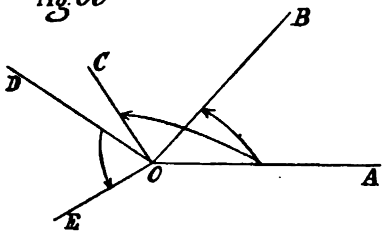
ist demnach senkrecht zur Durchschnittsgeraden der Ebenen der Quaternionen dq, q.

Ist in der Figur 60 $q = \mathrm{OB} : \mathrm{OA}$, $dq = \mathrm{OC} : \mathrm{OA}$, $\mathrm{OD} = Ax.q$, $\mathrm{OE} = Ax.dq$, so wird OA oder der gemeinschaftliche Nenner der beiden Quaternionen q, dq auch

$$Ax\,(IVdq : IVq)$$

sein, und somit fällt

Fig. 60



$$IV(IVdq : IVq)$$

der Richtung nach mit OA zusammen.

Es erscheint daher $dUVq$ nach (e. 24) als das Produkt zweier rechten Quaternionen oder deren Indices, und die letzteren fallen längs OA, OD bzhw. $dUVq$ ist somit ein Quaternion in der Ebene DOA. Die Achse dieses Quaternions liegt in der Ebene des Quaternions q und ist senkrecht zur Durchschnittsgeraden der Ebenen von q und dq.

$$dVUq = VdUq \text{ nach } (e.\,18) = V\left[V\frac{dq}{q}.\,Uq\right] \ldots\ldots (e.\,25)$$

$$dSUq = S.dUq = S\left[V\frac{dq}{q}.\,Uq\right] = S\left[V\frac{dq}{q}(SUq + VUq)\right]$$

$$= S\left[V\frac{dq}{q}VUq\right] = S\left[\left(S\frac{dq}{q} + V\frac{dq}{q}\right)VUq\right] = S.\frac{dq}{q}\,VUq$$

oder kurz

$$dSUq = S.\frac{dq}{q}\,VUq \ldots\ldots\ldots (e.\,26)$$

Diese Formel setzt uns in den Stand $d\angle q$ zu berechnen. Denn nach (b. 103) ist

$$SUq = \cos \angle q,$$

somit

$$dSUq = -\sin \angle q \, d\angle q.$$

Die Vergleichung der Formeln (*b.* 124) (*b.* 125) ergibt

$$VUq = \sin \angle q \, . \, UVq$$

und hiermit geht (*e.* 26) über in:

$$dSUq = S.\frac{dq}{q} \sin \angle q UVq = \sin \angle q \, S.\frac{dq}{q} UVq.$$

Nun musz dieses Resultat nach einer vorigen Gleichung auch

$$-\sin \angle q \, d \angle q$$

sein. Man erhält demnach

$$d \angle q = - S.\frac{dq}{q} UVq \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (e. 27)$$

Diese Gleichung kann noch ein wenig umgestaltet werden. Weil nämlich nach (*b.* 129),

$$(UVq)^2 = -1,$$

so ist

$$UVq = -\frac{1}{UVq},$$

und es wird

$$d \angle q = S\left(\frac{dq}{q}. - UVq\right) = S.\frac{dq}{q} \frac{1}{UVq} = S \frac{dq}{qUVq}$$

weil q und UVq complanar sind und deshalb in dem Produkte derselben umgetauscht werden können. Schlieszlich ist daher die Formel erhalten

$$d \angle q = S \frac{dq}{qUVq} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (e. 28)$$

Nach (*e.* 21) wird weiter

$$\frac{dTVq}{TVq} = S\frac{dVq}{Vq} = S\frac{Vdq}{Vq}$$

oder

$$dTVq = S.Vdq\frac{TVq}{Vq} = S\frac{Vdq}{UVq} = TVdq \, S\frac{UVdq}{UVq}.$$

Es sind $UVdq$, UVq rechte Radiale in den Ebenen der Quaternionen dq, q bzhw. Der Quotient derselben ist somit ein rechter Radial, dessen Achse mit der Durchschnittsgeraden der genannten Ebenen zusammenfällt, und der Skalarteil dieses Radials ist daher der Cosinus des Winkels dieser Ebenen oder des Winkels der Achsen der Quaternionen dq, q. Bezeichnet man diesen Winkel mit $\angle(Ax.q, Ax.dq)$, so wird schlieszlich

$$dTVq = TVdq \cos\angle(Ax.q, Ax.dq) \quad \ldots\ldots (e. 29)$$

120. Die im ersten Abschnitte bei (a. 50) bewiesene Gleichung

$$Td\rho = ds$$

kann mit den jetzt erörterten Begriffen noch in andrer Gestalt erscheinen.

Wenn ρ und s als Funktionen des Skalars u betrachtet werden, so ist auch

$$T\frac{d\rho}{du} = \frac{ds}{du}$$

oder wenn die Derivirten

$$\frac{d\rho}{du}, \frac{ds}{du} \text{ mit } \rho', s'$$

bezeichnet werden

$$T\rho' = s' \text{ und } T\rho'^2 = s'^2.$$

Es ist jedoch

$$T\rho'^2 = -\rho'^2,$$

weil ρ' ein Vektor ist. Somit geht die zuletzt erhaltene Gleichung über in die nachfolgende

$$\rho'^2 + s'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e. 30)$$

Bei nochmaliger Differentiation erhält man nach (e. 22)

$$S.\rho' d\rho' + s' ds' = 0,$$

oder indem durch du dividirt und statt

$$\frac{d\rho'}{du}, \frac{ds'}{du}$$

wieder ρ'', s'' eingeführt werden,

$$S\rho'\rho'' + s's'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e. 31)$$

Eine dritte Differentiation ergibt:

$$S\rho'\rho''' + \rho''^2 + s's''' + s''^2 = 0 \quad \ldots\ldots (e. 32)$$

u. s. w.

Wenn die Grösze s als unabhängige Variable gewählt wird, so gehen die vier vorhergehenden Gleichungen über in die einfacheren

$$T\rho' = 1, \quad \rho'^2 + 1 = 0, \quad S\rho'\rho'' = 0, \quad S\rho'\rho''' + \rho''^2 = 0.$$

121. Wenn eine Funktion $F(Q)$ gegeben ist, in der Q eine Funktion eines Quaternions q bedeutet, so kann man das Differential $dF(Q)$ folgenderweise in dq ausdrücken. Es mögen dQ, dq simultane Differentiale der Gröszen Q, q sein; man kann sodann erst $dF(Q)$ in dQ ausdrücken, indem man berechnet:

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left(Q + \frac{dQ}{n}\right) - F(Q)\right].$$

Dadurch entsteht eine Gleichung der Form

$$dF(Q) = \Phi(Q, dQ) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,33)$$

Sodann kann man dQ mittelst dq ausdrücken. Denn, wenn

$$Q = f(q),$$

so ist

$$dQ = Lim.\, n\left[f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right]$$

Dadurch erhält man

$$dQ = \psi(q, dq) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,34)$$

und indem dieses Resultat in (e. 33) eingeführt wird

$$dF(Q) = \Phi(Q, \psi(q, dq)) \ldots\ldots\ldots \quad (e.\,35)$$

Die Richtigkeit des hier erörterten Verfahrens wird aus den nachstehenden Betrachtungen einleuchten. Der Definition nach ist

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right)\right\} - F\{f(q)\}\right] \ldots \quad (e.\,36)$$

und

$$df(q) = Lim.\, n\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\}.$$

Man kann demnach setzen:

$$n\left\{f\left(q + \frac{dq}{n}\right) - f(q)\right\} = df(q) + \varepsilon,$$

wenn ε eine Grösze ist, welche verschwindet, wenn n ins Unendliche wächst.

In andrer Schreibweise wird die letzere Gleichung

$$f\left(q + \frac{dq}{n}\right) = Q + n^{-1}(dQ + \varepsilon).$$

Hiermit geht aber (e. 36) in die nachstehende Gestalt über

$$dF(Q) = Lim.\, n\left[F\left(Q + \frac{dQ + \varepsilon}{n}\right) - F(Q)\right].$$

Die zweite Seite ist das Differential der Funktion $F(Q)$, wenn das Differential der Grösze Q mit $dQ + \varepsilon$ bezeichnet wird; mit der oben eingeführten Bezeichnung wird deshalb

$$dF(Q) = Lim.\, \Phi(Q, dQ + \varepsilon)$$

und nach (e. 3*)

$$dF(Q) = \Phi(Q, dQ) + Lim.\, \Phi(Q, \varepsilon).$$

Das zweite Glied der zweiten Seite verschwindet aber, weil $\Phi(Q, \varepsilon)$ in Bezug auf ε linear und homogen ist, während $Lim.\, \varepsilon$ der Null gleich kommt.

Nehmen wir z. B.

$$d(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen

$$q^2 - 1 = Q,$$

so wird nach (e. 17)

$$d.Q^{\frac{1}{2}} = \frac{dQ + Q^{-\frac{1}{2}}\, dQ\,.\,KQ^{\frac{1}{2}}}{4\, SQ^{\frac{1}{2}}}$$

und indem man statt Q wieder $q^2 - 1$, statt dQ nach (e. 5), (e. 9) $qdq + dq.q$ einführt, erhält man:

$$d.(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{qdq + dq.q + (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(qdq + dq.q)K(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{4\, S(q^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; (e.\, 37)$$

122. Wir wollen nun weiter eine Anwendung machen, welche uns nachher Nutzen gewähren wird. Es sei der Bruch

$$F(q, x) : f(q, x)$$

in Betracht gezogen, bei welchem für einen bestimmten Wert x_1 von x

$$F(q, x_1) = f(q, x_1) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e.\, 38)$$

werde.

Der Wert des Bruches für $x = x_1$ wird somit unbestimmt. Als den wahren Wert des Bruches betrachten wir für diesen Fall

$$\frac{F(q, x_1)}{f(q, x_1)} = Lim.\, \frac{F\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right)}{f\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right)}.$$

Es ist sodann weiter

$$\frac{F(q,x_1)}{f(q,x_1)} = Lim. \frac{F\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - F(q,x_1)}{f\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - f(q,x_1)} \text{ nach } (e.\ 38)$$

$$= Lim. \frac{n\left[F\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - F(q,x_1)\right]}{n\left[f\left(q, x_1 + \frac{dx}{n}\right) - f(q,x_1)\right]}$$

$$= \frac{F'(q,x_1)\,dx}{f'(q,x_1)\,dx} \text{ nach Art. 114} = \frac{F'(q,x_1)}{f'(q,x_1)}$$

wenn mit F', f' die Differentialquotienten bezeichnet werden.

Wenn jedoch für einen bestimmten Wert q_1 von q die Gröszen $F(q,x)$ und $f(q,x)$ verschwinden, so sind wir nicht berechtigt

$$Lim. \frac{F\left(q_1 + \frac{dq}{n}, x\right)}{f\left(q_1 + \frac{dq}{n}, x\right)}.$$

als den wahren Wert des Bruches zu definiren; denn es wäre sodann herzuleiten, dass dieser Wert auf

$$dF(q_1, x) : df(q_1, x)$$

führt, wo dF, df die Differentiale in Bezug auf q sind. In Zähler und Nenner des letzteren Ausdrucks käme dq jedoch nicht als commutativer Faktor vor; es fiele derselbe somit in dem endgültigen Resultat nicht fort und der Wert des Bruches bliebe unbestimmt, denn es würde derselbe mit dem Werte der Grösze dq sich ändern.

Wenn in dem ersteren Falle auch

$$F'(q,x) : f'(q,x)$$

unbestimmt ist, so hat man natürlich in diesem Bruche Zähler und Nenner nochmals zu differenziren.

123. Wenn man einem Quaternion q eine Änderung dq erteilt, so wollen wir diese Grösze das erste Differential von q nennen. Wenn nachher eine zweite Änderung dem Quaternion q erteilt wird, so kann dieselbe stets in dq und eine andere Grösze, welche wir mit d^2q bezeichnen wollen, zergliedert werden;

d^2q soll sodann das zweite Differential des Quaternions q heiszen. Es braucht dies nicht mit dq complanar zu sein und auch nicht verschwindend klein.

Die ganze Änderung, welche q erfahren hat, ist

$$2\,dq + d^2q.$$

Das erste Differential einer Funktion $F(q)$ ist, wie wir vorher fanden, als Funktion der beiden Gröszen q, dq zu betrachten, so dass man setzen kann:

$$dF(q) = \Phi(q, dq).$$

Wir definiren nun das zweite Differential der Funktion $F(q)$, welches wir zugleich mit $ddF(q)$ oder $d^2F(q)$ bezeichnen wollen, durch die Gleichung

$$d^2F(q) = Lim.\, n\left[\Phi\left(q + \frac{dq}{n}, dq + \frac{d^2q}{n}\right) - \Phi(q, dq)\right], Lim.\, n = \infty \quad (e. 39)$$

Aus dieser Definition geht unmittelbar ein Satz hervor. Denn man erhält:

$$d^2F(q) = Lim.\, n\left[\Phi\left(q + \frac{dq}{n}, dq + \frac{d^2q}{n}\right) - \Phi\left(q, dq + \frac{d^2q}{n}\right)\right] +$$
$$+ Lim.\, n\left[\Phi\left(q, dq + \frac{d^2q}{n}\right) - \Phi(q, dq)\right],\ Lim.\, n = \infty.$$

Das erste Glied der zweiten Seite dieser Gleichung ist das Differential der Funktion

$$Lim.\, \Phi\left(q, dq + \frac{d^2q}{n}\right)$$

oder $\Phi(q, dq)$ nach q genommen, während dq constant bleibt; das zweite Glied das Differential der Funktion $\Phi(q, dq)$ nach dq genommen, während q constant bleibt. Wir schreiben deshalb:

$$d^2F(q) = Lim.\, d_q\Phi\left(q, dq + \frac{d^2q}{n}\right) + d_{dq}\,\Phi(q, dq),\ Lim.\, n = \infty$$

oder

$$d^2F(q) = d_q\Phi(q, dq) + d_{dq}\,\Phi(q, dq) \quad \ldots\ldots \quad (e. 40)$$

wo unter $d_q\Phi(q, dq)$ die Änderung verstanden wird, welche die Funktion Φ dadurch erfährt, dass q in $q + dq$ übergeht, und in gleicher Weise unter $d_{dq}\,\Phi(q, dq)$ die Änderung von Φ der Zunahme der Grösze dq um d^2q zufolge. Es erscheint somit das zweite Differential aus zwei anderen, ersten, Differentialen zusammengesetzt.

Wenden wir uns nunmehr zu einigen Beispielen der Berechnung

1°. $$d^2.q^2 = qd^2q + 2\,dq^2 + d^2q.q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e.\,41)$$

wo in dem mittleren Gliede der zweiten Seite dq^2 statt (dq^2) geschrieben ist.

Es ist hierbei

$$d.q^2 = qdq + dq.q = \Phi(q, dq)$$

und demzufolge

$$d_q\Phi(q, dq) = dq.dq + dq.dq = 2\,dq^2$$
$$d_{dq}\,\Phi(q, dq) = qd^2q + d^2q.q^2.$$

Bei der Differentiation ist in der ersten Formel dq, in der zweiten q als constant zu betrachten.

Durch Addition erhält man die Formel $(e.\,41)$

2°. $$d^2.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1} - q^{-1}d^2q.q^{-1} \;.\;.\;.\;.\;.\; (e.\,42)$$

Es ist nämlich

$$\Phi(q, dq) = d.q^{-1} = -\,q^{-1}dq.q^{-1}$$
$$d_q\Phi(q, dq) = -\,d(q^{-1})\,dq.q^{-1} - q^{-1}dqd(q^{-1})$$
$$= +\,q^{-1}dq.q^{-1}dq.q^{-1} + q^{-1}dq.q^{-1}dq.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1}$$
$$d_{dq}\Phi(q,dq) = -\,q^{-1}d^2q.q^{-1}.$$

124. Mit dem vorigen Artikel haben wir schon ein bisher noch nicht in Betracht gezogenes Gebiet betreten, die Differentiation der Funktionen, welche zwei unabhängige Veränderliche enthalten, sei es denn, dass die eine derselben in diesen Funktionen stets linear und homogen vorkam.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir allgemein die Differentiation der Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen $q, q', q'', \ldots$ näher ins Auge fassen und einige Sätze beweisen.

Es sei $F(q, q', q'' \ldots)$ die in Betracht kommende Funktion. Wenn nun die Veränderlichen $q, q', q'' \ldots$ Änderungen dq, dq', $dq \ldots$ erfahren, deren jede endlich und willkürlich sein kann, so wollen wir als das **totale Differential** der Funktion F definiren:

$$dF = Lim.\, n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q' + \frac{dq'}{n}, q'' + \frac{dq''}{n}, \ldots\ldots\right) - \right.$$
$$\left. - F(q, q', q'' \ldots)\right], \quad Lim.\, n = \infty\,.$$

Indem wir den zwischen Klammern stehenden Ausdruck zergliedern, wie nachstehend:

$$F\left(q+\frac{dq}{n}, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)-F\left(q, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\right)+$$
$$+F\left(q, q'+\frac{dq'}{n}, q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\ldots\right)-F\left(q, q', q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\ldots\ldots\right)+$$
$$+F\left(q, q', q''+\frac{dq''}{n}, \ldots\ldots\ldots\right)-F(q, q', q'', \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

. . . .

ersehen wir, wie im Art. 123, dass dF als die Summe n anderer Ausdrücke betrachtet werden kann, welche wir in folgender Weise bezeichnen wollen

$$dF = d_q F + d_{q'} F + d_{q''} F + \ldots\ldots\ldots \quad (e. 43)$$

und welche successive die Änderungen bedeuten, die die Funktion F erfährt, wenn jedesmal eine einzige der Veränderlichen einen Zuwachs erhält, während die übrigen sämtlich constant bleiben.

Man kann somit diese Gröszen die **partiellen Differentiale** der Function F in Bezug auf jede der Variablen q, q', q''... nennen.

Aus Art. 114 wissen wir, dass $d_q F$ in Bezug auf dq homogen und linear ist, und dasselbe ist mit $d_{q'} F$, $d_{q''} F$... in Bezug auf dq', dq''... bzhw. der Fall. Das totale Differential dF ist somit homogen und linear in Bezug auf alle die Gröszen dq, dq', dq''...

125. Einige Beispiele mögen das vorhergehende erläutern.

1°. $$F = qq'.$$

Es ist hiebei

$$dF = qdq' + q'dq \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e. 44)$$

Denn der Bedeutung nach ist

$$d_q F = dq.q' \text{ und } d_{q'} F = qdq'.$$

Bei der ersten Differentiation ist nämlich q', bei der zweiten q als constant zu betrachten.

2°. $$F = \frac{q'}{q}.$$

Es wird

$$dF = \frac{dq'}{q} - q' q^{-1} dq . q^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e. 45)$$

denn

$$d_q F = q' d\frac{1}{q} = -q' q^{-1} dq . q^{-1} \text{ und } d_{q'} F = \frac{dq'}{q}$$

3⁰. $$F = q^{-1} q';$$

Hierbei ist

$$dF = -q^{-1} dq . q^{-1} q' + q^{-1} dq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e. 46)$$

weil

$$d_q F = d(q^{-1}) . q' = -q^{-1} dq . q^{-1} q' \text{ und } d_{q'} F = q^{-1} dq'.$$

126. Wenn allgemein

$$F = Q\chi,$$

wo Q, χ jede für sich eine Funktion der Gröszen q, q', q''... ist, so werden für die partielle Differentiation nach (e. 11) die Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} d_q Q\chi &= d_q Q . \chi + Q d_q \chi \\ d_{q'} Q\chi &= d_{q'} Q . \chi + Q d_{q'} \chi \\ d_{q''} Q\chi &= d_{q''} Q . \chi + Q d_{q''} \chi \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Addition wird somit erhalten

$$\begin{aligned} (d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots) Q\chi = {} & (d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots) Q . \chi \\ & + Q(d_q + d_{q'} + d_{q''} + \ldots) \chi \end{aligned}$$

oder

$$dQ\chi = dQ . \chi + Qd\chi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e. 47)$$

Das Theorem (e. 11) bleibt somit gültig, wenn darin die Symbole d als totale Differentiale von Funktionen mehrerer Variablen betrachtet werden.

Weil das zweite Differential einer Funktion F einer einzigen Veränderlichen nach der Definition ein totales Differential ist, so ersieht man leicht die Richtigkeit der nachfolgenden Transformationen, wobei wir voraussetzen, die beiden Funktionen Q, χ seien nur von q abhängig.

$$\begin{aligned} d^2 Q\chi &= d.dQ\chi = d(Qd\chi + dQ.\chi) \text{ nach } (e. 11) \\ &= Qdd\chi + dQd\chi + dQd\chi + ddQ.\chi \end{aligned}$$

oder

$$d^2 Q\chi = Qd^2\chi + 2\, dQd\chi + d^2 Q . \chi \quad \ldots\ldots \quad (e. 48)$$

$$d^2Nq = d.dNq = d.2S(Kq.dq) \text{ nach } (e.\,19) = 2Sd(Kq.dq) \text{ nach } (e.\,18)$$
$$= 2\,S(dKq.dq + Kqd^2q) = 2\,S(Kdq.dq + Kqd^2q)$$
$$= 2\,S(Ndq + Kqd^2q) = 2\,(Ndq + S.Kqd^2q)$$

oder kürzer

$$d^2Nq = 2\,(Ndq + S.Kqd^2q) \;\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,49)$$

Als besonderen Fall kann man hieraus herleiten, wenn ρ ein Vektor ist

$$d^2\rho^2 = -d^2N\rho = -2\,(Nd\rho + S.K\rho d^2\rho) = -2Nd\rho + 2\,S.\rho d^2\rho.$$

Wird unter $d\rho$ ein Vektor verstanden, so ist noch $Nd\rho$ durch $(d\rho)^2$ oder $-d\rho^2$ zu ersetzen; daher

$$d^2.\rho^2 = 2\,d\rho^2 + 2\,S.\rho d^2\rho \;\ldots\ldots\ldots \quad (e.\,50)$$

127. Bisweilen wird angenommen, dass das zweite Differential der unabhängigen Veränderlichen q verschwindet. Es hat dies den Vorteil, dass die vorhergehenden Formeln beträchtlich vereinfacht werden. So gehen z. B. die Gleichungen $(e.\,41)$ $(e.\,42)$ hierdurch über in

$$d^2.q^2 = 2\,dq^2 \text{ und } d^2.q^{-1} = 2\,(q^{-1}dq)^2q^{-1} \;\ldots \quad (e.\,51)$$

Bei derselben Voraussetzung erhält man auch:

$$(q + dq)^2 = q^2 + qdq + dq.q + dq^2 = q^2 + d.q^2 + \tfrac{1}{2}\,d^2.q^2$$

eine Formel, analog dem Taylorschen Satze, auf den wir später zurückkommen.

128. Man kann nunmehr auch leicht dritte und höhere Differentiale einer Funktion einer einzigen unabhängigen Variablen verstehen. Es ist nämlich das zweite Differential eine Funktion der Gröszen q, dq, d^2q. Das dritte Differential definiren wir als das totale Differential des zweiten, wenn die Gröszen q, dq, d^2q als unabhängige Variablen betrachtet werden, und demgemäsz willkürliche Änderungen dq, d^2q, d^3q erfahren.

Analoge Definitionen können für die höheren Differentiale festgestellt werden.

Man ersieht leicht, dass man hat

$$d^3Q\chi = d.d^2Q\chi = d(Qd^2\chi + 2\,dQd\chi + d^2Q.\chi)$$
$$= (Qd^3\chi + dQd^2\chi) + (2dQd^2\chi + 2d^2Qd\chi) + d^2Qd\chi + d^3Q.\chi)$$
$$= Qd^3\chi + 3\,dQd^2\chi + 3\,d^2Qd\chi + d^3Q.\chi$$

und allgemein

$$d^n Q\chi = Qd^n\chi + \binom{n}{1} dQd^{n-1}\chi + \binom{n}{2} d^2Qd^{n-2}\chi + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \binom{n}{2} d^{n-2}Qd^2\chi + \binom{n}{1} d^{n-1}Qd\chi + d^nQ.\chi \quad . \; (e.\,52)$$

129. Natürlich können auch partielle Differentiale der zweiten und höheren Ordnung gebildet werden. Das erste partielle Differential nach q einer Funktion $F(q, q', q'' \ldots)$ ist nämlich eine Funktion der Gröszen q, dq, q', $q'' \ldots$. Bildet man nun das erste partielle Differential nach q' dieser Funktion so entsteht ein Ausdruck, welchen wir mit $d_{q'} d_q F$ bezeichnen.

Einige Beispiele mögen dies erörtern.

Es sei
$$F = qq',$$
so ist
$$d_q F = dq.q'$$
somit wird
$$d_{q'} d_q F = dq.dq' \text{ sein.}$$

Es sei zweitens
$$F = q^2 q'^2,$$
so ist
$$d_q F = (qdq + dq.q)q'^2$$
und
$$d_{q'} d_q F = (qdq + dq.q)\,(q'dq' + dq'.q') = qdq.q'dq' + dq.qq'dq +$$
$$+ qdq.dq'.q + dq.qdq'.q'$$
$$d_q d_q F = (qd^2q + 2\,dq^2 + d^2q.q^2)q'^2 \text{ u. s. w.}$$

Es gilt, wie in der Differentialrechnung bei Skalaren der Satz
$$d_q d_{q'} F = d_{q'} d_q \ldots\ldots\ldots\ldots \; (e.\,53)$$

Den Definitionen zufolge ist nämlich
$$d_q F = Lim.\, n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right],\; Lim\, n = \infty$$
$$d_{q'} d_q F = d_{q'}\; Lim.\, n \left[F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right]$$
$$= Lim.m \left[Lim.n \left[\left\{ F\left(q + \frac{dq}{n}, q' + \frac{dq'}{m}, \ldots\right) - F\left(q, q' + \frac{dq'}{m}, \ldots\right) \right\} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left\{ F\left(q + \frac{dq}{n}, q', \ldots\right) - F(q, q', \ldots) \right\} \right] \right], \quad \begin{matrix} Lim.\, m = \infty\,. \\ Lim.\, n = \infty\,. \end{matrix}$$

$$=Lim.n\left[Lim.m\left[\left\{F\left(q+\frac{dq}{n},q'+\frac{dq'}{m},....\right)-F\left(q+\frac{dq}{n},q'....\right)\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left\{F\left(q,q'+\frac{dq'}{m},....\right)-F(q,q',....)\right\}\right]\right]$$
$$=d_q\,Lim.\,m\left[F\left(q,q'+\frac{dq'}{m},....\right)-F(q,q',....)\right]$$
$$=d_q d_{q'} F$$

130. Eine wichtige Aufgabe, in diesem Abschnitte noch zu lösen, ist die Erledigung der Frage, ob bei Quaterniondifferentialen ein dem Taylorschen Satze analoges Theorem gültig ist. In der Tat wird sich ergeben, dass dies bei gewissen Voraussetzungen der Fall sein kann.

Die endgültige Form desselben ist, wenn wir eine symbolische wählen,

$$f(q+dq)=\left(1+d+\tfrac{1}{2}\,d^2+\frac{1}{2.3}\,d^3+\ldots\frac{1}{2\ldots p}\,d^p\right)f(q)+R \quad (e.54)$$

wobei vorausgesetzt werden musz, dass keine der Gröszen $f(q+dq)$, $f(q)$, $df(q)$, $d^2f(q)$ unendlich grosz wird, und dass bei den höheren Differentialen, von $d^2f(q)$ an, die Grösze d^2q der Null gleich gesetzt ist.

Die obige Form zu erhalten, machen wir die nachstehenden Überlegungen.

Aus der Definition

$$df(q)=Lim.\,n\left[f\left(q+\frac{dq}{n}\right)-f(q)\right],\ Lim.\,n=\infty,$$

folgt

$$df(q)+\varepsilon_1=n\left[f\left(q+\frac{dq}{q}\right)-f(q)\right]$$

wenn ε_1 eine Grösze ist, welche bei wachsendem n der Null sich nähert.

Daher ist

$$f\left(q+\frac{dq}{n}\right)=f(q)+n^{-1}df(q)+\varepsilon_1 n^{-1} \quad .\ .\ .\ .\ (e.\,55)$$

In dieser Gleichung wollen wir q durch $q+\dfrac{dq}{n}$ ersetzen; es soll dann zuerst untersucht werden, was aus $df(q)$ wird. Nach dem Vorhergehenden ist

$$df(q) = \Phi\,(q\,,\,dq).$$

Es soll nun hierin q mit $\frac{dq}{n}$ wachsen.

Weil aber nach unsren Voraussetzungen

$$d^2q = 0$$

gesetzt wird, so lässt die Gleichung (*e.* 39) sich vereinfachen zur nachstehenden Formel

$$Lim.\, n\left[\Phi\left(q + \frac{dq}{n}\,,\, dq\right) - \Phi(q, dq)\right] = d^2f(q)$$

und somit

$$\Phi\left(q + \frac{dq}{n}\,,\, dq\right) = \Phi\,(q, dq) + n^{-1}\, d^2f(q) + \varepsilon_2\, n^{-1}$$
$$= df(q) + n^{-1}\, d^2f(q) + \varepsilon_2\, n^{-1}$$

wo ε_2 der Null sich nähert, wenn n ins Unendliche wächst.

Die Gleichung (*e.* 55) liefert nunmehr, wenn wir q durch $q + \frac{dq}{n}$ ersetzen

$$f\left(q + 2\frac{dq}{n}\right) = f\left(q + \frac{dq}{n}\right) + n^{-1}\, df(q) + n^{-2}\, d^2f(q) + \varepsilon_2 n^{-2} + \varepsilon_1 n^{-1}$$
$$= f(q) + 2n^{-1} df(q) + n^{-2} d^2f(q) + 2\varepsilon_1 n^{-1} + \varepsilon_2 n^{-2}\ . \quad (e.\ 56)$$

In gleicher Weise erkennen wir, dass, wenn wir nochmals q durch $q + \frac{dq}{n}$ ersetzen, $d^2f(q)$ in

$$d^2f(q) + n^{-1}\, d^3f(q) + \varepsilon_3\, n^{-1}$$

übergeht. Denn auch $d^2f(q)$ hat jetzt die Form

$$\psi(q, dq)$$

erhalten, und es ist nun

$$\psi\left(q + \frac{dq}{n}\,,\, dq\right)$$

zu bestimmen aus

$$Lim.\, n\left[\psi\left(q + \frac{dq}{n}\,,\, dq\right) - \psi(q,\, dq)\right] = d^3f(q).$$

Somit wird

$$f\left(q + 3\,\frac{dq}{n}\right) = f(q) + 3\; n^{-1}\, df(q) + 3\, n^{-2}\, d^2f(q) + n^{-3}\, d^3f(q) +$$
$$+ 3\,\varepsilon_1\, n^{-1} + 3\,\varepsilon_2\, n^{-2} + \varepsilon_3\, n^{-3}$$

und wenn man in dieser Weise fortfährt, zuletzt

$$f\left(q+m\frac{dq}{n}\right)=$$

$$f(q)+\binom{m}{1}n^{-1}\,df(q)+\binom{m}{2}n^{-2}\,d^2f(q)+\ldots\ldots+\binom{m}{m}n^{-m}\,d^mf(q)+$$
$$+\binom{m}{1}\varepsilon_1\,n^{-1}+\binom{m}{2}\varepsilon_2\,n^{-2}+\ldots\ldots+\binom{m}{m}\varepsilon_m\,n^{-m}.$$

Diese Gleichung wollen wir noch eine kleine Abänderung erfahren lassen. Die $(p+1)$ ersten Glieder der zweiten Seite sollen nämlich hingeschrieben werden; die Summe aller übrigen Glieder jedoch wollen wir mit einem einzigen Buchstaben R' bezeichnen. Es wird sodann

$$f\left(q+\frac{m}{n}\,dq\right)=f(q)+\binom{m}{1}n^{-1}\,df(q)+\binom{m}{2}n^{-2}\,d^2f(q)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\binom{m}{p}n^{-p}\,d^pf(q)+R'\quad\ldots\ldots\quad(e.\ 57)$$

wenn

$$R'=\binom{m}{p+1}n^{-p-1}\,d^{p+1}f(q)+\ldots\ldots+\binom{m}{m}n^{-m}\,d^mf(q)+$$
$$+\binom{m}{1}\varepsilon_1\,n^{-1}+\binom{m}{2}\varepsilon_2\,n^{-2}+\ldots\ldots+\binom{m}{m}\varepsilon_m\,n^{-m}.$$

Lässt man nunmehr m und n ins Unendliche wachsen, derart dass

$$Lim.\ (m:n)=1\,,$$

während man p einen endlichen Wert beilegt, so geht die Gleichung ($e.$ 57) über in

$$f(q+dq)=f(q)+df(q)+\tfrac{1}{2}\,d^2f(q)+\frac{1}{2.3}\,d^3f(q)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{1}{2\ldots p}\,d^pf(q)+R\quad\ldots\ldots\quad(e.\ 58)$$

wo R den Grenzwert des vorhergehenden R' bedeutet für die Annahme

$$Lim.\ m=Lim.\ n=\infty\,.$$

131. Es ist hiermit das Taylor'sche Theorem der Form nach hergeleitet. Zu beachten ist dabei, dass dq eine endliche Grösze sein kann. Eine bestimmte Gestalt für R, oder vielmehr Grenzwerte, zwischen denen R enthalten sein musz, haben wir nicht

gefunden. Wir wollen dieselben auch nicht suchen. Nur wollen wir noch zeigen, dass man bei der Annahme

$$Lim.\ Tdq = 0$$

die Reihe bei einem beliebigen Gliede abbrechen kann, indem die Summe der übrigen Glieder gegen das zuletzt beibehaltene verschwindet.

Oder um uns präciser auszudrücken, können wir sagen: Wenn

$$Lim.\ T.dq = 0,$$

und die Reihe bei dem Gliede

$$\frac{d^m f(q)}{1.2\ldots.m} = q_m$$

abgebrochen wird, so musz

$$Lim.\ TR_m : Lim.\ Tq_m$$

der Null sich nähern, wenn Tq_m endlich ist.

Unter R_m ist hierbei die Summe aller nach q_m kommenden Glieder der Reihe verstanden also

$$R_m = \frac{d^{m+1} f(q)}{1.2\ldots.(m+1)} + \ldots\ldots\ldots + R.$$

Bei dem Beweise dieses Satzes wollen wir Hamilton ganz folgen.

Man ersetze in (*e.* 58) dq durch xdq, und lege sich nun erst die Frage vor, welche Änderungen dies in $df(q)$, $d^2f(q)$, ... hervorruft.

Nach (*e.* 4) geht dadurch $df(q)$ in $xdf(q)$ über, weil $df(q)$ homogen und linear in Bezug auf dq ist.

Wie schon hervorgehoben, ist $d^2f(q)$ bei unsren Voraussetzungen von der Form $\psi(q, dq)$. Es ist jedoch leicht zu ersehen, dass diese Funktion homogen vom zweiten Grade in Bezug auf dq sein soll. Denn es ist $df(q)$ eine Summe von Gliedern, welche die Gestalt $Qdq.Q_1$ haben, wo Q, Q_1 Funktionen von q sind. Bei der zweiten Differentiation erhält man, weil $d^2q = 0$, aus einem einzigen Gliede

$$dQ.dq.Q_1 + Qdq.dQ_1$$

und hierin sind dQ, dQ_1 homogen und linear in Bezug auf dq; somit wird auch der ganze Ausdruck homogen vom zweiten Grade in Bezug auf dq sein.

In derselben Weise erkennt man, dass $d^3 f(q)$ homogen vom dritten Grade in Bezug auf dq ist, u. s. w.

Wir wollen nun die Reihe (*e.* 58) bei dem Gliede $\frac{d^{m-1}f(q)}{1.2\ldots(m-1)}$ abbrechen.

Die Summe der nachherkommenden Glieder sei R_{m-1} und dieselbe gehe durch die Substitution von xdq statt dq in R_x über. Man erhält sodann:

$$f(q+xdq) = f(q) + xdf(q) + \frac{x^2}{1.2}d^2f(q) + \ldots\ldots + \\ + \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}d^{m-1}f(q) + R_x$$

und somit

$$R_x = f(q+xdq) - f(q) - xdf(q) - \frac{x^2}{1.2}d^2f(q)\ldots\ldots - \\ - \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}d^{m-1}f(q) \quad \ldots\ldots \quad (e.\ 59)$$

Wenn man nun weiter x abnehmen lässt, so wird dadurch auch $T.xdq$ kleiner werden, während jedoch $U.xdq$ ungeändert bleibt. Man kann deshalb xdq, für $Lim.\ x = 0$, betrachten als einen Quaternion dq mit fortwährend abnehmendem Tensor aber unveränderlichem Versor.

Wir werden nun zuerst versuchen den Wert zu finden von

$$Lim. \frac{R_x}{\frac{x^m}{1.2\ldots.m}d^m f(q)} \text{ für } Lim.\ x = 0.$$

Nach (*e.* 59) wird $Lim.\ R_x = 0$, wenn $Lim.\ x = 0$. Dasselbe gilt auch von dem Nenner des betrachteten Bruches. Der gesuchte Grenzwert ist deshalb unbestimmt. Es sind jedoch Zähler und Nenner als Funktionen des Skalars x zu betrachten; wenn dieselben für einen Wert dieses Variablen verschwinden, so gibt das in Art. 122 Erörterte das Mittel an, den wahren Wert des Bruches zu erhalten.

Wir wollen nach diesem Artikel die successiven Differentialquotienten der Grösze R_x bestimmen, bis wir einen erhalten haben, welcher für $x = 0$ endlich bleibt. Dieselben seien mit DR_x, $D^2R_x\ldots.$ bezeichnet. Wir finden sodann aus (*e.* 59)

$$DR_x = Df(q + xdq) - df(q) - xd^2f(q) - \frac{x^2}{1.2} d^3f(q) \dots -$$
$$- \frac{x^{m-2}}{1.2\dots(m-2)} d^{m-1}f(q) \dots\dots \quad (e.\ 60)$$

worin noch $Df(q + xdq)$ bestimmt werden soll. Es ist

$$Df(q+xdq) = \frac{1}{dx} Lim. n\left[f\left\{q + \left(x + \frac{dx}{n}\right)dq\right\} - f(q+xdq)\right], Lim. n = \infty,$$
$$= \frac{1}{dx} Lim. n\left[f\left(q + xdq + dx\frac{dq}{n}\right) - f(q+xdq)\right]$$

Der Faktor der Grösze $\frac{1}{dx}$ ist aber, der Definition nach, das Differential der Funktion $f(q + xdq)$, genommen bei der Voraussetzung, dass das Differential der unabhängigen Variablen mit $dx.\ dq$ bezeichnet wird. Bei der Bezeichnung des Artikels 114 ist jener Faktor somit die Grösze $\Phi(q + xdq, dxdq)$, und nach der Gleichung (*e.* 4) kann dieser Ausdruck ersetzt werden durch $dx\, df(q + xdq)$.

Die zuletzt erhaltene Gleichung geht dadurch über in:

$$Df(q + xdq) = df(q + xdq) \dots\dots \quad (e.\ 61)$$

und hieraus erfolgt nun auch weiter

$$D^2f(q + xdq) = d^2f(q + xdq)$$

. . . .

Anstatt der Gleichung (*e.* 60) kann dadurch geschrieben werden:

$$DR_x = df(q + xdq) - df(q) - xd^2f(q) - \frac{x^2}{1.2} d^3f(q) \dots -$$
$$- \frac{x^{m-2}}{1.2\dots(m-2)} d^{m-1}f(q)$$

und man erhält hieraus weiter:

$$D^2R_x = d^2f(q + xdq) - d^2f(q) - xd^3f(q) \dots - \frac{x^{m-3}}{1.2\dots(m-3)} d^{m-1}f(q)$$

$$D^3R_x = d^3f(q + xdq) - d^3f(q) - xd^4f(q) \dots - \frac{x^{m-4}}{1.2\dots(m-4)} d^{m-1}f(q)$$

. . . .

. . . .

$$D^{m-1} R_x = d^{m-1}f(q + xdq) - d^{m-1}f(q)$$
$$D^m R_x = d^m f(q + xdq)$$

Der m^{te} Differentialquotient ist, wie hieraus ersichtlich, der erste, welcher für $x = 0$ nicht verschwindet. Berechnen wir auch noch den m^{ten} Differentialquotienten des Nenners des in Betracht gezogenen Bruches, so finden wir

$$D^m \frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q) = d^m f(q)$$

Für $Lim.\, x = 0$, wird somit erhalten

$$Lim. \frac{R_x}{\frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q)} = Lim. \frac{d^m f(q + x dq)}{d^m f(q)} = 1.$$

Es war jedoch R_x der Wert, welchen R_{m-1} oder

$$\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m} + R_m$$

erhielt, wenn man darein xdq statt dq einführte. Der Grenzwert der Grösze R_x für verschwindendes x kann man deshalb und nach den vorhergehenden Erörterungen auch als den Grenzwert der Grösze R^{m-1} für ein dq mit verschwindendem Tensor betrachten.

In gleicher Weise ist

$$Lim. \frac{x^m}{1.2 \ldots . m} d^m f(q) \text{ für } Lim.\, x = 0,$$

dassselbe wie

$$Lim. \frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}$$

für ein dq mit verschwindendem Tensor.

Somit ist:

$$Lim. \frac{R_{m-1}}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 1, \text{ wenn } Lim.\ Tdq = 0$$

oder

$$Lim. \frac{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m} + R_m}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 1,$$

und deshalb auch

$$Lim. \frac{R_m}{\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}} = 0.$$

Wenn Tdq der Null sich nähert, verschwindet somit R_m gegen $\frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}$, und dies ist was wir im Anfange dieses Artikels beweisen wollten.

In gleicher Weise hätte man auch beweisen können, dass die Grösze

$$f(q + dq) - f(q) - df(q) + \tfrac{1}{2}\, d^2 f(q) + \ldots \ldots . . + \frac{d^m f(q)}{1.2 \ldots . m}$$

bei abnehmendem dq (d. h. wenn $Lim.\ Tdq = 0$), der Grösze

$$\frac{(dq)^m}{1 \ldots . m}$$

gegenüber, verschwinden musz; ein Satz, welcher bisweilen Nutzen gewähren kann.

132. Wenn

$$df(q) = \Phi(q, dq),$$

so wollen wir die Funktion $f(q)$ das Integral der Funktion $\Phi(q, dq)$ nennen und mit $\int \Phi(q, dq)$ bezeichnen, oder in Zeichen

$$f(q) = \int \Phi(q, dq), \text{ wenn } df(q) = \Phi(q, dq) \quad \ldots \quad (e.\ 62)$$

Eine Methode der Integration ist somit die Umkehrung der Differentialformeln, und die nachstehenden Integrale sind nach ($e.$ 5), ($e.$ 6), ($e.$ 7), ($e.$ 17) unmittelbar hinzuschreiben:

$$\int (q dq + dq . q) = q^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e.\ 63)$$

$$\int q^{-1} dq . q^{-1} = - q^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e.\ 64)$$

$$\int (q^{-1} dq . q^{-2} + q^{-2} dq . q^{-1}) = - q^{-2} \quad \ldots . \quad (e.\ 65)$$

$$\int \frac{dq + q^{-\frac{1}{2}}\, dq . K q^{\frac{1}{2}}}{S . q^{\frac{1}{2}}} = 4\, q^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (e.\ 66)$$

Eine zweite Methode, die der partiellen Integration, wird der Formel ($e.$ 11) zufolge

$$d . Q\chi = Q d\chi + dQ\chi$$

ebenfalls anwendbar sein. Denn aus dieser Formel geht hervor:

$$\int Q d\chi = Q\chi - \int dQ . \chi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e.\ 67)$$

wie in der Differentialrechnung bei Skalaren.

Das Theorem is jedoch bisweilen in allgemeinerer Gestalt notwendig. Dieselbe kann aus der Formel

$$d . Q\, Q_1 Q_2 = Q Q_1 dQ_2 + Q dQ_1 . Q_2 + dQ . Q_1 Q_2$$

welche ohne Mühe bewiesen wird, hergeleitet werden und lautet:

$$\int Q dQ_1 . Q_2 = Q Q_1 Q_2 - \int Q Q_1 dQ_2 - \int dQ . Q_1 Q_2 \quad . \quad . \quad (e. 68)$$

Wäre z. B. das in (e. 64) mitgeteilte Integral zu finden, so erhielte man

$$\int q^{-1} dq . q^{-1} = q^{-1} q q^{-1} - \int q^{-1} q dq^{-1} - \int dq^{-1} . q q^{-1} \text{ nach } (e. 68)$$
$$= q^{-1} - 2 \int dq^{-1} = - q^{-1},$$

wie in (e. 64) schon verzeichnet.

133. Es sei $F(q, dq)$ eine in Bezug auf dq homogene und lineare Funktion. Fassen wir nur diejenigen Änderungen der Grösze q ins Auge, welche zwischen einem Anfangswerte q_0 und einem Endwerte q_1 liegen, und setzen wir voraus, dass die Änderung fortwährend stetig erfolgt.

Die successiven Werte von q seien mit

$$q_0, \; q', \; q'', \; q''' \ldots \ldots, \; q^{(l)}, \; q_1$$

bezeichnet und der Kürze halber möge gesetzt werden

$$q' - q_0 = dq_0, \; q'' - q' = dq', \ldots \ldots q_1 - q^{(l)} = dq^{(l)}.$$

Die Gröszen q', $q'' \ldots \ldots, q^{(l)}$ seien so gewählt, dass

$$T dq_0, \; T dq', \; T dq'' \ldots \ldots T dq^{(l)}$$

sämtlich unendlich klein sind.

Bilden wir nun die Summe

$$\Sigma F(q^{(i)}, \; dq^{(i)}),$$

wobei das Zeichen Σ auf die successiven Werte von i Bezug nimmt, so wollen wir den Grenzwert derselben bei abnehmendem $dq^{(i)}$ das zwischen den Grenzen q_0, q_1 genommene bestimmte Integral der Funktion $F(q, dq)$ nennen und mit

$$\int_{q_0}^{q_1} F(q, dq)$$

bezeichnen.

In Hinsicht auf den Wert dieses Integrals können nun zwei Fälle unterschieden werden.

1°. Die Funktion F ist das Differential einer gewissen Funktion $f(q)$, somit

$$F(q, dq) = df(q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e. 69)$$

Bei dieser Voraussetzung lässt sich der Wert des bestimmten Integrales leicht angeben. Denn es lässt sich nunmehr die Gleichung hinschreiben

$$f(q+dq) = f(q) + df(q) + \varepsilon \quad \ldots \ldots \quad (e.\,70)$$

oder

$$f(q+dq) - f(q) = F(q, dq) + \varepsilon \quad \ldots \ldots \quad (e.\,71)$$

Ist nun Tdq sehr klein, so kann gezeigt werden, dass die Grösze

$$\varepsilon = f(q+dq) - f(q) - df(q)$$

in Verhältnis zu $df(q)$ verschwinden musz und zwar kann dieser Beweis analog dem in Art. 131 geführten gegeben werden, indem man setzt

$$\varepsilon_x = f(q + xdq) - f(q)$$

und die Grenze sucht, der sich der Bruch $\varepsilon_x : xdf(q)$ bei abnehmendem x nähert.

Es mag hierbei bemerkt werden, dass hier in Bezug auf d^2q keine besondere Annahme gemacht ist.

Die Gleichung ($e.\,71$) kann nun für jeden beliebigen Wert der Gröszen q, dq angewandt werden. Wir erhalten dadurch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l} f(q') - f(q_0) = F(q_0, dq_0) + \varepsilon_0 \\ f(q'') - f(q') = F(q', dq') + \varepsilon' \\ f(q''') - f(q'') = F(q'', dq'') + \varepsilon'' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f(q_1) - f(q^{(l)}) = F(q^{(l)}, dq^{(l)}) + \varepsilon^{(l)} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (e.\,72)$$

und durch Addition

$$f(q_1) - f(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} F(q, dq) + \varepsilon_0 + \varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots + \varepsilon^{(l)}\,. \quad (e.\,73)$$

Die Gröszen $\varepsilon_0, \varepsilon', \ldots \varepsilon^{(l)}$ sind sämtlich verschwindend klein in Verhältnis zu einem jeden der in den Gleichungen ($e.\,72$) ihnen vorangehenden Glieder, deren jedes von der Gröszenordnung der gewählten dq_0, dq', dq'', ... ist. Es lässt sich hieraus schlieszen, dass die Summe

$$\varepsilon_0 + \varepsilon' + \varepsilon'' \ldots + \varepsilon^{(l)}$$

von derselben Ordnung wie eine der Gröszen dq_0, dq', dq''.... sein musz, dass diese Summe somit dem in der Gleichung ($e.\,72$) sich vorfindenden bestimmten Integrale gegenüber verschwindet.

Es ist daher schlieszlich

$$f(q_1) - f(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} F(q, dq), \text{ wenn } F(q, dq) = df(q) \quad . \; . \; . \; (e. 74)$$

Vorausgesetzt ist in dieser Gleichung nur noch, dass in der zweiten Seite Tdq verschwindend klein sein musz.

2°. Ist die Funktion F nicht als Differential einer anderen Funktion darstellbar, so behält das bestimmte Integral zwar einen Sinn insofern dasselbe dem Werte der Summe

$$F(q_0, dq_0) + F(q', dq') + \ldots\ldots + F(q^{(l)}, dq^{(l)})$$

gleich kommt, allein es ist dieser Wert im allgemeinen nicht ein bestimmter. Es geht dies einenteils daraus hervor, dass die bei dem vorhergehenden Falle angestellten Betrachtungen in diesem Falle nicht mehr anwendbar sind, andrenteils daraus dass die Änderung eines Quaternions mittelst derjenigen von *vier* Skalaren ausgedrückt werden kann, und der Wert der Summe wird in diesem Falle wesentlich dadurch beeinfluszt, in welcher Weise diese Skalare sich ändern.

Es ist dies ein Analogon der Integration längs verschiedenen Wegen, welcher man in der gewöhnlichen Rechnung begegnet, und wovon wir wissen, dass dieselbe bei gewissen Funktionen (den asynektischen) zu verschiedenen Resultaten führt.

Ein Beispiel zu diesen Erörterungen ist

$$\int_{q_0}^{q_1} (qdq + dq.q) = q_1^2 - q_0^2,$$

wie auch q von q_0 nach q_1 sich ändern möge. Dagegen hängt der Wert des Integrals

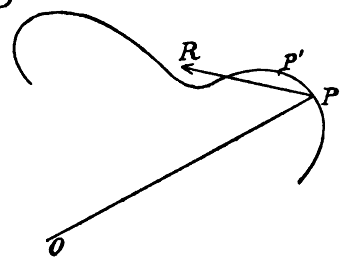
$$\int_{q_0}^{q_1} qdq$$

wesentlich von dieser Änderungsweise ab. Man kann somit die Funktion $qdq + dq.q$ auch hier eine synektische, die zweite qdq eine asynektische nennen.

134. Zwei Arten der bestimmten Integrale wollen wir noch besonders betrachten. Es sind dies die Linien- und die Oberflächenintegrale, denen man bei den Anwendungen häufig begegnet.

Wenn ρ der Vektor eines Punktes P einer gegebenen Curve ist (Fig. 61), aus welchem ein andrer Vektor R gezogen ist, so kann man den Componenten R_t des Vektors R in die Richtung der Tangente in P bestimmen, und die Grösze

Fig. 61



$$(T.R_t)\,(T.PP')$$

für den Punkt P bilden. Indem man dasselbe Verfahren in jedem Punkte der Curve anwendet und die Summe der so erhaltenen Gröszen bildet, erhält man das Linienintegral des Vektors R (längs der gegebenen Curve).

Man kann dasselbe auf sehr einfache Weise mit den Bezeichnungen des Quaternionencalcüls darstellen. Wenn nämlich statt PP' der Vektor $d\rho$ gesetzt wird, so kann ein Element des Integrales durch

$$TR\; Td\rho \cos \angle \frac{R}{d\rho}$$

ausgedrückt werden, und diese Grösze lässt sich einfacher schreiben nach dem dritten Abschnitte, nämlich:

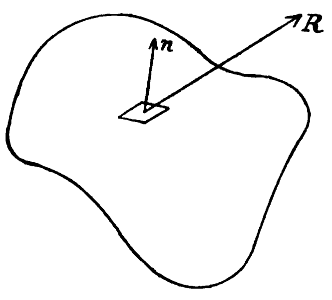
$$-S.\,Rd\rho.$$

Das Linienintegral ist somit

$$-\int_{\rho_0}^{\rho_1} S.\,Rd\rho \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e.\ 75)$$

Wenn, um zu dem Oberflächenintegrale zu geraten, eine gegebene Oberfläche in willkürliche Elemente, die wir vor der Hand dS nennen wollen, geteilt wird, und bei jedem Elemente ein Vektor R gezogen ist, so kann man den Componenten R_n dieses Vektors R in die Richtung der nach einer bestimmten Seite der Oberfläche gezogenen Normale construiren, und die Grösze

Fig. 62



$$(TR_n)\,(TdS)$$

bilden.

Die Summe aller in dieser Weise erhaltenen Glieder wird das **Oberflächenintegral** der Grösze R (längs der gegebenen Oberfläche) genannt. Wir wollen nunmehr einen Ausdruck dafür im Quaternionencalcül suchen.

Wenn wir mit ν einen Vektor bezeichnen, welcher in jedem Punkte der Oberfläche so construirt wird, dass derselbe der Richtung nach mit der Normale zusammenfällt, während

$$T\nu = TdS,$$

so ist das Oberflächenintegral durch

$$-\int S.\mathrm{R}\nu$$

darstellbar.

Wir können jedoch diesem Ausdruck eine präcisere Gestalt erteilen, wenn wir nach Art. 23 voraussetzen, der Vektor ρ eines Punktes der Oberfläche sei mittelst zwei Skalare ausgedrückt, wie nachstehend

$$\rho = \psi(u, v)\ \alpha + f(u, v)\ \beta + \phi(u, v)\gamma.$$

Denn es wird, wenn wir sodann hieraus das Differential des Vektors ρ in Bezug auf den Skalar u bilden, welches wir mit $d_u\rho$ bezeichnen wollen, $d_u\rho$ ein Element einer Curve auf der Oberfläche darstellen, weil ρ und $\rho + d_u\rho$ Vektoren zweier Punkte der Oberfläche sind. Dasselbe gilt auch von der Grösze $d_v\rho$.

Wenn wir nun die Grösze

$$S.\mathrm{R}d_u\rho d_v\rho$$

bilden, so ist dieselbe nach (*c*. 36) dem Volumen des auf den Vektoren R, $d_u\rho$, $d_v\rho$ als Seitenlinien construirten Parallelepipeds gleich, und es kommt dieses Volumen auch dem Ausdruck

$$(T.\mathrm{R}_n)\ (TdS)$$

gleich. Somit erhalten wir für das Oberflächenintegral die einfache Bezeichnung

$$\pm\int S.\mathrm{R}d_u\rho d_v\rho \qquad (e.\ 76)$$

wo die Wahl des Zeichens dadurch bestimmt werden soll, nach welcher Seite hin die Normale gezogen gedacht ist.

AUFLÖSUNG VON QUATERNIONGLEICHUNGEN ERSTEN GRADES.

135. Als eine lineare Quaterniongleichung oder eine Quaterniongleichung ersten Grades betrachten wir den Ausdruck

$$f(q) = c,$$

wo c ein constanter Quaternion ist, wenn die Funktion f der Bedingung unterworfen ist:

$$f(q' + q'') = f(q') + f(q'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\,1)$$

Im allgemeinen wollen wir im Nachstehenden den unbekannten Quaternion mit q, diejenigen Quaternionen, welche bekannt vorausgesetzt werden mit $a', b', c', d', \ldots, a'', b'' \ldots$ bezeichnen.

Die bekannten Quaternionen können auch zu Skalaren degenerirt sein.

Die einzelnen Glieder der ersten Seite einer Gleichung der betrachteten Art können nur einer der nachstehenden drei Formen angehören:

1°. aqb, wo a, b auch aus einem Produkte mehrerer bekannten Quaternionen bestehen können,

2°. $a'S.b'qc'$,

3°. $a''V(b''qc'').d''$.

Dieselbe Bemerkung, welche auf a, b sub 1° Bezug hatte, ist auch auf a', b' c', a'', b'', c'', d'' anwendbar.

Es kommen jedoch unter diesen drei Formen nur zwei wesentlich verschiedene vor; denn man erhält die nachstehenden Transformationen:

$$aqb = S.aqb + V.aqb \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 2)$$

$$a'S.b'qc' = a'(b'qc' - V.b'qc') = a'b'qc' - a'V.b'qc' \ldots \quad (f.\ 3)$$

$$a''V(b''qc'').d'' = a''(b''qc'' - S.b''qc'')d'' = a''b''qc'' - a''d''S.b''qc''. \quad (f.\ 4)$$

wodurch eine jede der ursprünglichen Formen auf die beiden anderen reducirt werden kann.

Wenn wir die allgemeinste Form der Quaterniongleichung ersten Grades angeben wollen, so können wir demnach dazu wählen

$$\Sigma aqb + \Sigma cS.a'qb' = d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 5)$$

und bevor wir zur Transformation derselben schreiten, wollen wir die Gestalt der Glieder $cS.a'qb'$ noch vereinfachen.

Es ist nämlich

$S.a'qb' = S(a'q.b') = S(b'.a'q)$ nach $(b.\ 153) = S(b'a'.q) = S.eq$, $(f.\ 6)$

wenn $b'a'$ durch e ersetzt wird.

Daher geht die Gleichung $(f.\ 5)$ über in

$$\Sigma aqb + \Sigma cS.eq = d. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 7)$$

und wir wollen uns zunächst damit beschäftigen daraus eine sogenannte lineare Vektorgleichung herzuleiten.

136. Wir nehmen zu diesem Zwecke die Skalarteile der beiden Seiten der Gleichung, welche nach $(b.\ 95)$ eine neue Gleichung bilden. Dabei werden wir jedoch beachten müssen, dass

$S.aqb = S.baq$ nach $(f.\ 6) = SbaSq + S.\,Vba\,Vq$ nach $(b.\ 149)$

$S.cSeq = SeqSc$ nach $(b.\ 102)$

$= (SeSq + S.\,Ve\,Vq)Sc$ nach $(b.\ 149) = ScSeSq + S.Sc\,Ve\,Vq$

Wir erhalten demnach durch die Operation des Symbols S an die Gleichung $(f.\ 7)$

$$[\Sigma Sba + \Sigma ScSe]Sq + S.[\Sigma\,Vba + \Sigma Sc\,Ve]\,Vq = Sd \ldots \quad (f.\ 8)$$

Setzen wir noch

$$\Sigma Sba + \Sigma ScSe = m,\ \Sigma\,Vba + \Sigma Sc\,Ve = \alpha \ldots \quad (f.\ 9)$$

wo der Bedeutung nach m eine Skalargrösze, α ein rechter Quotient (oder dessen Index) ist, so haben wir erhalten

$$mSq + S.\alpha\,Vq = Sd \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 10)$$

In gleicher Weise wollen wir an die Gleichung $(f.\ 7)$ die Operation V anwenden und dabei beachten, dass

$$V.aqb = V.(aq)b = Saq\,Vb + Sb\,Vaq + V.Vaq.Vb \text{ nach } (b.\,149)$$
$$= (SaSq + S.Va\,Vq)\,Vb + Sb(Sa\,Vq + Sq\,Va + V.Va\,Vq) +$$
$$+ V.(Sa\,Vq + Sq\,Va + V.Va\,Vq)\,Vb$$
$$= (Sa\,Vb + Sb\,Va + V.Va\,Vb)Sq + VbS.Va\,Vq +$$
$$+ V.(SaSb + Sb\,Va + Sa\,Vb)\,Vq + V.(V.Va\,Vq)\,Vb$$

Nehmen wir für sich

$$V.(V.Va\,Vq)\,Vb = -V.(Vb\,V.Va\,Vq) =$$
$$= -VqS.Va\,Vb + VaS.Vb\,Vq \text{ nach } (c.\,40)$$

so wird weiter

$$V.aqb = (Sa\,Vb + Sb\,Va + V.Va\,Vb)Sq + Vb\,S.Va\,Vq + Va\,S.Vb\,Vq +$$
$$+ V.(SaSb + Sb\,Va + Sa\,Vb - S.Va\,Vb)\,Vq$$
$$= VabSq + Va\,S.Vb\,Vq + Vb\,S.Va\,Vq +$$
$$+ V.(Sb\,Va + Sa\,Vb + SaSb - S.Va\,Vb)\,Vq$$

Noch ist

$$V.cSeq = Seq\,Vc = (SeSq + S.Ve\,Vq)\,Vc \text{ nach } (b.\,149) =$$
$$= Se\,VcSq + Vc\,S.Vc\,Vq.$$

Das Resultat der Operation V an die Gleichung $(f.\,7)$ ist somit

$$(\Sigma\,Vab + \Sigma Se\,Vc)Sq + V.\Sigma(Sb\,Va + Sa\,Vb + SaSb - S.Va\,Vb)\,Vq$$
$$+ (\Sigma\,Va\,S.Vb\,Vq + \Sigma\,Vb\,S.Va\,Vq + \Sigma\,Vc\,S.Ve\,Vq) = Vd \quad (f.\,11)$$

oder, indem wir weiter setzen

$$\Sigma\,Vab + \Sigma Se\,Vc = \beta, \quad \Sigma Sb\,Va + \Sigma Sa\,Vb = \gamma,$$
$$\Sigma(SaSb - S.Va\,Vb) = k \quad \ldots\ldots \quad (f.\,12)$$

wo der Bedeutung nach β und γ rechte Quotienten oder Vektoren sind, k ein Skalar ist, so erhalten wir

$$\beta Sq + V.(k + \gamma)\,Vq + \Sigma\,Va\,S.Vb\,Vq + \Sigma\,Vb\,S.Va\,Vq +$$
$$+ \Sigma\,Vc\,S.Ve\,Vq) = Vd \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\,13)$$

Zwischen $(f.\,10)$ und $(f.\,13)$ kann Sq eliminirt werden. Das Resultat dieser Elimination ist

$$m\,V.(k + \gamma)\,Vq + (m\Sigma\,Va\,S.Vb\,Vq + m\Sigma\,Vb\,S.Va\,Vq +$$
$$+ m\Sigma\,Vc\,S.Ve\,Vq - \beta S.\alpha\,Vq) = m\,Vd - \beta Sd.$$

Jedes Glied des zwischen Klammern eingeschlossenen Ausdrucks ist von der Form $\alpha_k S.\beta_k\,Vq$, wo α_k, β_k Vektoren bedeuten. Die zweite Seite der Gleichung ist ein Vektor, $m(k + \gamma)$ ein willkürlicher Quaternion. Setzt man noch

$$Vq = \rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\,14)$$

so ist die Gleichung $(f.\,13)$ von der Form

$$Vr\rho + \Sigma\alpha_k S\beta_k\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 15)$$

wo r einen willkürlichen Quaternion bedeutet. Das Zeichen Σ hat Bezug auf die Verschiedenheit der Gröszen α_k, β_k.

Der ersten Seite der Gleichung ($f.$ 15) ist von Hamilton der Name einer linearen Vektorfunktion eines Vektors beigelegt worden, und bei den späteren Untersuchungen ist diese Funktion mit $\Phi\rho$ bezeichnet. Der Definition nach ist deshalb

$$\Phi\rho = Vr\rho + \Sigma\alpha_k S\beta_k\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 16)$$

In diesem Symbole bedeutet Φ ein Operationszeichen an den Vektor ρ wirkend, und wir wollen im Folgenden stets annehmen, der Operator Φ wirke an den rechts von demselben stehenden Vektor, so dass $\Phi V\lambda\mu$ das Resultat der Operation Φ an den Vektor $V\lambda\mu$ bedeutet.

Soll dieses Resultat durch einen neuen Vektor oder durch einen Quaternion q multiplicirt werden, so wollen wir dies wie nachstehend schreiben

$$\Phi V\lambda\mu . q.$$

Jedoch sei unter $\Phi\rho\Phi\sigma$ ohne weiteres das Produkt der Vektoren $\Phi\rho$ und $\Phi\sigma$ verstanden.

Wenn Φ an eine Summe von Vektoren operirt, so wird dieselbe zwischen Klammern gesetzt.

Der Deutlichkeit halber kann auch bisweilen, wenn ρ eine verwickelte Gestalt hat, anstatt $\Phi\rho$ das Zeichen $\Phi(\rho)$ geschrieben werden.

137. Es gilt zunächst die Gleichung ($f.$ 15) oder

$$\Phi\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 17)$$

aufzulösen. Die Lösung stellt Hamilton wie nachstehend dar

$$\rho = \Phi^{-1}\delta . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 18)$$

und es ist diese Gleichung als die Definition des Operators Φ^{-1} zu betrachten.

138. Die Funktion Φ hat einige wichtigen Eigenschaften

1°. $$\Phi(\rho + \sigma + \ldots) = \Phi\rho + \Phi\sigma + \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 19)$$

denn es ist

$$V.r(\rho + \sigma + \ldots) = V(r\rho + r\sigma + \ldots) = Vr\rho + Vr\sigma + \ldots$$

und

$$\alpha_k S.\beta_k(\rho + \sigma + \ldots) = \alpha_k S(\beta_k\rho + \beta_k\sigma + \ldots) = \alpha_k(S\beta_k\rho + S\beta_k\sigma + \ldots)$$
$$= \alpha_k S\beta_k\rho + \alpha_k S\beta_k\sigma + \ldots$$

Es kann diese Eigenschaft auch als Definition der linearen Vektorfunktion gewählt werden.

2°. $\Phi x\rho = x\Phi\rho, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (*f.* 20)

wenn x skalar ist. Dies folgt unmittelbar aus dem vorigen Satze.

3°. $d\Phi\rho = \Phi d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots$ (*f.* 21)

Es ist nämlich:

$$d\Phi\rho = Lim.\, n\left[\Phi\left(\rho + \frac{d\rho}{n}\right) - \Phi\rho\right] = Lim.\, n\left[\Phi\rho + \Phi\frac{d\rho}{n} - \Phi\rho\right] \text{ nach } (f.\ 19)$$

$$= Lim.\, n\, \Phi\,\frac{d\rho}{n} = \Phi d\rho \text{ nach } (f.\ 20).$$

Analoge Eigenschaften sind auch bei der Funktion Φ^{-1} gültig. Es folgt nämlich aus (*f.* 19)

$$\rho + \sigma + \ldots . = \Phi^{-1}[\Phi\rho + \Phi\sigma + \ldots .].$$

Wenn nun

$$\Phi\rho = \delta,\ \Phi\sigma = \varepsilon \text{ u. s. w.}$$

so ist

$$\rho = \Phi^{-1}\delta,\ \sigma = \Phi^{-1}\varepsilon \text{ u. s. w.}$$

und indem diese Resultate in die zuletzt erhaltene Gleichung eingeführt werden:

$$\Phi^{-1}\delta + \Phi^{-1}\varepsilon + \ldots . = \Phi^{-1}(\delta + \varepsilon + \ldots .) \ldots \quad (f.\ 22)$$

Diese Gleichung spricht aus, dass auch die Funktion Φ^{-1} eine lineare Vektorfunktion ist.

Aus derselben ist weiter herzuleiten, wie bei der Funktion Φ geschehen,

$$\Phi^{-1}x\delta = x\Phi^{-1}\delta,\ d\Phi^{-1}\delta = \Phi^{-1}d\delta. \ldots\ldots \quad (f.\ 23)$$

139. Wie die Gleichung (*f.* 17) aussagt, oder auch die Definitionsgleichung (*f.* 16), ist $\Phi\rho$ ein Vektor, nämlich δ.

Man kann somit auf diesen Vektor aufs neue die Operation Φ anwenden; das Resultat, welches wir mit $\Phi\Phi\rho$ oder kürzer mit $\Phi^2\rho$ bezeichnen wollen, ist ein neuer Vektor. Auf denselben können wir wieder die Operation Φ anwenden und erhalten dadurch den Vektor $\Phi^3\rho$, u. s. w.

Dergleichen Betrachtungen lassen sich bei der Funktion Φ^{-1} durchführen.

Nach der Definitionsgleichung (*f.* 18) ist $\Phi^{-1}\delta$ ein Vektor. Wenn wir daher an diesen aufs neue mit dem Symbol Φ^{-1}

operiren, so wird das Resultat ein neuer Vektor $\Phi^{-1}\Phi^{-1}\mathfrak{z}$ sein, den wir mit $\Phi^{-2}\mathfrak{z}$ bezeichnen, u. s. w.

Es wird hierdurch die Bedeutung der Symbole $\Phi^k\rho$, $\Phi^{-l}\mathfrak{z}$, wo k und l ganze arithmetische Zahlen sind, ohne weiteres einleuchten.

Den Definitionen zufolge gelten nun die beiden nachstehenden Gleichungen.

$$\Phi^k\Phi^l\rho = \Phi^{k+l}\rho \text{ und } \Phi^{-k}\Phi^{-l}\mathfrak{z} = \Phi^{-k-l}\mathfrak{z}. \ldots \quad (f.\ 24)$$

Weiter ist

$$\Phi\Phi^{-1}\mathfrak{z} = \Phi\rho = \mathfrak{z},\ \Phi^{-1}\Phi\rho = \Phi^{-1}\mathfrak{z} = \rho. \ldots \quad (f.\ 24^*)$$

Die Funktionen

$$\Phi^2\rho,\ \Phi^3\rho \ldots,\ \Phi^k\rho \ldots$$

und ebenfalls

$$\Phi^{-2}\rho,\ \Phi^{-3}\rho \ldots \Phi^{-k}\rho \ldots$$

werden den Definitionen zufolge lineare Vektorfunktionen sein müssen; es gelten für dieselben, wie leicht nachgewiesen wird, die Eigenschaften durch ($f.$ 19), ($f.$ 22) ausgesprochen. Die beiden letzteren Gleichungen können leicht verallgemeinert werden, und man erhält in dieser Weise die beiden nachstehenden Relationen:

$$\Phi^k\Phi^{-k}\mathfrak{z} = \mathfrak{z},\ \Phi^{-l}\Phi^l\rho = \rho \ldots\ldots \quad (f.\ 25)$$

für alle ganze arithmetische Werte von k, l. Denn es ist

$$\begin{aligned}\Phi^k\Phi^{-k}\mathfrak{z} &= \Phi^{k-1}\Phi\Phi^{-1}\Phi^{-(k-1)}\mathfrak{z} \text{ nach } (f.\ 24)\\ &= \Phi^{k-1}\Phi^{-(k-1)}\mathfrak{z} \text{ nach } (f.\ 24^*)\end{aligned}$$

Man kann daher den Index k jedesmal um eins verringern, bis man auf ($f.$ 24*) kommt.

Weiter kann hieraus gefolgert werden

$$\left.\begin{aligned}\Phi^k\Phi^{-l}\mathfrak{z} &= \Phi^{k-l}\mathfrak{z} \text{ wenn } k > l\\ \text{und}\qquad &\\ &= \Phi^{-(l-k)}\mathfrak{z} \text{ wenn } k < l\\ \Phi^{-k}\Phi^l\rho &= \Phi^{l-k}\rho \text{ wenn } k < l\\ \text{und}\qquad &\\ &= \Phi^{-(k-l)}\rho \text{ wenn } k > l\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (f.\ 26)$$

Wir wollen die vier zuletzt geschriebenen Gleichungen nicht alle beweisen. Wir nehmen nur z. B. für den Fall $k > l$

$$\Phi^k\Phi^{-l}\mathfrak{z} = \Phi^{k-l}\Phi^l\Phi^{-l}\mathfrak{z} \text{ nach } (f.\ 24) = \Phi^{k-l}\mathfrak{z} \text{ nach } (f.\ 25);$$

für den Fall $k < l$

$$\Phi^k \Phi^{-l} \mathfrak{z} = \Phi^k \Phi^{-k} \Phi^{-(l-k)} \mathfrak{z} \text{ nach } (f.\,24) = \Phi^{-(l-k)} \mathfrak{z} \text{ nach } (f.\,25)$$

Man ersieht unmittelbar, dass die Gleichungen ($f.$ 26) sich zu zweien zusammenziehen lassen.

140. Es gibt eine bestimmte Funktion, welche HAMILTON in dieser Theorie mit $\Phi'\rho$ bezeichnet, welche zu $\Phi\rho$ in einer gewissen Beziehung steht, und bei der Auflösung der linearen Gleichung eine wichtige Rolle spielt. Mit derselben wollen wir uns in diesem Artikel beschäftigen. Um zu ihrer Definition zu geraten, fangen wir damit an $S.\sigma\Phi\rho$ zu transformiren, wo σ einen neuen Vektor bedeutet. Wir erhalten, indem wir auf die Gleichung ($f.$ 16) achten:

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\sigma V r\rho + \Sigma S.\sigma\alpha_k S\beta_k\rho,$$

wo das Zeichen Σ auf die Indices k Bezug nimmt. Weiter wird nun

$$\begin{aligned} S.\sigma V r\rho &= S.\sigma r\rho, \text{ weil } S.\sigma S r\rho = 0 \\ &= S.\sigma(Sr + Vr)\rho = SrS\sigma\rho + S.\sigma(Vr)\rho \\ &= SrS\rho\sigma - S.\rho(Vr)\sigma, \text{ nach } (c.\,39) \\ &= S.\rho(Sr)\sigma - S.\rho(Vr)\sigma = S.\rho(Kr)\sigma \end{aligned}$$

$$S.\sigma\alpha_k S\beta_k\rho = S\beta_k\rho S\sigma\alpha_k \text{ nach } (b.\,102) = S\rho\beta_k S\alpha_k\sigma \text{ nach } (c.\,16) = \\ = S.\rho\beta_k S\alpha_k\sigma.$$

Und hierdurch wird schlieszlich

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\rho(Kr)\sigma + \Sigma S.\rho\beta_k S\alpha_k\sigma \quad \ldots\ldots \quad (f.\,27)$$

Die im Anfange dieses Artikels erwähnte Funktion $\Phi'\rho$ definiren wir nun durch die Gleichung

$$\Phi'\rho = V.(Kr)\rho + \Sigma\beta_k S\alpha_k\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\,28)$$

Es entsteht somit die Funktion Φ' aus Φ, indem der Quaternion r durch dessen Conjugirten ersetzt und die Symbole α_k, β_k mit einander umgetauscht werden. Die Gleichung ($f.$ 27) lässt sich nun aber auch in die nachfolgende Gestalt schreiben

$$S.\sigma\Phi\rho = S.\rho\Phi'\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\,29)$$

und diese Gleichung spricht die wichtigste Eigenschaft der Funktion Φ' aus. Wir werden diese Relation im weiteren oftmals anwenden.

HAMILTON nennt die Funktion Φ' die conjugirte der Funktion Φ.

141. Es mögen in diesem Artikel einige weiteren Eigenschaften der conjugirten Funktion Platz finden.

Die conjugirte der conjugirten Funktion ist die ursprüngliche Funktion Φ. Denn es ist $KKr = \gamma$, und die neue Vertauschung der α_k, β_k führt diese Gröszen an ihre ursprünglichen Stellen zurück.

Die conjugirte der Funktion $\Phi + \Phi'$ ist die Funktion selbst, weil durch die Umänderungen Φ in Φ' und Φ' in Φ übergeht. Mann nennt deshalb $\Phi + \Phi'$ eine **selbstconjugirte Funktion.**

Wenn man in der Gleichung (*f.* 29) $\sigma = \rho$ annimmt, so wird erhalten

$$S.\rho\Phi\rho = S.\rho\Phi'\rho \text{ oder } S.\rho[\Phi\rho - \Phi'\rho] = 0.$$

Wenn wir noch $(\Phi - \Phi')\rho$ statt $\Phi\rho - \Phi'\rho$ einführen, so ist

$$S.\rho[\Phi - \Phi')\rho = 0.$$

Weil $\Phi\rho$ und $\Phi'\rho$ Vektoren sind, so ist ihre Differenz ebenfalls ein Vektor. Nach (*c.* 29) erhalten wir nun den Satz:

Der Vektor $(\Phi - \Phi')\rho$ ist stets senkrecht zu ρ.

Weil $\Phi'\rho$ ein Vektor ist, so hat der Ausdruck $\Phi\Phi'\rho$ auch einen Sinn.

Es ist ein Leichtes darzutun, dass die Funktion $\Phi\Phi'$ selbstconjugirt ist.

Denn man erhält

$$\begin{aligned} S.\rho\Phi\Phi'\sigma &= S.\rho\Phi[\Phi'\sigma] \text{ nach unserer Annahme,} \\ &= S.\Phi'\sigma\Phi'\rho \text{ nach } (f.\ 29) = S.\Phi'\rho\Phi'\sigma \text{ nach } (c.\ 16) \\ &= S.\sigma\Phi[\Phi'\rho] \text{ nach } (f.\ 29) = S.\sigma\Phi\Phi'\rho \end{aligned}$$

Wenn unter x eine Skalargrösze verstanden wird, so kann an einen Vektor ρ die Operation $\Phi + x$ vollzogen werden, ndem wir setzen

$$(\Phi + x)\rho = \Phi\rho + x\rho$$

und das Resultat ist aufs neue eine lineare Vektorfunktion.

Es ist sodann weiter:

$$\begin{aligned} S.\sigma(\Phi + x)\rho = S.\sigma[\Phi\rho + x\rho] = S.\sigma\Phi\rho + S\sigma x\rho = \\ = S.\rho\Phi'\sigma + xS.\rho\sigma = S.\rho(\Phi' + x)\sigma \end{aligned}$$

oder kurz

$$S.\sigma(\Phi + x)\rho = S.\rho(\Phi' + x)\,\sigma \ldots\ldots\ldots (f.\ 30)$$

Hieraus erhellt, dass die Funktion $\Phi' + x$ die conjugirte der Funktion $\Phi + x$ ist.

142. Hamilton hat eine allgemeine Methode angegeben die lineare Vektorgleichung ($f.$ 17) aufzulösen. Es wird hierdurch bei jeder linearen Quaterniongleichung der Vektorteil des unbekannten Quaternions bestimmt. Nachher kann mit Hülfe der Gleichung ($f.$ 10) oder auch der Gleichung ($f.$ 13) der Skalarteil bestimmt werden, wodurch das Problem der Auflösung der allgemeinen linearen Gleichung Schwierigkeiten zu bieten nicht mehr im Stande ist.

In den nachfolgenden Artikeln wollen wir die HAMILTONsche Methode darstellen.

143. Wir wählen zwei ganz willkürliche Vektoren λ, μ und bilden mit Hülfe derselben den neuen Vektor $IV\lambda\mu$ oder kurz $V\lambda\mu$. Wie im dritten Abschnitte dargetan ist, ist der Vektor $V\lambda\mu$ senkrecht zu λ und μ beiden, oder in Formeln

$$S.\lambda V\lambda\mu = 0 \text{ nach Art. 88, } S.\mu V\lambda\mu = 0. \quad . \quad . \quad (f.\ 31)$$

Somit können wir nach ($f.$ 24*) auch schreiben:

$$S.\lambda\Phi\Phi^{-1}V\lambda\mu = 0\,, \quad S.\mu\Phi\Phi^{-1}V\lambda\mu = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 31^*)$$

und indem man auf jede der beiden ersten Seiten dieser Relationen die Gleichung ($f.$ 29) anwendet, erhält man

$$S[\Phi^{-1}V\lambda\mu.\Phi'\lambda] = 0\,, \quad S[\Phi^{-1}V\lambda\mu.\Phi'\mu] = 0\,,$$

woraus wir schlieszen können, dass der Vektor $\Phi^{-1}V\lambda\mu$ senkrecht zu den beiden anderen $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$ ist. Dieselbe Eigenschaft besitzt jedoch auch der Vektor $V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$, sodass die beiden Vektoren

$$\Phi^{-1}V(\lambda\mu)\,, \quad V.\Phi'(\lambda)\Phi'(\mu)$$

der Richtung nach zusammenfallen müssen. Man kann daher setzen

$$x\Phi^{-1}V\lambda\mu = V.\Phi'\lambda\Phi'\mu. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 32)$$

wenn x ein Skalar ist.

Wir können weiter einen dritten, mit den beiden vorigen λ, μ nicht complanaren Vektor ν wählen und $\Phi'\nu$ bilden. Wenn wir die beiden Seiten der Gleichung ($f.$ 32) mit $\Phi'\nu$ multipliciren und die Skalarteile nachher einander gleich setzen, so wird erhalten

$$xS.\Phi'\nu\Phi^{-1}V\lambda\mu = S[\Phi'\nu.V\Phi'\lambda\Phi'\mu]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 33)$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung können ohne Schwierigkeit transformirt werden. Wir nehmen jede für sich

$$S.\Phi'\nu\Phi^{-1}V\lambda\mu = S.\Phi^{-1}V\lambda\mu\Phi'\nu \text{ nach } (c.16) = S.\nu\Phi[\Phi^{-1}V\lambda\mu] \text{ nach } (f.29)$$
$$= S.\nu V\lambda\mu, \text{ nach } (f.\ 24^*) = S.\nu\lambda\mu = S\lambda\mu\nu$$
$$S[\Phi'\nu.V\Phi'\lambda\Phi'\mu] = S.\Phi'\nu\Phi'\lambda\Phi'\mu, \text{ weil } \Phi'\nu.S\Phi'\lambda\Phi'\mu \text{ ein Vektor ist,}$$
$$= S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu.$$

Wenn man diese Werte in die Gleichung ($f.$ 32) einführt, erhält man

$$x = \frac{S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu}{S.\lambda\mu\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 34)$$

144. Es sind hierin λ, μ, ν drei ganz willkürliche Vektoren. Hat man eine bestimmte Wahl gemacht und wählt man nachher drei andere Vektoren α, β, γ, so müssen die beiden Resultate für x übereinstimmen. Es ist dies leicht zu zeigen; die beiden Funktionen $S.\lambda\mu\nu$, $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ besitzen nämlich Invariantencharakter, wie wir dartun wollen.

Nach Art. 22 oder nach Art. 88 kann man nämlich jeden beliebigen Vektor in drei anderen nicht complanaren linear ausdrücken. Wir setzen deshalb

$$\lambda = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma,\ \mu = a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma,\ \nu = a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma \quad (f.\ 35)$$

wo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$, Skalare sind, und wenden diese Substitution bei dem Zähler und dem Nenner der zweiten Seite der Gleichung ($f.$ 34) an.

Es wird sodann

$$\Phi'\lambda = \Phi'(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma) = \Phi'(a_1\alpha) + \Phi'(b_1\beta) + \Phi'(c_1\gamma) \text{ nach } (f.\ 19)$$

oder

$$\Phi'\lambda = a_1\Phi'\alpha + b_1\Phi'\beta + c_1\Phi'\gamma, \text{ nach } (f.\ 20)\ldots (f.\ 36)$$

Die Funktion Φ' besitzt nämlich, wie unmittelbar einleuchten musz, die im Art. 138 mitgeteilten Eigenschaften der Funktion Φ.

Es folgt aus der Gleichung ($f.$ 36) für $\Phi'\lambda$, der sich zwei analoge Relationen für $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ anschlieszen, dass diese Funktionen nach denselben Formeln transformirt werden, wie die Gröszen λ, μ, ν. Die Transformation einer der beiden Gröszen $S.\lambda\mu\nu$, $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ macht somit auch die der anderen bekannt.

Nach einiger Rechnung findet man leicht

$$S.\lambda\mu\nu = S.(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)(a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma)(a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma) =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} S.\alpha\beta\gamma.$$

Durch die Substitution (f. 35) werden demnach Zähler und Nenner des Ausdruckes für x mit derselben Grösze, der Substitutionsdeterminante multiplicirt. Der Wert der Grösze x bleibt daher ungeändert, wie zu beweisen war.

145. Wir wollen nun die HAMILTONsche Lösungsmethode weiter auseinandersetzen und kehren wieder zu den beiden Gleichungen (f. 31) zurück. Statt derselben können wir auch die beiden nachstehenden setzen

$$S.\lambda(\phi+m)[(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu]=0,\quad S.\mu(\phi+m)[(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu]=0,$$

wo m eine Skalargrösze ist, und das Symbol $(\phi+m)^{-1}$ in gleicher Weise wie ϕ^{-1} gedeutet werden soll.

Wendet man nun bei jeder dieser Relationen die Gleichung (f. 30) an, so lassen sich dieselben wie die Relationen (f. 31*) transformiren und man schlieszt daraus, dass eine Gleichung von der Form (f. 32) auch für die Funktion $\phi+m$ gültig sein musz. Nennt man x_m den Wert, welchen die Grösze x der Gleichung (f. 32) für diesen Fall erhält, so gilt demnach:

$$x_m(\phi+m)^{-1}V\lambda\mu=V.(\phi'+m)\lambda(\phi'+m)\mu.\;.\;.\;(f.\,37)$$

Die zweite Seite dieser Gleichung wollen wir zuerst transformiren

$$\begin{aligned}V.(\phi'+m)\lambda(\phi'+m)\mu &= V.[\phi'\lambda+m\lambda][\phi'\mu+m\mu]\\ &= V.[\phi'\lambda\phi'(\mu)+m\{\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\}+m^2\lambda\mu]\\ &= V.\phi'\lambda\phi'\mu+mV\{\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\}+m^2V\lambda\mu\end{aligned}$$

Bezeichnen wir der Kürze halber den Vektor

$$V\{\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\}\ \text{mit}\ \psi,$$

so ist

$$\begin{aligned}S.\lambda\psi &= S.\lambda\{\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\}=S[\lambda\phi'\lambda.\mu],\ \text{weil}\ \lambda^2\phi'\mu\ \text{ein Vektor ist,}\\ &= -S.\lambda\mu\phi'\lambda\ \text{nach}\ (c.\,39) = -S.(V\lambda\mu)\phi'\lambda =\\ &= -S.\lambda\phi V\lambda\mu\ \text{nach}\ (f.\,29)\end{aligned}$$

$$S.\mu\psi=S.\mu\{\lambda\phi'\mu+\phi'\lambda.\mu\}=S.\mu\lambda\phi'\mu+S[\mu\phi'\lambda.\mu]=-S.\lambda\mu\phi'(\mu),$$

weil nach (c. 39)

$$S[\mu\phi'\lambda.\mu]=-S.\mu^2\phi'\lambda=0.$$

Es wird nun weiter:

$$S.\mu\psi=-S.(V\lambda\mu)\phi'\mu=-S.\mu\phi V\lambda\mu.$$

Man kann nach den hier erhaltenen Resultaten somit auch schreiben

$$S.\lambda[\psi + \phi V\lambda\mu] = 0, \quad S.\mu[\psi + \phi V\lambda\mu] = 0,$$

woraus nach (c. 29) geschlossen wird, dass der Vektor $\psi + \phi V\lambda\mu$ senkrecht zu λ, μ beiden ist, und deshalb der Richtung nach mit $V\lambda\mu$ zusammenfällt. Es kann daher gesetzt werden

$$\psi + \phi V\lambda\mu = aV\lambda\mu \text{ oder } \psi = (a - \phi) V\lambda\mu$$

wo a ein Skalar ist. Wir sind somit berechtigt die Grösze ψ oder

$$V\{\lambda\phi'\mu + \phi'\lambda.\mu\}$$

als eine Funktion $\psi V\lambda\mu$ des Vektors $V\lambda\mu$ allein zu betrachten.

Die zweite Seite der Gleichung (f. 37), welche in die Form geraten war

$$V.\phi'\lambda\phi'\mu + mV\{\lambda\phi'\mu + \phi'\lambda.\mu\} + m^2 V\lambda\mu$$

kann nun weiter transformirt werden. Indem man die Gleichung (f. 32) beachtet, wird erhalten

$$x\phi^{-1} V\lambda\mu + m\psi V\lambda\mu + m^2 V\lambda\mu \text{ oder } (x\phi^{-1} + m\psi + m^2) V\lambda\mu$$

in symbolischer Gestalt. Anstatt (f 37) wird somit gelten

$$x_m(\phi + m)^{-1} V\lambda\mu = (x\phi^{-1} + m\psi + m^2) V\lambda\mu \quad . . (f. 38)$$

und wenn man jetzt an die beiden Seiten dieser Gleichung mit dem Symbol $\phi + m$ operirt, entsteht

$$x_m V\lambda\mu = (\phi + m)(x\phi^{-1} + m\psi + m^2) V\lambda\mu$$

oder

$$x_m V\lambda\mu = [x + m(\phi\psi + x\phi^{-1}) + m^2(\phi + \psi) + m^3] V\lambda\mu. \quad (f. 39)$$

Wenn man jedoch bei der Gleichung (f. 37) wie bei (f. 32) verfahren hätte, somit dieselbe unmittelbar mit $(\phi + m)\nu$ multiplicirt und die Skalarteile der beiden Seiten einander gleich gesetzt hätte, so wäre erhalten

$$x_m = \frac{S.(\phi' + m)\lambda\,(\phi' + m)\mu\,(\phi' + m)\nu}{S.\lambda\mu\nu} \quad . . . . (f. 40)$$

analog der Gleichung (f. 34)

Es ist der Zähler dieser Ausdrucks der Bedeutung nach

$$= S(\phi'\lambda + m\lambda)(\phi'\mu + m\mu)(\phi'\nu + m\nu)$$
$$= S.\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu + mS.\{\lambda\phi'\mu\phi'\nu + \mu\phi'\nu\phi'\lambda + \nu\phi\lambda\phi'\mu\}$$
$$+ m^2 S.\{\mu\nu\phi'\lambda + \nu\lambda\phi'\mu + \lambda\mu\phi'\nu\} + m^3 S.\lambda\mu\nu$$

und es erhellt hieraus, dass dieser Zähler wieder Invariantencharakter besitzt.

Setzen wir noch:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu]}{S.\lambda\mu\nu}, \\ x_2 &= \frac{S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu]}{S.\lambda\mu\nu} \end{aligned}\right\} \ldots (f. 41)$$

so werden x_1, x_2, bei der Änderung der Vektoren λ, μ, ν denselben Wert behalten.

Die Gleichung (f. 40) geht nun weiter über in

$$x_m = x + mx_1 + m^2x_2 + m^3 \ldots\ldots (f. 42)$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit der Gleichung (f. 39) liefert eine Relation, in der m alle möglichen Werte erhalten kann. Dieselbe kann somit nur bestehen, wenn die Coefficienten der gleichen Potenzen der Grösze m einander gleich sind, wodurch das System der symbolischen Gleichungen erhalten wird

$$\Phi\psi + x\Phi^{-1} = x_1, \; \Phi + \psi = x_2 \ldots\ldots (f. 43)$$

Die zweite dieser Gleichungen stimmt mit einer vorher für die Funktion ψ hergeleiteten Relation überein; nur erscheint hier die ganz bestimmte Skalargrösze x_2, während in der vorhergehenden Relation ein unbestimmter Skalar a sich vorfand. Man findet hieraus

$$\psi = x_2 - \Phi \ldots\ldots (f. 44)$$

Die Elimination der Funktion ψ zwischen den beiden Gleichungen (f. 43) führt zu einer Beziehung, welche für die Theorie der Auflösung der linearen Gleichungen die gröszte Wichtigkeit hat, weil dieselbe die Auflösung, wie wir bald ersehen werden, in sich schlieszt. Es ergibt sich durch jene Elimination:

$$x\Phi^{-1} - x_1 + x_2\Phi - \Phi^2 = 0 \ldots\ldots (f. 45)$$

Nun war jedoch unsrer Voraussetzung gemäsz

$$\rho = \Phi^{-1}\delta$$

die Auflösung der gegebenen Gleichung. Lässt man in (f. 45) die Symbole an den Vektor δ wirken, so ist

$$x\Phi^{-1}\delta = x_1\delta - x_2\Phi\delta + \Phi^2\delta \ldots\ldots (f. 46)$$

und demgemäsz

$$x\rho = x_1\delta - x_2\Phi\delta + \Phi^2\delta \ldots\ldots (f. 47)$$

wodurch ρ gefunden ist.

146. Durch die Gleichung (*f.* 46) wird die umgekehrte Operation Φ^{-1} in der direkten Operation Φ ausgedrückt. Zumeist aber wird dieser Gleichung und der ursprünglicheren Relation (*f.* 45) eine andre Gestalt erteilt. Vollzieht man nämlich an (*f.* 45) die Operation Φ und beachtet man, dass $\Phi(0)$ der Bedeutung nach verschwindet, so erhält man mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Funktion Φ in Art. 138

$$x - x_1\Phi + x_2\Phi^2 - \Phi^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 48)$$

Man pflegt somit zu sagen, die Funktion Φ genüge einer bestimmten symbolischen kubischen Gleichung. Es ist dieselbe von Hamilton ausführlich diskutirt worden, wie auch die oben eingeführte Funktion ψ und eine andere dazu in Beziehung stehende, welche wir nicht benutzt haben. Auf diese Diskussion wollen wir nicht weiter eingehen; nur seien einige speciellen Fälle erörtert.

147. Die für die Gröszen x, x_1, x_2 angegebenen Werte (*f.* 34) (*f.* 41) haben den gemeinschaftlichen Nenner $S.\lambda\mu\nu$, welcher nach unsrer Voraussetzung, es seien λ, μ, ν nicht complanar, niemals verschwinden kann. Wenn ausserdem $T\lambda$, $T\mu$, $T\nu$ endlich sind, so kann nach (*c.* 36) $S.\lambda\mu\nu$ auch nicht ins Unendliche wachsen. Es kann somit der Fall nicht eintreten, dass x, x_1, x_2 unbestimmt würden.

Verschwinden jedoch kann eine oder können mehrere dieser Gröszen wohl. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo x der Null gleich wird. Es erfordert dies, dass $S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu$ verschwindet, oder nach (*c.* 37), dass die Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ complanar sind. Es besteht somit ein Vektor π, welcher zu den drei vorigen senkrecht ist; nach (*c.* 28) soll sodann

$$S.\pi\Phi'\lambda = 0\,, \quad S.\pi\Phi'\mu = 0\,, \quad S.\pi\Phi'\nu = 0$$

oder nach (*f.* 29)

$$S.\lambda\Phi\pi = 0\,, \quad S.\mu\Phi\pi = 0\,, \quad S.\nu\Phi\pi = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 49)$$

148. Wir wollen nun aber zeigen, dass ein Vektor α, welcher drei Bedingungen von der Form

$$S.\lambda\alpha = 0\,, \quad S.\mu\alpha = 0\,, \quad S.\nu\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 50)$$

genügt, wo λ, μ, ν drei willkürliche nicht complanare Vektoren bedeuten, notwendig verschwinden musz; ein Satz, welcher nachher sich noch nützlich erweisen wird.

Wenn α nicht verschwände, so würden die drei Gleichungen ($f.$ 50) aussagen, dass α zu den drei Vektoren λ, μ, ν senkrecht steht, und dies ist offenbar unmöglich.

149. Nach dem vorigen Artikel kann aus ($f.$ 49) geschlossen werden, dass $\Phi\pi$ verschwindet. Der Vektor π, welchen wir in Art. 147 einführten, soll somit der Gleichung genügen

$$\Phi\pi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (f.\ 51)$$

Aus der Form der Funktion Φ schlieszt man unmittelbar, dass wenn π der Gleichung ($f.$ 51) genügt, dasselbe ebenfalls von $y\pi$ gelten musz, wo y skalar ist. Den Einheitsvektor, welcher der Gleichung ($f.$ 51) Genüge leistet, wollen wir $U\pi$ nennen; es ist sodann allgemein $yU\pi$ eine Lösung jener Gleichung.

Weil $V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$ ein zu den beiden Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$ senkrechter Vektor ist, so musz derselbe der Richtung nach mit $U\pi$ zusammenfallen. Man kann deshalb in diesem Falle setzen

$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = yU\pi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f.\ 52)$$

wo der Wert der Grösze y mit der Wahl der Vektoren λ, μ sich ändert.

150. Die Gleichung ($f.$ 32) verliert in diesem Falle seine Bedeutung; an ihre Stelle tritt die Beziehung ($f.$ 52) und mit derselben kann nun leicht die Auflösung weiter verfolgt werden.

Wenn wir nun nämlich in diesem Falle wie in Art. 145 verfahren, so bleiben alle dort erhaltenen Formeln bestehen; nur wird das Resultat der Transformation der zweiten Seite der Gleichung ($f.$ 37)

$$yU\pi + (m\psi + m^2)V\lambda\mu$$

und somit geht die Gleichung ($f.$ 38) in die nachstehende über

$$x_m(\Phi + m)^{-1}V\lambda\mu = yU\pi + (m\psi + m^2)V\lambda\mu \quad . . \quad (f.\ 53)$$

An dieses Resultat wollen wir nun mit dem Symbole $\Phi + \mu$ operiren.

Wenn dabei die Gleichung ($f.$ 51) beachtet wird, so ergibt sich dadurch

$$x_m V\lambda\mu = myU\pi + [m\Phi\psi + m^2(\Phi + \psi) + m^3]V\lambda\mu \quad . \quad (f.\ 54)$$

Es geht weiter ($f.$ 42) über in:

$$x_m = mx_1 + m^2x_2 + m^3,$$

wo die Symbole an jeden beliebigen Vektor operiren können. Wenn man hierzu $V\lambda\mu$ wählt und das Resultat mit der Gleichung (*f.* 54) verbindet, so entspringt hieraus das System der Gleichungen:

$$x_1 V\lambda\mu = y U\pi + \phi\psi V\lambda\mu, \quad x_2 V\lambda\mu = (\phi + \psi) V\lambda\mu.$$

Der Wert des Skalars y ist von der Wahl der Vektoren λ, μ abhängig und soll nach (*f.* 52) bestimmt werden:

$$y = TV.\phi'\lambda\phi'\mu.$$

Nun kann aber dargetan werden, dass $V.\phi'\lambda\phi'\mu$ eine Funktion der Grösze $V\lambda\mu$ ist. (Man sehe Art. 181.) Setzt man statt $V\lambda\mu$ einen willkürlichen Vektor σ, so ist in den vorhergehenden Gleichungen der Wert von y durch die für σ getroffene Wahl bestimmt, und dieselben gehen über in

$$x_1\sigma = y U\pi + \phi\psi\sigma, \quad x_2\sigma = (\phi + \psi)\,\sigma \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 55)$$

und indem nunmehr ψ eliminirt wird, erhält man

$$x_1\sigma - x_2\phi\sigma + \phi^2\sigma = y U\pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 56)$$

In dieser Gleichung wollen wir nun noch $\phi^{-1}\delta$ statt σ einführen. Es entsteht sodann

$$x_1\phi^{-1}\delta = x_2\delta - \phi\delta + y U\pi$$

und die gesuchte Lösung der linearen Gleichung wäre somit

$$x_1\rho = x_2\delta - \phi\delta + y U\pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 57)$$

Es erscheint hier ρ ausgedrückt mittelst δ, $U\pi$ und eines bestimmten Skalars y. Man ersieht aber leicht, dass man diesem letzteren jeden beliebigen Wert beilegen kann. Denn nennt man den Wert von ρ aus (*f.* 57) ρ_1, so wissen wir dass derselbe der gegebenen linearen Gleichung genügt. Es ist daher

$$\phi\rho_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 58)$$

Nun ist weiter

$\phi(\rho_1 + n U\pi) = \phi\rho_1 + n\phi(U\pi)$ nach (*f.* 19) $= 0$ nach (*f.* 58), (*f.* 51)

und hieraus schlieszt man, dass auch $\rho_1 + n U\pi$, wo n einen beliebigen Skalar bedeutet, der gegebenen Gleichung genügt.

Die Lösung der Vektorgleichung ist daher (*f.* 57), wenn darin y einen neuen willkürlichen Skalarcoefficienten bedeutet.

151. Wenn auszer $x = 0$ auch $x_1 = 0$ stattfindet, so kann man in der Gleichung (*f.* 56), welche für diesen Fall in

$$x_2\phi\sigma - \phi^2\sigma = - y U\pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f.\ 59)$$

übergegangen ist, $\Phi^{-2}\delta$ statt σ schreiben und erhält dadurch schlieszlich

$$x_2\rho = \delta + yU\pi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f.\ 60)$$

152. In den vorhergehenden Artikeln ist die allgemeine HAMILTONsche Methode der Lösung linearer Gleichungen kurz erörtert. Dieselbe erfordert, wie daraus ersichtlich, zuerst die Bestimmung der drei Skalarcoefficienten x, x_1, x_2 nach den Gleichungen (*f.* 34), (*f.* 41). Es ist dies meistens eine ziemlich weitläufige Berechnung und es verdient daher den Vorzug, dieselbe auf einfachere Weise zu bestimmen.

Dieser Weg besteht darin, dass in der allgemeinen Formel (*f.* 48) oder

$$x - x_1\Phi + x_2\Phi^2 - \Phi^3 = 0$$

die Operationen nach einander an drei bekannten Vektoren vollzogen werden, wodurch man drei Gleichungen erhält, welche gestatten die drei Gröszen x, x_1, x_2 zu berechnen. In den nächstfolgenden Artikeln sind einige Beispiele der Lösung linearer Gleichungen gegeben worden. Wir fangen damit an eine einzige Gleichung nach der Methode dieses Artikels zu behandeln.

153. Es sei gefragt ρ zu bestimmen aus

$$a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho = \gamma \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f.\ 61)$$

wo a, b, c Skalare, i, j, k die drei vorher schon eingeführten rechten Radiale, γ einen gegebenen Vektor bedeuten.

Die erste Seite ist die Funktion Φ. Nehmen wir statt ρ der Reihe nach i, j, k, so erhält man

$$\Phi i = -a^2i,\quad \Phi j = -b^2j,\quad \Phi k = -c^2k$$

somit

$$\Phi^2i = \Phi(-a^2i) = +a^4i,\quad \Phi^2j = +b^4j,\quad \Phi^2k = +c^4k$$
$$\Phi^3i = \Phi(+a^4i) = -a^6i,\quad \Phi^3j = -b^6j,\quad \Phi^3k = -c^6k.$$

Nach Einführung dieses Wertsystems in die Relation (*f.* 48), auf die drei Vektoren i, j, k jedesmal angewandt, werden die drei nachstehenden Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} a^6 + a^4x_2 + a^2x_1 + x = 0 \\ b^6 + b^4x_2 + b^2x_1 + x = 0 \\ c^6 + c^4x_2 + c^2x_1 + x = 0 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f.\ 62)$$

Wenn wir nun weiter die kubische Gleichung bilden

$$\xi^3 + x_2\xi^2 + x_1\xi + x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 63)$$

so hat dieselbe nach (f. 62) die drei Wurzeln a^2, b^2, c^2. Es folgt daraus

$$x_2 = -(a^2 + b^2 + c^2),\ x_1 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,\ x = -a^2b^2c^2 \quad (f. 64)$$

wodurch die Werte der Gröszen x_1, x_2, x gefunden sind.

Die Lösung der vorgelegten Gleichung ist nunmehr nach (f. 47) direkt hinzuschreiben. Indessen erfordert die Auswertung des Symbols Φ^2 noch einige Rechnung.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \Phi^2\rho = a^2iS.i[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho] + \\ + b^2jS.j[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho] + \\ + c^2kS.k[a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho] \\ = - a^4iSi\rho - b^4jSj\rho - c^4kSk\rho. \end{aligned}$$

Hiermit wird sodann:

$$\rho = -\frac{(b^2 + c^2)}{b^2c^2} iSi\gamma - \frac{c^2 + a^2}{c^2a^2} jSj\gamma - \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} kSk\gamma - \\ - \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 65)$$

154. Nach der Hamiltonschen Methode lösen wir weiter auf

1°. $$V.\alpha\rho\beta = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 66)$$

Es ist die erste Seite dieser Gleichung nach (c. 41) gleichwertig mit:

$$\beta S.\alpha\rho - \rho S.\alpha\beta + \alpha S.\beta\rho$$

und dieser Ausdruck ist somit die Hamiltonsche Funktion Φ. Es ist deshalb weiter

$$\Phi'\rho = \alpha S.\beta\rho - \rho KS.\alpha\beta + \beta S.\alpha\rho = \Phi\rho = V.\alpha\rho\beta. \ . \quad (f. 67)$$

Setzen wir noch voraus, die gegebenen Vektoren α, β, γ seien nicht complanar, so kann man dieselben als die Vektoren λ, μ, ν bzhw. des Artikels 143 betrachten. Es wird dadurch

$$\left.\begin{aligned} \Phi'\lambda &= \Phi'\alpha = V.\alpha^2\beta = \alpha^2\beta, \text{ weil } \alpha^2 \text{ skalar ist} \\ \Phi'\mu &= \Phi'\beta = V.\alpha\beta^2 = \beta^2\alpha, \text{ weil } \beta^2 \text{ skalar ist} \\ \Phi'\nu &= \Phi'\gamma = V.\alpha\beta\gamma \end{aligned}\right\} . \quad (f. 68)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu &= S.\alpha^2\beta^2\beta\alpha V\alpha\gamma\beta = \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha V\alpha\gamma\beta = \\ &= \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha(\alpha\gamma\beta - S.\alpha\gamma\beta) = \\ &= \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha^2\gamma\beta - \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha S\alpha\gamma\beta = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.S\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] =$$
$$= S.[\alpha\beta^2\alpha V\alpha\gamma\beta + \beta(V\alpha\gamma\beta)\alpha^2\beta + \gamma\alpha^2\beta^2\alpha]$$
$$= \alpha^2\beta^2 S\gamma\beta\alpha = - \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu] = S.[\beta\gamma\alpha^2\beta + \gamma\alpha\beta^2\alpha + \alpha\beta V\alpha\gamma\beta] =$$
$$= S.\alpha\beta V\alpha\gamma\beta = - S.\beta\alpha V\alpha\gamma\beta$$
$$= - S.\beta\alpha(\alpha\gamma\beta - S\alpha\gamma\beta) =$$
$$= - S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma$$

und mit Hülfe dieser Werte erhält man unmittelbar

$$x = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,,\ x_1 = - \alpha^2\beta^2\,,\ x_2 = - S\alpha\beta\,. \; . \; . \quad (f.\ 69)$$

Weil noch

$$\Phi^2\rho = \Phi\Phi\rho = V.\alpha(V\alpha\gamma\beta)\beta = V.\alpha(\alpha S\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma)\beta$$
$$= \alpha^2\beta S\beta\gamma - S\alpha\beta V.\alpha\gamma\beta + \beta^2\alpha S\gamma\alpha,$$

so wird die Lösung der Gleichung (*f.* 66)

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = - \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\beta S\beta\gamma + \beta^2\alpha S\gamma\alpha$$
$$= + \alpha^2\beta^2[- \gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma + \alpha^{-1}S\gamma\alpha]$$

oder

$$\rho = \frac{- \gamma + \alpha^{-1}S\gamma\alpha + \beta^{-1}S\beta\gamma}{S\alpha\beta} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 70)$$

2°. $$V.\rho\alpha\beta = \gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 71)$$

Es ist jetzt

$$\Phi\rho = \rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho$$
$$\Phi'\rho = \rho K S\alpha\beta - \beta S\alpha\rho + \alpha S\beta\rho = V.\rho\beta\alpha$$

Wenn α, β, γ wieder nicht complanar vorausgesetzt werden, so wird man dieselben als die vorher angewandten λ, μ, ν betrachten können, und somit erhalten

$$\Phi'\lambda = \Phi'\alpha = V.\alpha\beta\alpha = 2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta,$$
$$\Phi'\mu = \Phi'\beta = V.\beta^2\alpha = \beta^2\alpha,$$
$$\Phi'\nu = \Phi'\gamma = V.\gamma\beta\alpha = V.\alpha\beta\gamma \text{ nach } (c.\ 42),$$
$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = S.(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta)\beta^2\alpha V\alpha\beta\gamma = - \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha V\alpha\beta\gamma$$
$$= - \alpha^2\beta^2 S.\beta\alpha(\alpha\beta\gamma - S\alpha\beta\gamma) = + \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta.S\alpha\beta\gamma$$
$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] =$$
$$= S.[\alpha\beta^2\alpha V\alpha\beta\gamma + \beta(V\alpha\beta\gamma)(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta) + \gamma(2\alpha S\alpha\beta - \alpha^2\beta)\beta^2\alpha]$$
$$= 2S\alpha\beta S.\beta(V\alpha\beta\gamma)\alpha - \alpha^2\beta^2 S.\gamma\beta\alpha$$
$$= 2S\alpha\beta S.\beta(\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta)\alpha + \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$= 2(S\alpha\beta)^2 S\beta\gamma\alpha + \alpha^2\beta^2 S.\alpha\beta\gamma$$
$$= 2(S\alpha\beta)^2 S\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\gamma$$

$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda+\nu\lambda\Phi'\mu+\lambda\mu\Phi'\nu]=S.[\beta\gamma(2\alpha S\alpha\beta-\alpha^2\beta)+\gamma\alpha\beta^2\alpha+\alpha\beta\, V\alpha\beta\gamma]$$
$$=2S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma+S.\alpha\beta(\alpha S\beta\gamma-\beta S\gamma\alpha+\gamma S\alpha\beta)$$
$$=3S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma$$

Mit diesen Resultaten wird

$$x=\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\,,\quad x_1=2(S\alpha\beta)^2+\alpha^2\beta^2\,,\quad x_2=3S\alpha\beta.$$

Weiter ist

$$\Phi^2\rho=V.(V\rho\alpha\beta)\alpha\beta=V.(\rho S\alpha\beta-\alpha S\beta\rho+\beta S\alpha\rho)\alpha\beta=$$
$$=S\alpha\beta\, V\rho\alpha\beta-\alpha^2\beta S\beta\rho+S\alpha\rho\, V\beta\alpha\beta$$

und die Lösung wird

$$\rho\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta=2\gamma(S\alpha\beta)^2+\alpha^2\beta^2\gamma-2S\alpha\beta\, V\gamma\alpha\beta-\alpha^2\beta S\beta\gamma+S\alpha\gamma\, V\beta\alpha\beta$$
$$=\alpha^2\beta^2\gamma-\alpha\beta^2 S\alpha\gamma-\beta\alpha^2 S\beta\gamma+2\alpha S\alpha\beta S\beta\gamma \text{ nach } (c.\ 41)$$

oder

$$\rho=\frac{\gamma-\alpha^{-1}S\alpha\gamma-\beta^{-1}S\beta\gamma+2\alpha^{-1}\beta^{-2}S\alpha\beta S\beta\gamma}{S\alpha\beta}\quad . \ . \ (f.\ 72)$$

3⁰. $$V\alpha\rho=\gamma\, . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (f.\ 73)$$

Bei dieser Gleichung ist

$$\Phi\rho=V\alpha\rho\,,\quad \Phi'\rho=-V\alpha\rho.$$

Operiren wir an die gegebene Gleichung mit $S.\alpha$, so erhalten wir

$$S.\alpha\gamma=S.\alpha\, V\alpha\rho=S.\alpha\alpha\rho=\alpha^2 S\rho=0\,,$$

oder

$$S\alpha\gamma=0.$$

Wenn wir statt λ, μ, ν in diesem Falle α, γ, $V\alpha\gamma$ wählen, so kann der letztere Ausdruck demnach auch durch $\alpha\gamma$ ersetzt werden.

Es wird dadurch

$$\Phi'\lambda=\Phi'\alpha=-V\alpha\alpha=0$$
$$\Phi'\mu=\Phi'\gamma=-V\alpha\gamma=-\alpha\gamma$$
$$\Phi'\nu=\Phi'(\alpha\gamma)=-V.\alpha^2\gamma=-\alpha^2\gamma.$$
$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu=0$$
$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu+\mu\Phi'\nu\Phi'\lambda+\nu\Phi'\lambda\Phi'\mu]=S.\alpha^2\gamma\alpha^2\gamma=\alpha^4\gamma^2$$
$$S.[\mu\nu\Phi'\lambda+\nu\lambda\Phi'\mu+\lambda\mu\Phi'\nu]=S.[-\alpha\gamma\alpha^2\gamma-\alpha\gamma\alpha^2\gamma]=-2S\alpha^3\gamma^2=0$$
$$S.\lambda\mu\nu=S.\alpha\gamma\alpha\gamma=S.(V\alpha\gamma)(V\alpha\gamma)\ \text{ weil } S\alpha\gamma=0\,,$$
$$=S.(V\alpha\gamma)^2=-NV\alpha\gamma=-N\alpha\gamma=-\alpha^2\gamma^2.$$

Mit diesen Werten wird somit

$$x=0\,,\quad x_1=-\alpha^2,\quad x_2=0.$$

Wir müssen nun, weil $x = 0$, die Gleichung (*f.* 57) in Anwendung bringen, und es kommt daher noch darauf an die Funktion $U\pi$ zu bestimmen. Es soll dieselbe der Gleichung $V\alpha\pi = 0$ genügen nach (*f.* 51); diese Gleichung sagt nach (*c.* 31) aus, dass $\pi // \alpha$. Es ist somit $U\pi = U\alpha$ zu setzen. Die Grösze $yU\pi$, wo y ein willkürlicher Faktor ist, kann auch durch $y\alpha$ ersetzt werden. Die Lösung der vorgelegten Gleichung wird somit

$$-\alpha^2\rho = -V\alpha\gamma + y\alpha,$$

oder weil $S\alpha\gamma$ der Null gleich kommt

$$\rho = \alpha^{-1}(\gamma - y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 74)$$

Den Skalar $-y$ kann man hierin natürlich auch durch $+y$ ersetzen.

4°. $$a^2iSi\rho + b^2jSj\rho + c^2kSk\rho = \gamma$$

Es ist dies dieselbe Gleichung, welche wir im vorigen Artikel auf andre Weise gelöst haben. Mit derselben wird

$$\Phi\rho = \alpha^2iSi\rho + b^2jS.j\rho + c^2kS.k\rho = \Phi'\rho$$

Statt λ, μ, ν wollen wir i, j, k bzhw. setzen. Es wird sodann

$$\Phi'\lambda = \Phi'i = -a^2i,\ \Phi'\mu = \Phi'j = -b^2j,\ \Phi'\nu = \Phi'k = -c^2k.$$

$S.\lambda\mu\nu = S.ijk = -1$ nach (*b.* 80)

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = S. -a^2b^2c^2ijk = +a^2b^2c^2$$

$$\begin{aligned} S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu] &= S.(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\,ijk = \\ &= -(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu] &= S. -(a^2jki + b^2kij + c^2ijk) = \\ &= -S.(\alpha^2 + b^2 + c^2)\,ijk \text{ nach } (b. 80) \\ &= +(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$x = -a^2b^2c^2,\ x_1 = +(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),\ x^2 = -(a^2 + b^2 + c^2)$$

Die Lösung wird hiermit leicht in der Gestalt (*f.* 65) erhalten.

155. Wie schon vorher bemerkt, ist die Funktion $\Phi\rho$ ein Vektor. Man kann demnach fragen, wann der Vektor $\Phi\rho$ mit ρ der Richtung nach zusammenfällt. Eine jede Richtung, bei der dies stattfindet, wollen wir eine Hauptrichtung für die Funktion Φ nennen.

Für eine Hauptrichtung musz $\Phi\rho = m\rho$ sein, wo m skalar ist. Es wird weiter für dieselbe

$$\Phi^2\rho = \Phi m\rho = m\Phi\rho = m^2\rho\,,\ \Phi^3\rho = m^3\rho\,,\ \text{u. s. w.}$$

sein müssen.

Die kubische Gleichung ($f.$ 48) geht demnach bei einer Hauptrichtung über in

$$x - m\,x_1 + m^2\,x_2 - m^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 75)$$

und hierdurch ist eine kubische Skalargleichung zur Bestimmung der Grösze m erhalten. Sind m_1, m_2, m_3 die drei Wurzeln dieser Gleichung, so können auch drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 erhalten werden, welche den Gleichungen

$$\Phi\rho_1 = m_1\rho_1,\ \Phi\rho_2 = m_2\rho_2,\ \Phi\rho_3 = m_3\rho_3$$

oder

$$(\Phi - m_1)\rho_1 = 0,\ (\Phi - m_2)\rho_2 = 0,\ (\Phi - m_3)\rho_3 = 0\ . \quad (f.\ 76)$$

Genüge leisten. Wie unmittelbar ersichtlich bestimmen die Gleichungen ($f.$ 76) nur die Richtungen der drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3, weil die Substitution $x\rho_1$ anstatt ρ_1, u. s. w. die Gleichungen nicht ändert.

Wir haben somit den nachstehenden Satz erhalten:

Bei jeder Funktion Φ gehören im allgemeinen drei Hauptrichtungen. Nehmen wir zum Beispiel die im vorigen Artikel sub 4⁰ betrachtete Funktion

$$\Phi = a^2 iSi\rho + b^2 jSj\rho + c^2 kSk\rho$$

Die Gleichung ($f.$ 75) ist für diesen Fall

$$m^3 + (a^2 + b^2 + c^2)m^2 + (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)m + a^2b^2c^2 = 0\,,$$

deren Wurzeln $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ sind.

Um die drei Hauptrichtungen der Funktion Φ zu finden, hat man somit drei Gleichungen aufzulösen von der Form

$$a^2 iS.i\rho + b^2 jS.j\rho + c^2 kS.k\rho + a^2\rho = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 77)$$

Wir wollen die Lösung nicht nach der allgemeinen Methode durchführen. Nur wollen wir erwähnen, dass durch Operation mit $S.i$ an die Gleichung ($f.$ 77) eine Identität entsteht. Durch die Operation mit $S.j$, und auch mit $S.k$ entstehen die beiden Relationen:

$$S.j\rho = 0\,,\ S.k\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 78)$$

wenn nämlich die Gröszen a, b, c von einander verschieden vorausgesetzt werden.

Die Gleichungen ($f.$ 78) sagen aus, dass die eine der drei Hauptrichtungen senkrecht zu j, k ist, somit in die Richtung des Vektors i fällt.

Ebenfalls sind die beiden anderen Hauptrichtungen parallel zu j, k bzhw.

156. Sind die drei Hauptrichtungen gefunden, so kann man in denselben drei Einheitsvektoren annehmen, welche im nachstehenden mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 bezeichnet sind. Ein willkürlicher Vektor ρ kann nach diesen Hauptrichtungen zerlegt werden, wie im ersten Abschnitte gezeigt worden ist. Es sei

$$\rho = k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 79)$$

wo k_1, k_2, k_3 drei Skalare bedeuten.

Wenn man nunmehr an diese Gleichung mit dem Symbol $(\Phi - m_1)$ operirt, so wird erhalten bei Berücksichtigung der Relationen ($f.$ 76)

$$(\Phi - m_1)\rho = k_2(m_2 - m_1)\rho_2 + k_3(m_3 - m_1)\rho_3 \quad \ldots \quad (f.\ 80)$$

Eine abermalige Operation mit $\Phi - m_2$ liefert

$$(\Phi - m_2)(\Phi - m_1)\rho = k_3(m_3 - m_2)(m_3 - m_1)\rho_3$$

und hieraus kann ρ_3 unmittelbar aufgelöst werden

$$\rho_3 = \frac{(\Phi - m_2)(\Phi - m_1)\rho}{k_3(m_3 - m_2)(m_3 - m_1)}$$

In gleicher Weise

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{(\Phi - m_3)(\Phi - m_2)\rho}{k_1(m_1 - m_3)(m_1 - m_2)} \\ \rho_2 &= \frac{(\Phi - m_1)(\Phi - m_3)\rho}{k_2(m_2 - m_1)(m_2 - m_3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 81)$$

Aus jedem willkürlichen Vektor ρ sind somit die drei Hauptrichtungen leicht herzuleiten. Die Richtungen derselben fallen zusammen mit denjenigen der drei Vektoren

$$(\Phi-m_3)(\Phi-m_2)\rho, \quad (\Phi-m_1)(\Phi-m_3)\rho, \quad (\Phi-m_1)(\Phi-m_2)\rho \quad (f.\ 82)$$

157. Wenn die Gleichung ($f.$ 75) drei reelle Wurzeln hat, so werden die drei Hauptrichtungen reell und die in denselben angenommenen Vektoren werden auch reelle Vektoren sein.

Es musz dieser Fall stets eintreten, wenn die Funktion Φ selbstconjugirt ist. Denn wären sodann

$$k + l\sqrt{-1}, \quad k - l\sqrt{-1}$$

zwei Wurzeln der Gleichung ($f.$ 75), z. B. die vorher mit m_2,

m_3 bezeichneten Wurzeln, so müszten nach (*f.* 82) die zweite und dritte Hauptrichtung mit Vektoren der Form

$$\sigma + \tau\sqrt{-1}, \quad \sigma - \tau\sqrt{-1}$$

bezeichnet werden. Nach (*f.* 19) (*f.* 20) ist jedoch

$$\Phi(\sigma + \tau\sqrt{-1}) = \Phi\sigma + \sqrt{-1}\,\Phi\tau.$$

Es sollte dieser Ausdruck nach (*f.* 76) der nachstehenden gleich kommen

$$(k + l\sqrt{-1})(\sigma + \tau\sqrt{-1}) \text{ oder } k\sigma - l\tau + \sqrt{-1}(l\sigma + k\tau),$$

woraus man schliessen könnte

$$\Phi\sigma = k\sigma - l\tau, \quad \Phi\tau = l\sigma + k\tau,$$

und indem man an die erste dieser Gleichungen mit $S.\tau$, an die zweite mit $S.\sigma$ operirte

$$S.\tau\Phi\sigma = kS\sigma\tau - l\tau^2 \text{ und } S.\sigma\Phi\tau = l\sigma^2 + kS\sigma\tau.$$

Weil jedoch Φ selbstconjugirt vorausgesetzt ist, sind die ersten Seiten dieser Gleichungen einander gleich. Somit soll auch

$$l(\sigma^2 + \tau^2) = 0$$

sein und daher musz l verschwinden, weil σ^2 und τ^2 beide negativ sind. Die beiden complex vorausgesetzten Wurzeln können demnach nicht vorhanden sein.

Setzen wir im Nachfolgenden die Selbstconjugation der Funktion Φ voraus.

Aus der Gleichung

$$(\Phi - m_1)\,\rho_1 = 0,$$

folgt allgemein

$$S.\rho(\Phi - m_1)\rho_1 = 0,$$

oder nach der Haupteigenschaft der conjugirten Funktionen, welche auch dem Symbol $\Phi - m_1$ zukommt nach Art. 141,

$$S.\rho_1(\Phi' - m_1)\rho = 0 \text{ oder } S.\rho_1(\Phi - m_1)\,\rho = 0,$$

weil $\Phi' = \Phi$ unsrer Annahme zufolge.

Aus dieser Beziehung wird geschlossen, dass jeder Vektor $(\Phi - m_1)\rho$, wo ρ ganz willkürlich gewählt werden kann, senkrecht zur Hauptrichtung ρ_1 ist. Nach (*f.* 80) ist somit auch jeder Vektor

$$k_2(m_2 - m_1)\rho_2 + k_3(m_3 - m_1)\rho_3,$$

wo k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten, zur Hauptrichtung senkrecht. Es wird jedoch mit dem soeben geschriebenen Ausdruck ein willkürlicher Vektor in der Ebene der Hauptrichtungen ρ_2, ρ_3 bezeichnet. Man kann daher schlieszen, der Vektor ρ_1 sei senkrecht zur Ebene der Vektoren ρ_2, ρ_3.

Analoge Behauptungen können in Bezug auf ρ_2, ρ_3 gemacht werden, wodurch wir den Satz erhalten:

Im Falle der Selbstconjugation sind die drei Hauptrichtungen senkrecht zu einander.

Wenn in demselben Falle zwei Wurzeln m_2, m_3 der Gleichung (*f.* 75) einander gleich werden, so bleiben natürlich die drei ursprünglich zu einander senkrechten Hauptrichtungen bestehen und wir hören nicht auf, dieselben mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 zu bezeichnen. Man kann jedoch in diesem Falle setzen

$$\Phi\rho_1 = m_1\rho_1\,,\quad \Phi\rho_2 = m_2\rho_2\,,\quad \Phi\rho_3 = m_2\rho_3.$$

Es wird daher, wenn k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten

$$k_2\Phi\rho_2 + k_3\Phi\rho_3 = m_2(k_2\rho_2 + k_3\rho_3)$$

oder

$$\Phi(k_2\rho_2 + k_3\rho_3) = m_2(k_2\rho_2 + k_3\rho_3) \text{ nach } (f.\ 19)\ (f.\ 20)\,. \quad (f.\ 83)$$

Aus dieser Relation geht hervor, dass $k_2\rho_2 + k_3\rho_3$ als eine Hauptrichtung betrachtet werden musz; die Willkürlichkeit der Gröszen k_2, k_3 beachtend, erhält man den Satz:

Wenn in dem Falle der Selbstconjugation die Gleichung (*f.* 75) zwei gleiche Wurzeln m_2, m_3 hat, so ist jeder Vektor in der Ebene der Hauptrichtungen ρ_2, ρ_3 ebenfalls als eine Hauptrichtung zu betrachten.

Schreibt man wieder für einen willkürlichen Vektor die Gleichung (*f.* 79) nieder, so ist (*f.* 83)

$$(\Phi - m_2)\rho = (\Phi - m_2)(k_1\rho_1) = k_1(m_1 - m_2)\rho_1.$$

Somit wird ρ_1 bestimmt durch

$$\rho_1 = \frac{(\Phi - m_2)\rho}{k_1(m_1 - m_2)}.$$

Wenn schlieszlich die drei Wurzeln der Gleichung (*f.* 75) einander gleich werden $m_1 = m_2 = m_3$, so ist herzuleiten

$$\Phi(k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3) = m_1(k_1\rho_1 + k_2\rho_2 + k_3\rho_3)$$

wo k_1, k_2, k_3 willkürliche Skalare bedeuten. Diese Gleichung spricht den Satz aus:

Wenn in dem Falle der Selbstconjugation die Gleichung

($f.$ 75) drei gleiche Wurzeln hat, so ist jeder Vektor im Raume eine Hauptrichtung.

158. Unsre Betrachtungen über die Funktion $\Phi\rho$ wollen wir damit schlieszen, dass wir dieselbe in einige bisher noch nicht verzeichneten Formen bringen, deren erstere HAMILTON die dreigliederige Grundform für die lineare und Vektorfunktion eines Vektors genannt hat.

Wenn α_1, α_2, α_3 drei willkürliche Vektoren sind, so kann nach ($c.$ 45) oder ($c.$ 46) jeder Vektor linear in denselben ausgedrückt werden. Für einen Vektor ρ erhält man nach ($c.$ 46)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_2\alpha_3 S\alpha_1\rho + V\alpha_3\alpha_1 S\alpha_2\rho + V\alpha_1\alpha_2 S\alpha_3\rho. \quad (f.\ 83)$$

nach ($c.$ 45)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\rho + \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1\rho + \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2\rho$$

und die letztere Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S(V\alpha_2\alpha_3)\rho + \alpha_2 S.(V\alpha_3\alpha_1)\rho + \alpha_3 S.(V\alpha_1\alpha_2)\rho. \quad (f.\ 84)$$

Setzen wir der Einfachheit halber

$$\beta_1 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_2\alpha_3,\ \beta_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_3\alpha_1,\ \beta_3 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2 \quad (f.\ 85)$$

so gehen die Gleichungen ($f.$ 83) ($f.$ 84) über in

$$\rho = \beta_1 S\alpha_1\rho + \beta_2 S\alpha_2\rho + \beta_3 S\alpha_3\rho = \alpha_1 S\beta_1\rho + \alpha_2 S\beta_2\rho + \alpha_3 S\beta_3\rho \quad (f.\ 86)$$

Wenn nunmehr an die erstere dieser Relationen mit Φ operirt wird, so erhält man, wenn die Gleichungen ($f.$ 19) ($f.$ 20) beachtet werden,

$$\Phi\rho = \Phi\beta_1.S\alpha_1\rho + \Phi\beta_2.S\alpha_2\rho + \Phi\beta_3.S\alpha_3\rho$$

und bei Einführung neuer Gröszen γ_1, γ_2, γ_3 derart, dass

$$\gamma_1 = \Phi\beta_1,\ \gamma_2 = \Phi\beta_2,\ \gamma_3 = \Phi\beta_3 \ \ldots\ldots \quad (f.\ 87)$$

schlieszlich

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho \ \ldots\ldots \quad (f.\ 88)$$

eine Relation welche $\Phi\rho$ mittelst drei unabhängiger Vektoren und ρ ausdrückt. Es ist dies die am Anfang dieses Artikels erwähnte dreigliedrige Grundform.

Wir wollen weiter die conjugirte Funktion zu finden versuchen. Setzt man in die zweite der Gleichungen ($f.$ 86) $\Phi'\rho$ statt ρ, so wird erhalten

$$\begin{aligned}\Phi'\rho &= \alpha_1 S.\beta_1\Phi'\rho + \alpha_2 S.\beta_2\Phi'\rho + \alpha_3 S.\beta_3\Phi'\rho \\ &= \alpha_1 S.\rho\Phi\beta_1 + \alpha_2 S.\rho\Phi\beta_2 + \alpha_3 S.\rho\Phi\beta_3 \text{ nach } (f.\ 29) \\ &= \alpha_1 S\rho\gamma_1 + \alpha_2 S\rho\gamma_2 + \alpha_3 S\rho\gamma_3\text{, nach } (f.\ 87)\end{aligned}$$

oder schlieszlich

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho.$$

Es geht demnach Φ' aus Φ hervor durch die Umtauschung der Gröszen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bzhw.

159. Wir wollen diese Ergebnisse verwenden einen Satz darzutun, dessen wir nachher bedürfen werden. Bei der dreigliedrigen Grundform wollen wir die Grösze

$$x' = \frac{S.\Phi\lambda\,\Phi\mu\,\Phi\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$

berechnen. Es sind der Zähler und der Nenner derselben, wie unmittelbar nach Art. 144 einleuchtet, Invarianten; den Wert des Bruches zu finden, kann man demnach statt λ, μ, ν drei willkürliche Vektoren wählen z. B. $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Hiermit wird bei Beachtung der Gleichungen (*f.* 87)

$$x' = \frac{S.\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{S.\beta_1\beta_2\beta_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 89)$$

Behufs Umgestaltung dieser Beziehung wollen wir die Grösze $S.\beta_1\beta_2\beta_3$ aus (*f.* 85) berechnen. Es ergibt sich dadurch

$$S\beta_1\beta_2\beta_3(S\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^3 = S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 \ldots \quad (f.\ 90)$$

Es ist jedoch

$$\begin{aligned} S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 &= S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V[V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2] = \\ &= S.\,V\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 S.\alpha_1\,V\alpha_3\alpha_1 - \alpha_1 S.\alpha_2\,V\alpha_3\alpha_1) \text{ nach } (c.\ 44) \\ &= S.\alpha_2\alpha_3(-\alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\alpha_1). \end{aligned}$$

Daher wird

$$S.\,V\alpha_2\alpha_3\,V\alpha_3\alpha_1\,V\alpha_1\alpha_2 = -(S\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2$$

und bei Einführung dieses Wertes in (*f.* 90) ergibt sich

$$S\beta_1\beta_2\beta_3\,.\,S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1. \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 91)$$

Es lässt sich demnach der in (*f.* 89) gefundene Ausdruck auch in der Form schreiben

$$x' = -S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 S\alpha_3\alpha_2\alpha_1 \ldots \quad (f.\ 92)$$

Diese Gleichung enthält unsren Satz. Denn wenn wir anstatt x' die Grösze

$$x = \frac{S.\Phi'\lambda\,\Phi'\mu\,\Phi'\nu}{S.\lambda\mu\nu}$$

berechnen wollten, so hätten wir im Vorigen nur die Funktionen Φ' und Φ, d. h. nach dem vorigen Artikel die Gröszen α_1, α_2, α_3 und γ_1, γ_2, γ_3, zu vertauschen. Es ergibt sich daher, wenn man sich den Satz erinnert, (Art. 87), nach welchem der Skalarteil des Produktes drei rechter Quotienten das Zeichen wechselt, wenn die Faktoren eine acyclische Umtauschung erfahren, dass die Gröszen x, x' gleich sein müssen.

160. Es sei, um einige Beispiele zu geben, die Funktion $V\alpha\rho\beta$ vorgelegt mit der Frage, die dreigliedrige Grundform derselben anzugeben.

Für die Gröszen α_1, α_2, α_3 wollen wir α, β, $V\alpha\beta$ wählen.

Es ist sodann

$$\gamma_1 = \frac{1}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\Phi(V\alpha_2\alpha_3) = \frac{1}{S.\alpha\beta\, V\alpha\beta}\Phi(V.\beta\, V\alpha\beta) =$$

$$= \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.[\alpha\, V(\beta\, V\alpha\beta)\beta] = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(\beta S\alpha\beta - \alpha\beta^2)\beta =$$

$$= \frac{\beta^2}{(V\alpha\beta)^2}\alpha(S\alpha\beta - \alpha\beta) = -\frac{\alpha\beta^2\, V\alpha\beta}{(V\alpha\beta)^2} = -\frac{\alpha\beta^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.[\alpha\, V(V\alpha\beta.\alpha)\beta] = -\frac{\beta\alpha^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(V\alpha\beta)\beta = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha(\alpha\beta - S\alpha\beta)\beta = -\frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}$$

Hiermit wird die dreigliedrige Grundform für die Funktion $V\alpha\rho\beta$

$$-\frac{\alpha\beta^2}{V\alpha\beta}S\alpha\rho - \frac{\beta\alpha^2}{V\alpha\beta}S\beta\rho - \frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}S\alpha\beta\rho =$$

$$= -\frac{\alpha\beta^2 S\alpha\rho + \beta\alpha^2 S\beta\rho + S\alpha\beta S\alpha\beta\rho}{V\alpha\beta}.$$

Zu einem andren Beispiele sei $V\alpha\rho$ gewählt. Ist nunmehr β ein willkürlicher Vektor, so setzen wir

$$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ \alpha_3 = V\alpha\beta.$$

Somit wird

$$\gamma_1 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(\beta\, V\alpha\beta) = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\beta\, V\alpha\beta, \text{ weil } S.\beta\, V\alpha\beta = 0,$$

$$= \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}S\alpha\beta\, V\alpha\beta = \frac{S\alpha\beta}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(V\alpha\beta.\alpha) = -\frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha\, V(\alpha\, V\alpha\beta) =$$

$$= -\frac{1}{(V\alpha\beta)^2}V.\alpha^2\, V\alpha\beta = -\frac{\alpha^2}{V\alpha\beta}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{(V\alpha\beta)^2} V.\alpha V\alpha\beta = \frac{\alpha V\alpha\beta}{(V\alpha\beta)^2} = \frac{\alpha}{V\alpha\beta}.$$

Wählt man nunmehr β derart, dass

$$S\alpha\beta = 0, \quad V\alpha\beta = \alpha\beta = -\beta\alpha$$

so wird erhalten

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha^2}{\beta\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \gamma_3 = -\frac{\alpha}{\beta\alpha} = -\frac{1}{\beta},$$

und es ist die dreigliedrige Grundform für $V\alpha\rho$

$$\frac{\alpha}{\beta} S\beta\rho - \frac{\alpha}{\beta} S\alpha\beta\rho = \frac{\alpha S\beta\rho - S\alpha\beta\rho}{\beta}.$$

Die Funktion

$$a^2 iSi\rho + b^2 jSj\rho + c^2 kSk\rho$$

ist in der dreigliedrigen Grundform gegeben, weil hierbei

$$\gamma_1 = \frac{1}{Sijk} \Phi(Vjk) = -\Phi(i) = a^2 i$$

u. s. w. wird, wenn

$$\alpha_1 = i, \quad \alpha_2 = j, \quad \alpha_3 = k$$

angenommen ist.

161. Wir wollen weiter ein zweite Transformation der linearen Vektorfunktion $\Phi\rho$ angeben, welche bei den Anwendungen gewisse Vorteile bieten wird.

Die Summe $(\Phi + \Phi')\rho$, wo Φ' die Conjugirte der Funktion Φ bedeutet, ist eine selbstconjugirte Funktion. Wir wollen setzen

$$\Phi\rho + \Phi'\rho = 2\,\Phi_0\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 93)$$

Im Art. 141 ist schon bewiesen worden, dass der Vektor $(\Phi - \Phi')\rho$ zu ρ senkrecht ist, oder dass man setzen kann

$$\Phi\rho - \Phi'\rho = 2\,V\delta\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 94)$$

wo δ ein gewisser Vektor bedeutet. Derselbe ist aber völlig bestimmt, wie mit Hülfe der dreigliedrigen Grundform für die Funktion Φ leicht dargetan werden kann. Ist dieselbe nämlich

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho$$

somit

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho$$

so ergibt die Gleichung, welche δ definirt,

$$2\,V\delta\rho = \Sigma(\gamma_i S\alpha_i\rho - \alpha_i S\gamma_i\rho) \text{ für } i = 1,\ 2,\ 3$$

$$= \sum_i V.\rho\, V\alpha_i\gamma_i$$

und hieraus wird unmittelbar geschlossen

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) \; \ldots \ldots \; (f.\,95)$$

Die Addition der Gleichungen ($f.$ 93) ($f.$ 94) ergibt noch

$$\Phi\rho = \Phi_0\rho + V\delta\rho \; \ldots \ldots \ldots \; (f.\,96)$$

oder in Worten: Jede lineare Vektorfunktion ist von einer selbstconjugirten nur um ein Glied von der Form $V\delta\rho$ verschieden.

162. Für eine selbstconjugirte Funktion bestehen, wie schon erörtert, drei Hauptrichtungen, welche stets reell und unter sich zu je zwei rechtwinklig sind. Bezeichnen wir die Einheitsvektoren in den Richtungen derselben mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 und setzen

$$\Phi_0\rho_1 = m_1\rho_1\,,\; \Phi_0\rho_2 = m_2\rho_2\,,\; \Phi_0\rho_3 = m_3\rho_3 \; \ldots \; (f.\,97)$$

wo m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der Gleichung

$$x - x_1 m + x_2 m^2 - m^3 = 0 \; \ldots \ldots \; (f.\,98)$$

bedeuten, wenn die Coefficienten x, x_1, x_2 auf die schon erörterte Weise aus der Funktion Φ_0 hergeleitet sind, so ergibt die Einführung der Gröszen ρ_1, ρ_2, ρ_3 anstatt α_1, α_2, α_3 in die dreigliedrige Grundform für Φ_0 erhebliche Vereinfachung. Denn es wird sodann in der letzteren

$$\gamma_1 = \frac{1}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\,\Phi_0 V\alpha_2\alpha_3 = -\,\Phi_0\rho_1 = -\,m_1\rho_1$$

weil

$$S\rho_1\rho_2\rho_3 = -\,1 \text{ und } V\alpha_2\alpha_3 = \rho_1$$

und in gleicher Weise

$$\gamma_2 = -\,m_2\rho_2\,,\; \gamma_3 = -\,m_3\rho_3$$

wodurch die selbstconjugirte Funktion übergeht in

$$\Phi_0(\rho) = -\,m_1\rho_1 S\rho_1\rho - m_2\rho_2 S\rho_2\rho - m_3\rho_3 S\rho_3\rho \; \ldots \; (f.\,99)$$

Die Überführung der selbstconjugirten linearen Vektorfunktion in die letztere Gestalt wollen wir die rechtwinklige Transformation derselben nennen.

163. Eine andre Transformation der selbstconjugirten Funktion ist von Hamilton die cyclische genannt worden. Dieselbe ist enthalten in der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_0\rho = g\rho + h\,V\lambda\rho\mu \\ \text{oder} \quad &\Phi_0\rho = (g - hS\lambda\mu)\rho + \lambda S\mu\rho + \mu S\lambda\rho \end{aligned}\right\} \ldots \; (f.\,100)$$

wo g und h constante Skalare, λ, μ Einheitsvektoren bestimmter Richtung bedeuten.

Diese Gröszen zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (f. 100) auf die drei Einheitsvektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 an und erhalten dadurch

$$\left.\begin{aligned}(m_1 - g + hS\lambda\mu)\rho_1 &= h\lambda S\rho_1\mu + h\mu S\rho_1\lambda \\ (m_2 - g + hS\lambda\mu)\rho_2 &= h\lambda S\rho_2\mu + h\mu S\rho_2\lambda \\ (m_3 - g + hS\lambda\mu)\rho_3 &= h\lambda S\rho_3\mu + h\mu S\rho_2\lambda\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (f.\ 101)$$

Wird nun weiter an eine jede dieser Gleichungen mit $S.V\lambda\mu$ operirt, so verschwinden die zweiten Seiten der Resultate identisch. Somit ist

$$\left.\begin{aligned}m_1 - g + hS\lambda\mu &= 0 \\ m_2 - g + hS\lambda\mu &= 0 \\ m_3 - g + hS\lambda\mu &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 102)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}S.\rho_1 V\lambda\mu &= 0 \\ S.\rho_2 V\lambda\mu &= 0 \\ S.\rho_3 V\lambda\mu &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 103)$$

Nun können aber die drei Gleichungen (f. 103) nicht zugleich stattfinden, weil ρ_1, ρ_2, ρ_3 nicht complanar sind. Weiter können aber auch nicht, wie unmittelbar ersichtlich, zwei der Gleichungen (f. 102) zusammen gültig sein, wenn die Wurzeln der Gleichung (f. 98) von einander verschieden vorausgesetzt werden. Es kann daher nur eine der Gleichungen (f. 102) mit den beiden nicht correspondirenden der Gleichungen (f. 103) zugleich gültig sein. Wir setzen daher

$$m_1 - g + hS\lambda\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 104)$$

und

$$S.\rho_2 V\lambda\mu = 0\,,\ S.\rho_3 V\lambda\mu = 0 \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 105)$$

somit

$$UV\lambda\mu = \rho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 106)$$

Durch die Relation (f. 104) gehen die beiden letzteren der Gleichungen (f. 101) über in

$$\left.\begin{aligned}(m_2 - m_1)\rho_2 &= h\lambda S\rho_2\mu + h\mu S\rho_2\lambda \\ (m_3 - m_1)\rho_3 &= h\lambda S\rho_3\mu + h\mu S\rho_3\lambda\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 107)$$

Die Gleichung (f. 106) sagt aus, dass λ, μ beide in die Ebene der Vektoren ρ_2, ρ_3 fallen müssen. Setzen wir daher

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda = x\rho_2 + y\rho_3, & x^2 + y^2 = 1 \\ \mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3, & x_1^2 + y_1^2 = 1\end{array}\right\} \ldots\ldots (f. 108)$$

so ergibt die Substitution dieser Werte in ($f.$ 107)

$$(m_2 - m_1)\rho_2 = -2hxx_1\rho_2 - h\rho_3(yx_1 + xy_1)$$
$$(m_3 - m_1)\rho_3 = -h\rho_2(xy_1 + yx_1) - 2hyy_1\rho_3$$

und hieraus wird geschlossen

$$\left.\begin{array}{l}2hxx_1 = m_1 - m_2 \\ 2hyy_1 = m_1 - m_3 \\ xy_1 + yx_1 = 0\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (f. 109)$$

Es wird hierdurch weiter

$$\frac{xx_1}{yy_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3}, \quad \frac{x}{y} = -\frac{x_1}{y_1}$$

somit

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 - m_3} \ldots\ldots\ldots\ldots (f. 110)$$

Diese Gleichung ergibt nur reelle Werte für $\frac{x}{y}$, falls

$$\left.\begin{array}{l}m_2 > m_1 > m_3 \\ \text{oder} \\ m_3 > m_1 > m_2\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (f. 111)$$

Machen wir die erstere Annahme, so erhalten wir

$$\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_3}} = -\frac{x_1}{y_1} \ldots\ldots (f. 112)$$

und mit Hülfe der Gleichungen ($f.$ 108) können nunmehr leicht x, y, x_1, y_1, einzeln bestimmt werden. Man erhält dadurch

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{m_2 - m_1}\,\rho_2 - \sqrt{m_1 - m_3}\,\rho_3}{\sqrt{m_2 - m_3}} \\ \mu = \pm\dfrac{\sqrt{m_2 - m_1}\,\rho_2 + \sqrt{m_1 - m_3}\,\rho_3}{\sqrt{m_2 - m_3}}\end{array}\right\} \ldots\ldots (f. 113)$$

Es folgt sodann weiter

$$S\lambda\mu = \frac{m_2 + m_3 - 2m_1}{m_2 - m_3} \ldots\ldots\ldots (f. 114)$$

und aus einer der Gleichungen ($f.$ 109)

$$h = \frac{m_2 - m_3}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (f. 115)$$

Schlieszlich ergibt ($f.$ 104) noch für die Grösze g den Wert

$$g = \frac{m_2 + m_3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 116)$$

und hiermit sind die Werte aller bei der cyclischen Transformation in Betracht kommenden Gröszen ermittelt.

164. Umgekehrt setzen die vorhergehenden Relationen uns in den Stand unmittelbar von der cyklischen Form der Vektorfunktion auf die rechtwinklige zu schlieszen.

Es ergibt sich nämlich daraus

$$m_2 = g + h, \quad m_3 = g - h. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 117)$$

und aus ($f.$ 104)

$$m_1 = g - hS\lambda\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 118)$$

Noch wird aus ($f.$ 113) erhalten

$$\rho_2 = \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{2(1 + S\lambda\mu)}}, \quad \rho_3 = \frac{\mu + \lambda}{\sqrt{2(1 - S\lambda\mu)}} \quad \ldots \quad (f.\ 119)$$

oder kürzer

$$\rho_2 = U(\mu - \lambda), \quad \rho_3 = U(\mu + \lambda). \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 120)$$

während schon

$$\rho_1 = UV\lambda\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 121)$$

gefunden ist.

165. Ist die selbstconjugirte Funktion $\Phi_0\rho$ cyclisch transformirt, so ergibt sich daraus eine einfache Gestalt für die willkürliche lineare Vektorfunction. Denn nach ($f.$ 96) in Verbindung mit ($f.$ 100) erhält man nunmehr

$$\Phi\rho = g\rho + V\delta\rho + hV\lambda\rho\mu = V(g + \delta)\rho + hV\lambda\rho\mu$$

oder

$$\Phi\rho = Vq_0\rho + hV\lambda\rho\mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 122)$$

wo q_0 ein constanter Quaternion ist derart, dass

$$Sq_0 = g, \quad Vq_0 = \delta.$$

166. Schlieszlich seien noch die Transformationen erwähnt, welche von Hamilton die focale Transformationen der selbstconjugirten linearen Vektorfunktion genannt worden sind und welche durch die Gleichung

$$\Phi_0\rho = -a\lambda V\lambda\rho + b\mu S\mu\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 123)$$

ausgesprochen werden. a und b bedeuten constante Skalare, λ, μ Einheitsvektoren bestimmter Richtung.

Man kann sodann auch schreiben

$$\Phi_0\rho = a\rho + a\lambda S\lambda\rho + b\mu S\mu\rho \;\ldots\ldots\; (f.\ 124)$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf die drei Vektoren ρ_1, ρ_2, ρ_3 ergibt

$$\left.\begin{aligned}(m_1 - a)\rho_1 &= a\lambda S\lambda\rho_1 + b\mu S\mu\rho_1\\ (m_2 - a)\rho_2 &= a\lambda S\lambda\rho_2 + b\mu S\mu\rho_2\\ (m_3 - a)\rho_3 &= a\lambda S\lambda\rho_3 + b\mu S\mu\rho_2\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\; (f.\ 125)$$

und die Operation mit $S.V\lambda\mu$ an eine jede dieser Relationen führt zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}m_1 - a &= 0\\ m_2 - a &= 0\\ m_3 - a &= 0\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 126)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}S.\rho_1 V\lambda\mu &= 0\\ S.\rho_2 V\lambda\mu &= 0\\ S.\rho_3 V\lambda\mu &= 0\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 127)$$

Wie bei dem Vorhergehenden schlieszt man sodann weiter, dass

$$m_1 = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 128)$$

und

$$UV\lambda\mu = \rho_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 129)$$

und die erstere dieser Gleichungen reducirt die beiden letzteren der Relationen ($f.$ 125) zu den nachstehenden

$$\left.\begin{aligned}(m_2 - m_1)\rho_2 &= m_1\lambda S\lambda\rho_2 + b\mu S\mu\rho_2\\ (m_3 - m_1)\rho_3 &= m_1\lambda S\lambda\rho_3 + b\mu S\mu\rho_3\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\; (f.\ 130)$$

Nun setze man der Gleichung ($f.$ 129) entsprechend wieder

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= x\rho_2 + y\rho_3, \quad x^2 + y^2 = 1\\ \mu &= x_1\rho_2 + y_1\rho_3, \quad x_1^2 + y_1^2 = 1\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\; (f.\ 131)$$

und führe diese Werte in die Gleichungen ($f.$ 130) ein. Dadurch wird erhalten

$$\left.\begin{aligned}m_1x^2 + bx_1^2 &= m_1 - m_2\\ m_1y^2 + by_1^2 &= m_1 - m_3\\ m_1xy + bx_1y_1 &= 0\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 132)$$

Die Addition der beiden ersteren dieser Relationen in Verbindung mit den Gleichungen ($f.$ 131) ergibt unmittelbar

$$b = m_1 - m_2 - m_3 \;\ldots\ldots\ldots\; (f.\ 133)$$

und weiter findet man durch Auflösung für x, y, x_1, y_1 Werte welche sich in die nachstehende Gestalt bringen lassen

$$x^2 = \frac{m_1^{-1} - m_2^{-1}}{m_3^{-1} - m_2^{-1}},\ y^2 = \frac{m_1^{-1} - m_3^{-1}}{m_2^{-1} - m_3^{-1}} \ldots\ldots (f. 134)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{m_3^{-2}(m_2^{-1} - m_1^{-1})}{(m_2^{-1} - m_3^{-1})(m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1})} \\ y_1^2 &= \frac{m_2^{-2}(m_3^{-2} - m_1^{-1})}{(m_3^{-1} - m_2^{-1})(m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1})} \end{aligned}\right\} . (f. 135)$$

Die Werte für x^2, y^2 sind nur positiv, wenn einer der Ungleichungen

$$m_2^{-1} > m_1^{-1} > m_3^{-1},\ m_3^{-1} > m_1^{-1} > m_2^{-1} \ldots\ldots (f. 136)$$

genügt wird.

Es werden sodann aber auch die Werte für x_1^2, y_1^2 reell sein müssen, wie unmittelbar erhellt, wenn man noch beachtet, dass

$$m_1^{-1}m_2^{-1} + m_1^{-1}m_3^{-1} - m_2^{-1}m_3^{-1} = m_1^{-2} - (m_1^{-1} - m_2^{-1})(m_1^{-1} - m_3^{-1})$$

Hierdurch ist nun festgesetzt, welche der Wurzeln der Gleichung ($f.$ 98) für m_1 zu wählen sei.

Hat man in dieser Weise die Gröszen x^2, y^2, x_1^2, y_1^2 bestimmt, so müssen noch die Zeichen der Coefficienten x, y, x_1, y_1 der Gleichung

$$m_1 xy + b x_1 y_1 = 0$$

entsprechend gewählt werden. Es wird hierdurch zu Tage treten, dass diese Transformation auf zweifache Weise stattfinden kann.

167. Man könnte wieder umgekehrt fragen aus der focalen Form der linearen Vektorfunktion unmittelbar auf die rechtwinklige zu schlieszen. Es wird zu diesem Zwecke hinreichen aus den vorangegangenen Gleichungen die Gröszen m_1, m_2, m_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 zu bestimmen.

Nach ($f.$ 128) ($f.$ 129) ist schon bekannt

$$m_1 = a,\quad \rho_1 = UV\lambda\mu$$

Aus ($f.$ 131) erfolgt durch Multiplikation

$$-S\lambda\mu = xx_1 + yy_1$$

und indem man quadrirt

$$(S\lambda\mu)^2 = x^2x_1^2 + y^2y_1^2 + 2xyx_1y_1 = x^2x_1^2 + y^2y_1^2 - 2\frac{m_1}{b}x^2y^2 \text{ nach } (f. 132).$$

Die Substitution der für x^2, x_1^2, y^2, y_1^2 gefundenen Werte ergibt in Verbindung mit ($f.$ 133)

$$m_2 + m_3 = a - b$$
$$m_2 m_3 = -ab(S\lambda\mu)^2$$

und hieraus erhellt sofort, dass m_2, m_3 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$m^2 - (a-b)\,m - ab(S\lambda\mu)^2 = 0 \,.\;.\;.\;.\;.\quad (f.\ 137)$$

sein müssen. Weil aber nach (b. 151) (b. 135)

$$S.q^2 = Sq^2 - NVq \quad \text{und} \quad Sq^2 + NVq = Tq^2$$

so ergibt sich

$$2\,Sq^2 = S.q^2 + Tq^2$$

und daher auch

$$2(S\lambda\mu)^2 = S.(\lambda\mu)^2 + 1.$$

Die Gleichung (f. 137) kann deshalb auch in der nachstehenden Gestalt erhalten werden

$$m^2 - (a-b)\,m - ab\,\frac{1 + S.(\lambda\mu)^2}{2} \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\quad (f.\ 138)$$

Der Annahme (f. 136) gemäsz müssen hieraus m_2 und m_3 ermittelt werden, wodurch man zu den nachstehenden Werten geführt wird:

$$\frac{a-b}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\,S.(\lambda\mu)^2}$$

Um schlieszlich noch ρ_2, ρ_3 zu bestimmen, können wir wie nachstehend verfahren. Die beiden Gleichungen (f. 131)

$$\lambda = x\rho_2 + y\rho_3$$
$$\mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3$$

multiplicire man mit m_3, $-bS\lambda\mu$ bzhw. und addire die Resultate, indem in der zweiten Seite $S\lambda\mu$ durch $-xx_1 - yy_1$ ersetzt wird. Es entsteht in dieser Weise

$$\begin{aligned} m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu &= \rho_2[m_3x + bx_1(xx_1 + yy_1)] \\ &= \rho_3[m_3y + by_1(xx_1 + yy_1)] \end{aligned}$$

Nun ist jedoch weiter

$$\begin{aligned} m_3x + bx_1(xx_1 + yy_1) &= x(m_3 + bx_1^2) + byx_1y_1 \\ &\left.\begin{aligned} &= x(m_3 + bx_1^2 - m_1y^2) \\ &= x[m_3 + m_1 - m_2 - m_1(x^2+y^2)] \end{aligned}\right\}\ \text{nach}(f.132) \\ &= x(m_3 - m_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3y + by_1(xx_1 + yy_1) &= y(m_3 + by_1^2) + bx_1y_1x \\ &\left.\begin{aligned} &= y(m_3 + by_1^2 - m_1x^2) \\ &= y[m_3 + m_1 - m_3 - m_1(x^2+y^2)] \end{aligned}\right\}\ \text{nach}(f.132) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit wird die zuletzt erhaltene Gleichnng

$$x(m_3 - m_2)\rho_2 = m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu$$

$$\rho_2 = \pm U(m_3\lambda - b\mu S\lambda\mu) \quad \ldots\ldots \quad (f. 139)$$

je nachdem $x(m_3 - m_2)$ positiv oder negativ ist.

In gleicher Weise wird erhalten

$$\rho_3 = \pm U(m_2\lambda - b\mu S\lambda\mu) \quad \ldots\ldots \quad (f. 140)$$

je nachdem $y(m_2 - m_3)$ positiv oder negativ ist.

In dem Vorhergehenden ist nur der Fall betrachtet, wo die Wurzeln der Gleichung ($f.$ 98) sämtlich von einander und von der Null verschieden sind. Wenn diese Voraussetzung nicht zutrifft, so treten Vereinfachungen ein, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen.

168. Die in den vorigen Artikeln erörterte Transformation ist nicht die einzige focale. Eine andre, welche von HAMILTON die bifocale Transformation genannt worden ist, möge noch kurz dargelegt werden.

Wir sahen, dass man im allgemeinen auf zwei focale Transformationen geführt wird, welche durch das Zeichen der Grössen $x : y$ und $x_1 : y_1$ verschieden sind. Es entstehen aus den Gleichungen ($f.$ 131) daher auch zwei Vektorenpaare, welche wir mit λ, μ; λ_1, μ_1 bezeichnen wollen, sodass

$$\lambda = x\rho_2 + y\rho_3, \quad \lambda_1 = x\rho_2 - y\rho_3 \quad \ldots\ldots \quad (f. 141)$$

$$\mu = x_1\rho_2 + y_1\rho_3, \quad \mu_1 = x_1\rho_2 - y_1\rho_3 \quad \ldots\ldots \quad (f. 142)$$

Wir können nun auch in $\Phi_0\rho$ statt λ, μ die beiden Vektoren λ, λ_1 einführen und die dadurch erhaltene Form ist eine HAMILTONsche bifocale Form.

Aus ($f.$ 141) erfolgt zunächst

$$\rho_2 = \frac{\lambda + \lambda_1}{2x}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda - \lambda_1}{2y}$$

und die Substitution dieser Werte in die erste der Gleichungen ($f.$ 142) ergibt

$$\mu = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y}\right) + \frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{x_1}{x} - \frac{y_1}{y}\right).$$

Führt man diesen Wert in die focale Form ($f.$ 124) ein, so wird erhalten

$$\Phi_0\rho = a\rho + \left[a + \frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y}\right)^2\right]\lambda S\lambda\rho +$$

$$+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2\lambda_1 S\lambda_1\rho+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1^2}{x^2}-\frac{y_1^2}{y^2}\right)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho).$$

Nun ist jedoch

$$a+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}+\frac{y_1}{y}\right)^2=\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2+a+\frac{bx_1y_1}{xy}=$$

$$=\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2 \text{ nach } (f.\ 128)\ (f.\ 132)$$

Dadurch wird

$$\varphi_0\rho=a\rho+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1}{x}-\frac{y_1}{y}\right)^2(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)$$
$$+\frac{b}{4}\left(\frac{x_1^2}{x^2}-\frac{y_1^2}{y^2}\right)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho),$$

und wenn noch die Werte für $a, b, x^2, x_1^2, y^2, y_1^2$ aus (*f.* 128) (*f.* 133) (*f.* 134) (*f.* 135) eingeführt werden

$$\varphi_0\rho=m_1\rho-\frac{m_1(m_2-m_3)}{4\,m_2m_3}[(m_2-m_3)(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)+$$
$$+(m_2+m_3)(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho)].$$

Schlieszlich sei gesetzt

$$\frac{m_2+m_3}{m_2-m_3}=-e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 143)$$

So wird erhalten

$$\varphi_0\rho=\frac{m_1}{e^2-1}[(e^2-1)\rho-(\lambda S\lambda\rho+\lambda_1 S\lambda_1\rho)+e(\lambda S\lambda_1\rho+\lambda_1 S\lambda\rho)] \quad (f.\ 144)$$

169. Eine zweite allgemeine Lösungsmethode der linearen Quaterniongleichungen ist in diesem Artikel auseinandergesetzt.

Dieselbe gründet sich auf den im zweiten Abschnitte bewiesenen Satz, dass die Gleichheit zweier Quaternionen vier Skalargleichungen in sich schlieszt.

Diese Methode anzuwenden, ersetze man jeden in der Gleichung vorhandenen Quaternion durch die viergliedrige Grundform, und bringe nachher die beiden Seiten der Gleichung wieder in diese Gestalt.

Wir wollen als Beispiel eine der vorher schon gelösten Gleichungen wählen, nämlich

$$V\alpha\rho=\gamma.$$

Es sei

$$\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k\,,\quad \rho = xi + yj + zk\,,\quad \gamma = c_1 i + c_2 j + c_3 k\,,$$

wo Skalarteile natürlich nicht vorkommen.

Nach (*b.* 169) ist sodann

$$V\alpha\rho = i(za_2 - ya_3) + j(xa_3 - za_1) + k(ya_1 - xa_2)$$

und dieser Ausdruck soll mit γ identisch sein. Man erhält hieraus die drei Skalargleichungen:

$$za_2 - ya_3 = c_1\,,\quad xa_3 - za_1 = c_2\,,\quad ya_1 - xa_2 = c_3\quad . \quad (f.\ 145)$$

Dieselben schlieszen in sich die Skalarrelation

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \text{ oder } S\alpha\gamma = 0$$

wie auch vorher gefunden, und bei dieser Annahme sind die Gleichungen (*f.* 145) nicht mehr unabhängig von einander. Man hat somit nur zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z, wodurch in der Lösung ein unbestimmter Skalar bleiben musz, in Übereinstimmung mit dem vorher erhaltenen Resultate.

Bezeichnen wir jenen Skalar mit h, so sind bekanntlich die Lösungen der Gleichungen (*f.* 145)

$$x = a_1 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_2}{a_3} - \frac{c_3}{a_2}\right)$$

$$y = a_2 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_3}{a_1} - \frac{c_1}{a_3}\right)$$

$$z = a_3 h + \tfrac{1}{3}\left(\frac{c_1}{a_2} - \frac{c_2}{a_1}\right)$$

und hierdurch ist nun auch der Wert von ρ bekannt; doch wollen wir nicht länger bei dieser Methode verweilen.

170. Die bisher auseinandergesetzten allgemeinen Lösungsmethoden erfordern bei vielen Gleichungen umständliche Rechnungen, welche durch Anwendung specieller Methoden leicht vermieden werden können. Es sei uns gestattet diese Behauptung an einigen Beispielen zu erweisen. Wir wählen dazu wieder die schon nach der allgemeinen Methode gelösten Gleichungen.

1°. $$V.\alpha\rho\beta = \gamma.$$

Wir operiren an diese Gleichung mit dem Symbol $S.\alpha$ und erhalten dadurch

$$S.\alpha\gamma = S.\alpha\, V\alpha\rho\beta = S.\alpha\alpha\rho\beta = \alpha^2 S\beta\rho$$

oder kürzer

$$S.\beta\rho = \alpha^{-2} S\alpha\gamma.$$

Ebenfalls

$$S.\beta\gamma = S.\beta\, V\alpha\rho\beta = S.\beta\, V\beta\rho\alpha \text{ nach } (c. \text{[illegible]}2) = \beta^2 S\alpha\rho$$

oder kurz

$$S.\alpha\rho = \beta^{-2} S.\beta\gamma.$$

Schreiben wir noch statt der gegebenen Gleichung

$$\alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho = \gamma$$

so erhalten wir, wenn die vorhergehenden Resultate beachtet werden

$$\rho S\alpha\beta = -\gamma + \alpha^{-1} S.\alpha\gamma + \beta^{-1} S.\beta\gamma$$

in Übereinstimmung mit (*f.* 70).

2°. $\quad V.\rho\alpha\beta = \gamma$ oder $\rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho = \gamma$

Wie bei der vorigen Gleichung erhält man

$$S.\alpha\gamma = S.\alpha\, V\rho\alpha\beta = S.\alpha(\rho S\alpha\beta - \alpha S\beta\rho + \beta S\alpha\rho) = 2S\alpha\rho S\alpha\beta - \alpha^2 S\beta\rho$$

$$S.\beta\gamma = S.\beta\, V\rho\alpha\beta = S.\beta\, V\beta\alpha\rho = S.\beta\beta\alpha\rho = \beta^2 S\alpha\rho.$$

Durch Auflösung erfolgt:

$$S\alpha\rho = \beta^{-2} S\beta\gamma, \quad S.\beta\rho = -\alpha^{-2} S\alpha\gamma + 2\alpha^{-2}\beta^{-2} S\alpha\beta S\beta\gamma$$

Bei der Substitution dieser Werte in die ursprüngliche Gleichung wird erhalten

$$\rho S\alpha\beta = \gamma - \alpha^{-1} S\alpha\gamma + 2\alpha^{-1}\beta^{-2} S\alpha\beta S\beta\gamma - \beta^{-1} S\beta\gamma$$

wie in (*f.* 72)

3°. $$V.\alpha\rho = \gamma.$$

Es kann nunmehr $S.\alpha\rho$ willkürlich gewählt werden z. B.

$$S.\alpha\rho = x.$$

Durch Addition zu der vorliegenden Gleichung wird

$$\alpha\rho = \gamma + x \text{ oder } \rho = \alpha^{-1}(\gamma + x).$$

Dieses Resultat ist in (*f.* 74) enthalten.

Dasselbe Verfahren wäre jedoch bei den beiden vorangegangenen Gleichungen nicht ohne Weiteres gestattet. Denn man hätte sodann aus der sub 2° behandelten Gleichung erhalten

$$\rho = (x + \gamma)\beta^{-1}\alpha^{-1},$$

was offenbar im allgemeinen unmöglich ist, weil die erste Seite ein rechter Quotient, die zweite ein willkürlicher Quaternion ist. Es musz somit die Grösze x noch so bestimmt werden, dass

$$S.(x + \gamma)\beta^{-1}\alpha^{-1} = 0,$$

woraus

$$x = -\frac{S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}}{S.\beta^{-1}\alpha^{-1}}.$$

Die Lösung der betrachteten Gleichung kann daher geschrieben werden

$$\rho = \left(\gamma - \frac{S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}}{S.\beta^{-1}\alpha^{-1}}\right)\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Eine nützliche Übung gewährt die Zurückführung dieses Ausdruckes auf die Form (*f.* 72) oder umgekehrt. Wir wollen nur noch die zuletzt erhaltene Lösung ein wenig umgestalten.

Es ist

$$S.\beta^{-1}\alpha^{-1} = S.\,\beta^{-2}\beta\alpha\alpha^{-2} = \alpha^{-2}\beta^{-2}S\alpha\beta$$
$$S.\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^{-2}\beta^{-2}S.\gamma\beta\alpha = -\,\alpha^{-2}\beta^{-2}S.\alpha\beta\gamma.$$

Somit wird:

$$\rho = \left(\gamma + \frac{S.\alpha\beta\gamma}{S.\alpha\beta}\right)\beta^{-1}\alpha^{-1}. \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 146)$$

171. Hamilton hat auch eine **direkte Lösung der allgemeinen linearen Quaterniongleichung** mitgeteilt, welche nicht eine vorangehende Reduktion zu einer linearen Vektorgleichung eines Vektors voraussetzt.

Wir wollen dieselbe in den nächstfolgenden Artikeln erörtern.

Es sei $f(q) = r$ die gegebene Gleichung, q der unbekannte, r ein bekannt vorausgesetzter Quaternion. Der Einfachheit wegen wollen wir auch hier wieder das Resultat der Operation f an einen Quaternion q im allgemeinen mit fq bezeichnen und nur $f(q)$ schreiben, wenn q aus einer Summe besteht oder eine verwickelte Gestalt hat. Es hat die Funktion f die nachfolgenden Eigenschaften:

$$f(q + q') = fq + fq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 147)$$

wegen der Linearität;

$$f(xq) = xfq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 148)$$

wegen der Relation (*f.* 147).

Die Lösung der vorliegenden Gleichung wollen wir mit $f^{-1}r$ bezeichnen. Es ist deshalb

$$q = f^{-1}r, \text{ wenn } fq = r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 149)$$

Wie in Art. 138 kann bewiesen werden, dass

$$f^{-1}r + f^{-1}r' + \ldots. = f^{-1}(r + r' + \ldots.) \quad \ldots \quad (f.\ 150)$$

$$f^{-1}(xr) = xf^{-1}r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 151)$$

Wenn wir eine neue lineare Funktion f' construiren, welche der Relation genügt

$$S.pfq = S.qf'p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 152)$$

so können wir dieselbe die Conjugirte der Funktion f nennen.

Setzen wir voraus die lineare Gleichung sei in die Form ($f.$ 7) gebracht, so ist es ein Leichtes die Funktion f' zu finden. Denn wenn wir an die erste Seite der Gleichung ($f.$ 7) mit $S.p$ operiren und jedes Glied für sich nehmen, so erhalten wir

$$Spaqb = S.(pa)(qb) = S.(qb)(pa) = S.qbpa$$
$$S.pcSeq = SeqSpc = SqeScp = S.qeScp.$$

Es geht hieraus hervor, dass die Funktion f' aus f erhalten wird, indem die Gröszen b mit a, und die Gröszen c mit e umgetauscht werden.

Wenn man in

$$f = \Sigma aqb + \Sigma cSeq,$$

q der Einheit gleich setzt, und in gleicher Weise in $f'q$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} f1 &= \Sigma ab + \Sigma cSe \\ f'1 &= \Sigma ba + \Sigma eSc \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 153)$$

Es ist daraus ersichtlich, dass

$$S.f1 = S.f'1, \text{ aber } Vf1 \gtrless Vf'1.$$

Wir wollen demnach und der Kürze halber setzen:

$$S.f1 = S.f'1 = c, \quad Vf1 = \varepsilon, \quad Vf'1 = \varepsilon' \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 154)$$

wodurch zugleich die Relationen

$$f1 = c + \varepsilon, \; f'1 = c + \varepsilon' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 155)$$

erhalten werden. Weiter kann man wie nachstehend transformiren:

$$S.fq = S.1fq = S.qf'1 \text{ nach } (f.\ 152) = S.q(c + \varepsilon') = cSq + S.\varepsilon'q,$$
$$V.fq = V.f(Sq + Vq) = V(fSq + fVq) \text{ nach } (f.\ 147) = V.fSq + V.fVq$$
$$= V.Sqf'1 + V.fVq = Sq.Vf'1 + V.fVq = \varepsilon'Sq + \Phi Vq$$

oder kürzer

$$S.fq = cSq + S.\varepsilon'q, \quad Vfq = \varepsilon'Sq + \Phi Vq \quad . \quad . \quad . \quad (f.\ 156)$$

wo ΦVq eine lineare Vektorfunktion des Vektors Vq ist. Denn man erhält

$$\Phi Vq = V.fVq = \Sigma V.a(Vq)b + \Sigma V.cS(eVq).$$

Jedes Glied unter dem ersten Zeichen Σ kann wie nachstehend transformirt werden

$$
\begin{aligned}
V.a(Vq)b &= V.aVq(Sb + Vb) = V.aSbVq + VaVqVb = \\
&= V.aSbVq + V.(Sa + Va)VqVb \\
&= V.aSbVq - V.SaVbVq + V.VaVqVb \\
&= V.(aSb - SaVb)Vq + VaS.VbVq - VqS.VaVb + \\
&\qquad + VbS.VaVq \\
&= V.(aSb - SaVb - S.VaVb)Vq + VaS.VbVq + Vb.SaVq
\end{aligned}
$$

während weiter

$$V.cS(eVq) = S(eVq)Vc = VcS(eVq) = VcS.VeVq$$

und hieraus geht hervor, dass ΦVq in der Tat die Gestalt der linearen Vektorfunktion (*f.* 16) besitzt. Auch hätte man zeigen können, dass die Funktion $V.fVq$ der Gleichung (*f.* 19) genügt.

Aus den beiden Gleichungen (*f.* 156) erfolgt, dass allgemein

$$fq = (c + \varepsilon)Sq + S.\varepsilon' q + \Phi Vq \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 157)$$

gesetzt werden kann.

Die zweite Seite der gegebenen Gleichung wollen wir auch transformiren

$$r = Sr + Vr = Sr + \Phi\Phi^{-1}Vr = Sr + \Phi\rho,$$

wenn ρ definirt wird durch die Gleichung

$$\rho = \Phi^{-1}Vr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 158)$$

Die ursprünglich vorhandene Gleichung lautet nunmehr

$$f(q) = Sr + \Phi\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 159)$$

Weiter wollen wir nach Hamilton setzen

$$q = q' + \rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 160)$$

wo q' ein neuer Quaternion sei, welchen wir sogleich auswerten werden.

Es wird sodann

$$fq' = f(q - \rho) = fq - f\rho = Sr + \Phi\rho - f\rho \ldots \quad (f.\ 161)$$

Die letztere Funktion kann leicht bestimmt werden. Denn, wenn man für f die Form (*f.* 157) wählt, so wird erhalten

$$f\rho = (c + e)S\rho + S.\varepsilon'\rho + \Phi\rho = S.\varepsilon'\rho + \Phi\rho$$

und hiermit geht die Gleichung (*f.* 161) über in

$$fq' = Sr - S.\varepsilon'\rho = S(r - \varepsilon'\rho) \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 162)$$

Demgemäsz wird

$$q' = f^{-1}S(r - \varepsilon'\rho) \text{ nach } (f.149) = S(r - \varepsilon'\rho)f^{-1}1 \text{ nach } (f.151) \quad (f. 163)$$

Weil r, ε', ρ bekannte Gröszen sind, oder wenigstens Gröszen, deren Werte nach vorigen Methoden aus der gegebenen Gleichung bestimmt werden können, so bleibt nur noch $f^{-1}1$ zu ermitteln. Es ist dieses Symbol der Wert des Quaternions q_0, welches der Gleichung

$$fq_0 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f. 164)$$

genügt.

Die Skalar- und Vektorteile des Quaternions q_0 seien a_0, α_0 bzhw., so ist

$$f(a_0 + \alpha_0) = 1 \text{ oder nach } (f. 157)\ (c + \varepsilon)a_0 + S\varepsilon'\alpha_0 + \Phi\alpha_0 = 1$$

und diese Relation führt, indem man die Skalare und Vektoren trennt, zu den beiden anderen

$$ca_0 + S.\varepsilon'\alpha_0 = 1, \quad a_0\varepsilon + \Phi\alpha_0 = 0 \ldots\ldots \quad (f. 165)$$

Aus der zweiten dieser Relationen wird α_0 leicht gelöst. Dadurch wird erhalten

$$\alpha_0 = -\Phi^{-1}(a_0\varepsilon) = -a_0\Phi^{-1}\varepsilon$$

und indem dieser Wert in die erste der Gleichungen $(f. 165)$ eingesetzt wird

$$a_0 = \frac{1}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \text{ und hiermit } \alpha_0 = -\frac{\Phi^{-1}\varepsilon}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \quad . \ (f. 166)$$

Schlieszlich ist

$$f^{-1}1 = a_0 + \alpha_0 = \frac{1 - \Phi^{-1}\varepsilon}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon} \ldots\ldots \quad (f. 167)$$

und nach $(f. 160)$ $(f. 163)$

$$q = \rho + \frac{S(r - \varepsilon'\rho)}{c - S.\varepsilon'\Phi^{-1}\varepsilon}[1 - \Phi^{-1}\varepsilon] \ldots\ldots \quad (f. 168)$$

Es wäre somit, um den Wert des unbekannten Quaternions q zu erhalten, notwendig erst die Funktion Φ^{-1} zu bestimmen, was auf die Lösung einer Vektorgleichung hinauskommt. Man kann jedoch weiter gehen und dadurch diese Funktion ganz eliminiren.

Wir nehmen zu diesem Zwecke die Gleichung $(f. 46)$ wieder auf und setzen

$$x\Phi^{-1} = x_1 - x_2\Phi + \Phi^2 = \chi \ldots\ldots\ldots \quad (f. 169)$$

wo χ eine neue Funktion ist. Wenn wir sodann noch einen neuen Skalar y einführen, den wir definiren durch die Gleichung

$$xc - S.\epsilon'\chi\epsilon = y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 170)$$

so erhalten wir die nachstehenden Transformationen. Nach ($f.$ 167) kann nun auch geschrieben werden

$$f^{-1}1 = \frac{x - x\Phi^{-1}\epsilon}{xc - S.\epsilon' x\Phi^{-1}\epsilon} = \frac{x - \chi\epsilon}{y}$$

somit

$$yf^{-1}1 = x - \chi\epsilon$$
$$f^{-1}y = x - \chi\epsilon \text{ nach } (f.\ 151)$$
$$y = f[x - \chi\epsilon] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 171)$$

Und weiter

$$yq = y\rho + \frac{yS(r - \epsilon'\rho)}{c - S.\epsilon'\Phi^{-1}\epsilon}[1 - \Phi^{-1}\epsilon]$$
$$= [xc - S.\epsilon'\chi\epsilon]\rho + xS(r - \epsilon'\rho).[1 - \Phi^{-1}\epsilon]$$
$$= [xc - S.\epsilon'\chi\epsilon]\rho + [x - \chi\epsilon]S(r - \epsilon'\rho)$$

Indem die Produkte berechnet und die Glieder umgetauscht werden

$$yq = [x - \chi\epsilon]Sr + cx\rho - S.\epsilon' x\rho + \chi\epsilon.S\epsilon'\rho - \rho S.\epsilon'\chi\epsilon$$
$$= [x - \chi\epsilon]Sr + c\chi Vr - S.\epsilon'\chi Vr + V.\epsilon' V(\rho\chi\epsilon)$$

wobei zuletzt die Formel ($c.$ 40) angewandt ist.

Eine weitere Umgestaltung wollen wir getrennt vornehmen und greifen zuerst ein wenig zurück. Indem man wie in Art. 143 verfährt, kann die Formel erhalten werden

$$x'\Phi'^{-1}V\lambda\mu = V.\Phi\lambda\Phi\mu$$

und die Operation an diese Gleichung mit Φ' ergibt

$$x'V\lambda\mu = \Phi'[V.\Phi\lambda\Phi\mu]$$

wo x' nach ($f.$ 34) berechnet wird, wenn man darin die Funktion Φ' durch Φ ersetzt. Es ist jedoch in Art. 159 gezeigt, dass $x' = x$ sein musz.

Die vorige Gleichung lässt sich demnach schreiben

$$xV\lambda\mu = \Phi'[V.\Phi\lambda\Phi\mu]$$

und diese Relation wollen wir zu unsrer Transformation anwenden. Denn es wird nach derselben

$$xV\rho\chi\epsilon = \Phi'[V.\Phi\rho\Phi\chi\epsilon] = \Phi'[V.\Phi\Phi^{-1}Vr\Phi(x\Phi^{-1}\epsilon)] \text{nach } (f.158)(f.169)$$
$$= \Phi'[V.(Vr)x\epsilon] = -x\Phi'(V.\epsilon Vr)$$

oder schlieszlich

$$V.\rho\chi\varepsilon = -\Phi'(V.\varepsilon Vr) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f. 172)$$

Setzt man diesen Wert in den für yq erhaltenen Ausdruck, so wird

$$yq = [x - \chi\varepsilon]Sr + c\chi Vr - S.\varepsilon'\chi Vr - V.\varepsilon'\Phi'(V.\varepsilon Vr) \quad (f. 173)$$

Der unbekannte Quaternion q ist durch diese Gleichung ganz in directen Operationssymbolen ausgedrückt.

172. Wir wollen weiter noch zusehen, welche Änderungen die eingeführten Gröszen erfahren, wenn f durch $f+m$ ersetzt wird, wo m Skalar ist. Wir bezeichnen die Werte, welche y, x, χ, c, Φ, Φ' dadurch annehmen mit y_m, x_m, χ_m, c_m, Φ_m, Φ'_m bzhw.

Aus der Bedeutung der Gröszen ε, ε' leuchtet unmittelbar ein, dass dieselben durch die Substitution nicht beeinfluszt werden können. Auch kann leicht die Richtigkeit der nachstehenden Formeln dargetan werden.

$$c_m = c + m, \quad \Phi_m = \Phi + m, \quad \Phi'_m = \Phi' + m \quad .\,. \quad (f. 174)$$

Denn es ist nach ($f.$ 154)

$$c = Sf1$$

somit

$$c_m = S.(f+m)1 = Sf1 + Sm = c + m.$$

Φ_m soll weiter aus $(f+m)q$ in derselben Weise hergeleitet werden wie Φ aus $f(q)$. Beachten wir die Gleichung ($f.$ 156), welche die Funktion Φ definirt, oder

$$\Phi Vq = V.fVq,$$

so wird

$$\Phi_m = V.(f+m)Vq = V.fVq + V.mVq = \Phi Vq + mVq = (\Phi+m)Vq$$

Analoges gilt für die conjugirte Funktion Φ'.

Die Änderungen, welche x und χ erfahren, sind nach den vorigen Artikeln bekannt. Es ist nämlich

$$x_m = x + mx_1 + m^2x_2 + m^3 \text{ nach } (f. 42);$$

χ_m ist der Wert, welchen $x\Phi^{-1}$ durch die Substitution erhält, oder

$$\chi_m = x(\Phi+m)^{-1} = x\Phi^{-1} + m\psi + m^2 \text{ nach } (f. 38)$$
$$= \chi + m\psi + m^2 \text{ nach } (f. 169)$$

Nach der Definitionsgleichung ($f.$ 170) der Grösze y ist schlieszlich

$$y_m = c_m x_m - S.\varepsilon'\chi_m\varepsilon$$
$$= (c+m)(x + mx_1 + m^2x_2 + m^3) - S.\varepsilon'[\chi\varepsilon + m\psi\varepsilon + m^2\varepsilon]$$

$$y_m = y + my_1 + m^2 y_2 + m^3 y_3 + m^4 \ldots . \quad (f.\,175)$$

wenn die neuen Constanten y_1, y_2, y_3 nach den Gleichungen ($f.$ 176) eingeführt werden

$$y_1 = x + cx_1 - S.\varepsilon'\psi\varepsilon, \; y_2 = x_1 + cx_2 - S.\varepsilon'\varepsilon, \; y_3 = x_2 + c \quad (f.\,176)$$

Nach dieser Vorbereitung können wir leicht ersehen, welche Änderung die Gleichung ($f.$ 173) erfährt, wenn noch beachtet wird, dass

$$q = f^{-1}r.$$

Es wird

$$\begin{aligned}
y_m(f+m)^{-1}r &= \\
&= [x_m - \chi_m\varepsilon]\,Sr + c_m\chi_m\,Vr - S.\varepsilon'\chi_m\,Vr - V.\varepsilon'\Phi'_m(V.\varepsilon\,Vr) \\
&= [x + x_1 m + x_2 m^2 + m^3 - \chi\varepsilon - m\psi\varepsilon - m^2\varepsilon]\,Sr + \\
&\quad + (c+m)\,[\chi + m\psi + m^2]\,Vr - S.\varepsilon'(\chi + m\psi + m^2)\,Vr \\
&\quad - V.\varepsilon'(\Phi' + m)(V.\varepsilon\,Vr) \\
&= [x - \chi\varepsilon]Sr + c\chi\,Vr - S.\varepsilon'\chi\,Vr - V.\varepsilon'\Phi'(V.\varepsilon\,Vr) + \\
&\quad + m[(x_1 - \psi\varepsilon)Sr + (c\psi + \chi)\,Vr - S.\varepsilon'\psi\,Vr - V.\varepsilon'V(\varepsilon\,Vr)] + \\
&\quad + m^2[(x_2 - \varepsilon)Sr + (c + \psi)\,Vr - S.\varepsilon'\,Vr] + m^3 r
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
y_m(f+m)^{-1}r &= yf^{-1}r + mFr + m^2 Gr + m^3 r = \\
&= [yf^{-1} + mF + m^2 G + m^3]r \ldots . . \quad (f.\,177)
\end{aligned}$$

wenn die neuen Funktionen

$$\left.\begin{aligned}
Fr &= [x_1 - \psi\varepsilon]\,Sr + (c\psi + \chi)\,Vr - S.\varepsilon'\psi\,Vr - V.\varepsilon'V(\varepsilon\,Vr) \\
Gr &= (x_2 - \varepsilon)Sr + (c + \psi)\,Vr - S.\varepsilon'\,Vr
\end{aligned}\right\} \quad (f.\,178)$$

eingeführt werden.

Indem an die Gleichung ($f.$ 177) mit $f + m$ operirt wird, erhält man

$$y_m = y + m(fF + yf^{-1}) + m^2(fG + F) + m^3(f + G) + m^4 \quad (f.\,179)$$

eine symbolische Beziehung, welche mit ($f.$ 175) verglichen werden kann, wodurch sich ergibt, wenn die Coefficienten gleicher Potenzen von m einander gleichgesetzt werden,

$$y_1 = fF + yf^{-1}, \; y_2 = fG + F, \; y_3 = f + G \;\ldots \quad (f.\,180)$$

Zwischen diesen Gleichungen können die Symbole F, G eliminirt werden. Es entsteht dadurch

$$G = y_3 - f, \; F = y_2 - y_3 f + f^2 \ldots . . \quad (f.\,181)$$

und

$$yf^{-1} = y_1 - y_2 f + y_3 f^2 - f^3 \ldots . . \quad (f.\,182)$$

womit die umgekehrte Operation f^{-1} in der direkten f ausgedrückt wird.

Schreibt man die zuletzt erhaltene Gleichung in die Form

$$y - y_1 f + y_2 f^2 - y_3 f^3 + f^4 = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (f.\ 183)$$

so kann gesagt werden, die Funktion f genüge einer biquadratischen symbolischen Gleichung.

Die vollständige Lösung der allgemeinen linearen Gleichung ist somit in dem Gleichungssystem ($f.$ 182) ($f.$ 176) ($f.$ 170) ($f.$ 154) ($f.$ 41) ($f.$ 34) enthalten.

173. Ein einfaches Beispiel möge wenigstens teilweise die vorhergehende Theorie erörtern. Es sei die Gleichung

$$aq + qb = c \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (f.\ 184)$$

zur Auflösung vorgelegt.

Hierbei ist

$$fq = aq + qb,\ f1 = a + b,\ f'q = qa + bq,\ f'1 = a + b$$

$$c = S.(a + b),\ \varepsilon = V(a + b) = \varepsilon' \quad . \ . \ . \ . \quad (f.\ 185)$$

$$\begin{aligned}\Phi Vq &= V.fVq = V.[aVq + (Vq)b] = V.aVq + VqSb + V.VqVb \\ &= V.aVq + SbVq - V.VbVq \\ &= V.[aVq + (Sb - Vb)Vq] = V.(a + Kb)Vq\end{aligned}$$

$\Phi' Vq = V.(Ka + b)Vq$ nach Art. 140.

Es kommt nunmehr darauf an, die Gröszen x, x_1, x_2 zu berechnen nach ($f.$ 34) ($f.$ 41). Statt λ, μ, ν wollen wir $Va = \alpha$, $Vb = \beta$ und $V\alpha\beta$ wählen.

Es wird hiermit

$$\Phi'\lambda = V.(Ka + b)\alpha = V.(c - \alpha + \beta)\alpha = c\alpha - V\alpha\beta$$

$$\Phi'\mu = V.(Ka + b)\beta = V.(c - \alpha + \beta)\beta = c\beta - V\alpha\beta$$

$$\Phi'\nu = V.(Ka + b)V\alpha\beta = V.(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta = (c - \alpha + \beta)V\alpha\beta,$$

weil

$$S.(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta = S.(\beta - \alpha)V\alpha\beta = S.(\beta - \alpha)\alpha\beta = S\beta\alpha\beta = -S\alpha\beta^2 = 0.$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned}S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu &= S.(c\alpha - V\alpha\beta)(c\beta - V\alpha\beta)(c - \alpha + \beta)V\alpha\beta \\ &= c^3 S.\alpha\beta V\alpha\beta + c^2 S.[\alpha\beta(\beta - \alpha) - \alpha V\alpha\beta - (V\alpha\beta)\beta]V\alpha\beta \\ &\quad - cS.[\{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\beta - \alpha) + NV\alpha\beta]V\alpha\beta \\ &\quad - S.(\beta - \alpha)V\alpha\beta NV\alpha\beta \\ &= -c^3 NV\alpha\beta + c^2 S.\alpha\beta(\beta - \alpha)V\alpha\beta - \\ &\quad - cS.\{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\beta - \alpha)V\alpha\beta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -c^3 NV\alpha\beta + cS.(\alpha-\beta)V\alpha\beta(\alpha-\beta)V\alpha\beta \\
&= -c^3 NV\alpha\beta + cS.[(\alpha-\beta)V\alpha\beta]^2 \\
&= -c^3 NV\alpha\beta - cN.(\alpha-\beta)V\alpha\beta \\
&= -c^3 NV\alpha\beta - cN(\alpha-\beta)NV\alpha\beta
\end{aligned}
$$

Es ist noch

$$N(\alpha-\beta) = -(\alpha-\beta)^2 = -(Va - Vb)^2 = -[V(a-b)]^2 = NV(a-b)$$

und deshalb schlieszlich

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = -NV\alpha\beta[c^3 + cNV(a-b)].$$

Die Grösze

$$S.[\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu]$$

wird, indem die Faktoren der einzelnen Glieder umgetauscht werden, bis aus allen $V\alpha\beta$ als Faktor ausgenommen werden kann

$$
\begin{aligned}
&= S.[\{2c\alpha\beta - \alpha V\alpha\beta(V\alpha\beta)\beta\}(c - \alpha + \beta) + \\
&\qquad + (c\alpha - V\alpha\beta)(c\beta - V\alpha\beta)]V\alpha\beta \\
&= 3c^2 S.\alpha\beta V\alpha\beta - cS.[2\alpha V\alpha\beta + 2(V\alpha\beta)\beta + 2\alpha\beta(\alpha-\beta)]V\alpha\beta \\
&\qquad + S.[(V\alpha\beta)^2 - \{\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta\}(\alpha-\beta)]V\alpha\beta \\
&= -3c^2 NV\alpha\beta - S.[\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta](\alpha-\beta)V\alpha\beta \\
&= -3c^2 NV\alpha\beta + N(\alpha-\beta)NV\alpha\beta \\
&= -NV\alpha\beta[3c^2 - NV(a-b)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S.[\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu &= \\
&= S.[(c\alpha - V\alpha\beta)\beta + \alpha(c\beta - V\alpha\beta) + \alpha\beta(c - \alpha + \beta)]V\alpha\beta \\
&= 3cS.\alpha\beta V\alpha\beta - S.[\alpha V\alpha\beta + (V\alpha\beta)\beta + \alpha\beta(\alpha-\beta)]V\alpha\beta \\
&= -3cNV\alpha\beta
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$x = c^3 + cNV(a-b),\quad x_1 = 3c^2 - NV(a-b),\quad x_2 = 3c \quad (f.\ 186)$$

Wir können nun die Funktionen $\psi\varepsilon$, $\chi\varepsilon$ berechnen

$$
\begin{aligned}
\Phi\varepsilon &= V.(a + Kb)\varepsilon = V.(a + Kb)V(a + b) \\
&= V.(c + \alpha - \beta)(\alpha + \beta) = c(\alpha + \beta) + \alpha\beta - \beta\alpha \\
&= cV(a + b) + 2V.VaVb = 2Vab + S(a - b)V(a - b) \\
\Phi^2\varepsilon &= V.(a + Kb)V\{(a + Kb)V(a + b)\}
\end{aligned}
$$

Es sind nunmehr die Funktionen ψ, χ unmittelbar hinzuschreiben. Doch wollen wir auf die Mitteilung der Resultate verzichten, weil dieselben zu ausführlich werden.

Wir ersehen jedoch hieraus, wie mühsam die Lösung einer einfachen linearen Gleichung nach der allgemeinen Methode wird.

Es ist deshalb vorzuziehen nach einer besonderen Lösungsmethode umzusehen. Eine solche ist von Hamilton für die in diesem Artikel betrachtete Gleichung mitgeteilt worden.

Wir gehen jetzt zu derselben über.

174. Es sei deshalb hier wieder die Gleichung (*f.* 184) oder

$$aq + qb = c$$

vorgelegt. Indem wir dieselbe einmal *mit Ka*, und auch *durch* b multipliciren, erhalten wir

$$Ka.aq + Ka.qb = Ka.c \text{ und } aqb + qb^2 = cb$$

Die erste dieser Gleichungen wollen wir zuerst umformen. Es wird dadurch

$$qNa + Ka.qb = Ka.c$$

Die zweite lautet

$$qb^2 + aqb = cb.$$

Die Addition ergibt somit

$$q(Na + b^2) + 2qbSa = Ka.c + cb$$

$$q(Na + 2bSa + b^2) = Ka.c + cb$$

$$q = \frac{cb + Ka.c}{Na + 2bSa + b^2} \quad \text{. . . . . (}f.\ 187)$$

Als ein besonderer Fall sei gewählt $c = 0$. Schreiben wir nunmehr die gegebene Gleichung in die Gestalt

$$aq = qb \quad \text{. . . . . (}f.\ 188)$$

so ist in dem vorigen Resultate auch b durch $-b$ zu ersetzen. Es wird sodann

$$q = \frac{Ka.c - cb}{Na - 2bSa + b^2}$$

und für $c = 0$ ergibt dies $q = 0$, ausgenommen wenn zugleich

$$Na - 2bSa + b^2 = 0. \quad \text{. . . . . (}f.\ 189)$$

Diesen Fall wollen wir weiter verfolgen. Aus (*f.* 188) schlieszt man

$$Taq = Tqb \text{ oder } Ta = Tb \quad \text{. . . . . (}f.\ 190)$$

Die Gleichung (*f.* 189) kann demnach wie nachstehend geschrieben werden

$$Nb + b^2 - 2bSa = 0. \quad \text{. . . . . (}f.\ 191)$$

Nach den Gleichungen (*b.* 134) (*b.* 150) ist

$$Nb = Sb^2 - Vb^2 \text{ und } b^2 = Sb^2 + 2SbVb + Vb^2.$$

Deshalb ist

$$Nb + b^2 = 2Sb^2 + 2SbVb = 2bSb,$$

und die Gleichung ($f.$ 191) ergibt nun

$$Sa = Sb \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 192)$$

Weil

$$NVb = Nb - Sb^2 \text{ und } NVa = Na - Sa^2,$$

so kann aus ($f.$ 190) ($f.$ 192) geschlossen werden, dass auch

$$TVa = TVb$$

Wenn wir daher

$$UVa = \alpha, \; UVb = \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 193)$$

setzen, so wird

$$Va = t\alpha, \; Vb = t\beta$$

sein, wo t der gemeinsame Tensor der Vektorteile von a und b bedeutet. Man kann somit setzen

$$a = a_0 + t\alpha, \; b = a_0 + t\beta$$

wo a_0 der gemeinsame Skalarteil der Quaternionen a, b ist, und wenn noch

$$q = w + \rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 194)$$

angenommen wird, wo $w = Sq$, $\rho = Vq$, so ist die Gleichung ($f.$ 188) identisch mit der nachstehenden

$$(a_0 + t\alpha)(w + \rho) = (w + \rho)(a_0 + t\beta)$$

oder

$$w(\alpha - \beta) = \rho\beta - \alpha\rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\ 195)$$

Hiermit wird nun

$$Sw(\alpha - \beta)\rho = S(\rho\beta - \alpha\rho)\rho = S\rho\beta\rho - S\alpha\rho^2 = - S\beta\rho^2 - S\alpha\rho^2 = 0.$$

Deshalb muss $\rho \perp \alpha - \beta$ sein; wenn γ ein willkürlicher Vektor ist, so kann daher gesetzt werden

$$\rho = V\gamma(\alpha - \beta)$$

und hierdurch geht ($f.$ 195) über in

$$w(\alpha - \beta) = [V\gamma(\alpha - \beta)]\beta - \alpha V\gamma(\alpha - \beta)$$

Indem auf beide Seiten mit V operirt wird, entsteht

$$\begin{aligned} w(\alpha - \beta) &= - V.\beta V\gamma(\alpha - \beta) - V.\alpha V\gamma(\alpha - \beta) = - V.(\alpha + \beta) V\gamma(\alpha - \beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma S(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma S(\alpha^2 - \beta^2 - 2V\alpha\beta) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma + \gamma(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= -(\alpha - \beta)S(\alpha + \beta)\gamma - \gamma(T\alpha^2 - T\beta^2) \end{aligned}$$

Weil jedoch α und β Einheitsvektoren sind, verschwindet das letzte Glied und man erhält

$$w = -S(\alpha+\beta)\gamma$$

Nach ($f.$ 194 ist somit

$$\begin{aligned} q &= -S(\alpha+\beta)\gamma + V\gamma(\alpha-\beta) \\ &= -S\alpha\gamma - S\beta\gamma - V\alpha\gamma + V\beta\gamma \\ &= -\alpha\gamma - K\beta\gamma = -\alpha\gamma - \gamma\beta. \end{aligned}$$

Weil γ willkürlich war, kann daher auch gesetzt werden

$$q = \alpha\gamma + \gamma\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 196)$$

Ein zweiter besonderer Fall ist derjenige, wo b der Negative des Quaternions a ist, wo deshalb die erste Seite der gegebenen Gleichung die Gestalt $aq - qa$ hat. Wir können sodann unmittelbar die zweite der Gleichungen ($b.$ 152) anwenden, nach welcher gesetzt werden kann

$$aq - qa = 2V.VaVq$$

Die erste Seite der vorgelegten Gleichung ist somit ein rechter Quotient. Dasselbe musz somit auch mit der zweiten Seite der Fall sein. Wir schreiben daher die gegebene Gleichung in die Form

$$aq - qa = 2\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 197)$$

oder

$$V.VaVq = \beta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 198)$$

Es ist dies die mit ($f.$ 73) bezeichnete Gleichung, deren Lösung nach ($f.$ 74) lautet

$$Vq = (Va)^{-1}(x+\beta)$$

wenn x ein willkürlicher Skalar ist. Die vorgelegte Gleichung ($f.$ 197) lässt den Skalarteil des unbekannten Quaternions unbestimmt. Die vollständige Lösung wird demnach sein

$$q = y + (Va)^{-1}(x+\beta) \quad \ldots\ldots\ldots (f.\ 199)$$

und dieselbe enthält zwei willkürliche Skalare.

175. Es gibt einige Gleichungen anderer Form als die im vorigen Artikel betrachtete lineare Gleichung, welche zu derselben zurückgeführt werden können. Wir wollen einige hier anführen

1°. $$a'qb' + c'qd' = e' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f.\ 200)$$

Denn wenn man mit c'^{-1} und durch b'^{-1} multiplicirt, so entsteht

$$c'^{-1}a'q + qd'b'^{-1} = c'^{-1}e'b'^{-1}$$

in der man $c'^{-1}a' = a$, $d'b'^{-1} = b$, $c'^{-1}e'b'^{-1} = c$ setzen kann.

2°. $$q^2 = aq + qb \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 201)$$

Dieselbe multiplicire man mit q^{-1} und auch durch q^{-1}; es wird erhalten

$$1 = q^{-1}a + bq^{-1}$$

worin $q^{-1} = r$ gesetzt werde.

3°. $$qcq = aq + qb \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 202)$$

Dasselbe Verfahren wie bei der vorigen Gleichung angewandt, ergibt

$$c = q^{-1}a + bq^{-1}$$

somit

$$c = ra + br.$$

176. Der in diesem Abschnitte erörterte Stoff ermöglicht auch die Bestimmung der Differentiale weniger einfacher Funktionen, wie wir denselben schon im Artikel 117 begegnet sind. Denn wie aus jenem Artikel ersichtlich, erfordert die Bestimmung des Differentials der Funktion q^m, wenn m eine gebrochene Zahl ist, die Lösung einer Quaterniongleichung, in der das unbekannte Differential linear vorhanden ist.

Wir wollen in diesem Artikel eine der vorher erörterten Methoden dazu anwenden $d.q^{\frac{k}{l}}$ zu bestimmen, wo k, l ganze arithmetische Zahlen sind.

Zu dem Zwecke greifen wir zur Gleichung ($e.$ 15) oder

$$q^{k-1}dq + q^{k-2}dq.q + \ldots. + qdq.q^{k-2} + dq.q^{k-1} =$$
$$r^{l-1}dr + r^{l-2}dr.r + \ldots. + rdr.r^{l-2} + dr.r^{l-1}$$

zurück, wo

$$q^{\frac{k}{l}} = r$$

gesetzt ist.

Wenn wir diese Gleichung *mit* r^{-1} und zugleich *durch* r multipliciren, auszerdem aber die erste Seite der Gleichung mit Q bezeichnen, so erhalten wir

$$r^{-1}Qr = r^{l-2}dr.r + r^{l-3}dr.r^2 + \ldots. + dr.r^{l-1} + r^{-1}dr.r^l$$

und die Subtraktion dieses Resultates von der Gleichung ($e.$ 15) ergibt

$$Q - r^{-1}Qr = r^{l-1}dr - r^{-1}dr.r^l$$

und nach der Multiplikation *mit* r

$$r^l dr - dr.r^l = rQ - Qr \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 203)$$

Es ist dies eine lineare Gleichung der im Art. 174 zuletzt betrachteten Form zur Bestimmung des gesuchten Differentials dr. Die zweite Seite der Gleichung ist nach der zweiten der Gleichungen (b. 152) ein Vektor, wie gefordert wird. Nach (f. 199) ist die Lösung nun unmittelbar hinzuschreiben, nämlich

$$dr = y + x(V.r^l)^{-1} + \tfrac{1}{2}(V.r^l)^{-1}(rQ - Qr). \quad (f.\ 204)$$

Dieser Wert des Differentials enthält jedoch zwei noch unbestimmte Skalare; es kann hieraus ersehen werden, dass die Überführung der Gleichung (e. 15) in die Form (f. 203) nicht den Nutzen gewährt, welchen dieselbe zuerst zu versprechen schien.

177. Den Wert der Skalare x, y zu bestimmen, tragen wir den gefundenen Ausdrück für dr in die Gleichung (e. 15) ein, welche dadurch eine identische werden musz. In dieser Weise wird erhalten

$$Q = lyr^{l-1} + x[r^{l-1}(V.r^l)^{-1} + r^{l-2}(V.r^l)^{-1}r + \ldots + r(V.r^l)^{-1}r^{l-2} +$$
$$+ (V.r^l)^{-1}r^{l-1}] + \tfrac{1}{2}[r^{l-1}Q_1 + r^{l-2}Q_1r + \ldots + rQ_1r^{l-2} + Q_1r^{l-1}],$$

wo

$$Q_1 = (V.r^l)^{-1}(rQ - Qr)$$

gesetzt ist.

Wenn diese Gleichung mit einer willkürlichen Potenz von r, z. B. mit r^h, multiplicirt wird und die Skalarteile der beiden Seiten einander gleich gesetzt werden, so erhält man

$$S.r^hQ = lyS.r^{h+l-1} + lxS.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1} \quad . \ . \ (f.\ 205)$$

Denn es ist allgemein für jedes ganze a

$$\begin{aligned} S.r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}r^{a-1} &= S.\{r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}\}r^{a-1} \\ &= S.r^{a-1}\{r^{h+l-a}(V.r^l)^{-1}\} = S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1} \end{aligned}$$

und in gleicher Weise

$$\begin{aligned} S.r^{h+l-a}Q_1r^{a-1} &= S.r^{h+l-1}Q_1 \\ &= S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}(rQ - Qr) = \\ &= S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}rQ - S.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Qr \\ &= S.\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}r\}Q - S.\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Q\}r \\ &= S.\{rr^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}\}Q - S.r\{r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1}Q\} \end{aligned}$$

Die bei dem ersten Gliede angewandte Transformation ist erlaubt, weil

$$r^{h+l-1},\ (V.r^l)^{-1},\ r$$

complanare Quaternionen sind und das associative Princip bei der Multiplikation gültig ist. Es wird nun weiter

$$S.r^{h+l-a}Q_1 r^{a-1} = S.r^{h+l}(V.r^l)^{-1}Q - S.r^{h+l}(V.r^l)^{-1}Q = 0.$$

Die Gleichung ($f.$ 205) setzt uns in den Stand, indem wir für h zwei specielle Werte wählen, auf einfache Weise die Constanten x, y zu bestimmen. Dabei soll noch beachtet werden, dass die erste Seite jener Gleichung leicht vereinfacht werden kan. Man erhält nämlich durch den soeben erörterten analoge Transformationen

$$S.r^h Q = kS.r^h q^{k-1}dq = kS.r^{h+\frac{k-1}{k}l}dq$$

und wenn dieser Wert in ($f.$ 205) eingetragen wird

$$\frac{k}{l}\, S.r^{h+\frac{k-l}{k}l}\, dq = yS.r^{h+l-1} + xS.r^{h+l-1}(V.r^l)^{-1} \quad . \ (f.\ 206)$$

Setzt man hierin nun zuerst $h = 1 - l$, so wird erhalten

$$y = \frac{k}{l}\, S.r^{\frac{k-l}{k}}\, dq.$$

Die Einführung dieses Wertes in ($f.$ 206) ergibt

$$\frac{l}{k}\, xS.r^{h+l-1}\,(V.r^l)^{-1} = S.r^{h+\frac{k-l}{k}}\, dq - (S.r^{h+l-1})S.r^{\frac{k-l}{k}}\, dq$$

$$= S.r^{h+l-1}r^{\frac{k-l}{k}}\, dq - (S.r^{h+l-1})S.r^{\frac{k-l}{k}}\, dq$$

$$= S.(V.r^{h+l-1})\,(V.r^{\frac{k-l}{k}}\, dq).$$

Nehmen wir weiter an $h = 1$, so wird erhalten

$$\frac{l}{k}\, xS.r^l(V.r^l)^{-1} = S.(V.r^l)(V.r^{\frac{k-l}{k}}\, dq)$$

und die erste Seite dieser Gleichung wird vereinfacht zu $\frac{l}{k}\, x$, weil

$$S.r^l(V.r^l)^{-1} = S.(S.r^l + V.r^l)(V.r^l)^{-1} = (S.r^l)S(V.r^l)^{-1} + 1 = 1,$$

weil $(V.r^l)^{-1}$ ein Vektor ist.

Somit ist schlieszlich:

$$dr = \frac{k}{l}\, S.q^{\frac{k-l}{k}}\, dq + \frac{k}{l}(V.q^k)^{-1}S.(V.q^k)\,(V.q^{\frac{k-l}{k}}\, dq) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,(V.q^k)^{-1}(q^{\frac{k}{l}}Q - Qq^{\frac{k}{l}}) \ldots\ldots\ldots (f.\ 207)$$

178. Es ist uns schon mehrmals der Fall begegnet, dass in

dem aus einer Quaterniongleichung aufgelösten Werte des Unbekannten eine willkürliche Grösze, Skalar oder Vektor, sich vorfindet. Der unbekannte Quaternion ist sodann durch die gegebene Gleichung nicht völlig bestimmt.

Wie in Art. 147—151 dargetan ist, ereignet dies in allen den Fällen, wo die Grösze x der allgemeinen HAMILTONschen Methode verschwindet.

Wenn wir die allgemeine Lösungsmethode mittelst der Reduction auf die viergliedrige Grundform anwenden, so wird der Fall der Unbestimmtheit eintreten, wenn wir nicht vier Skalargleichungen zur Bestimmung der Gröszen w, x, y, z erhalten oder wenn dieselben nicht unabhängig von einander sind.

Wir wollen noch einige Beispiele hinzufügen.

Die Gleichung $Sq = a$ ergibt $q = a + \rho$, wo ρ ein willkürlicher Vektor ist.

$Tq = a$ ergibt $q = a\,Ur$, wo r ein willkürlicher Quaternion ist.

Aus $Vaq = \beta$ schlieszt man

$$aq = x + \beta, \quad q = a^{-1}(x + \beta),$$

weil Saq unbestimmt geblieben ist.

Aus $V.\alpha Vq = \beta$ erfolgt

$$Vq = \alpha^{-1}(x + \beta),$$

wie schon in (f. 74) gefunden; Sq kann noch willkürlich gewählt werden, somit wird

$$q = y + \alpha^{-1}(x + \beta)$$

die Lösung sein. Es kann der Gleichung nur genügt werden, wenn $S\alpha\beta = 0$.

179. Es sei zum Schlusse dieses Abschnittes die Lösung eines Systems simultaner linearen Quaterniongleichungen, dem man häufig begegnen wird, mitgeteilt. Es ist dieses System in (f. 208) enthalten

$$S\alpha\rho = a, \quad S\beta\rho = b, \quad S\gamma\rho = c \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (f.\,208)$$

Dass die Lösung in der Tat eindeutig sein musz, ergibt sich folgendermaszen: Wären ρ_1, ρ_2 zwei dem Systeme genügende Vektoren, so hätte man

$$S\alpha\rho_1 = a, \quad S\alpha\rho_2 = a, \quad \text{somit} \quad S\alpha(\rho_1 - \rho_2) = 0,$$

und in gleicher Weise

$$S\beta(\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad S\gamma(\rho_1 - \rho_2) = 0.$$

Es wäre daher der Vektor $\rho_1 - \rho_2$ senkrecht zu den drei Vektoren α, β, γ, was offenbar unmöglich ist. Somit soll $\rho_1 - \rho_2$ verschwinden, oder $\rho_2 = \rho_1$.

Aus den beiden letzteren der Gleichungen (f. 208) erfolgt

$$\gamma S\beta\rho - \beta S\beta\rho = b\gamma - c\beta$$

oder

$$V.\rho V\beta\gamma = b\gamma - c\beta \text{ nach } (e.\ 40)$$

In derselben Weise wird erhalten

$$V.\rho V\gamma\alpha = c\alpha - a\gamma$$
$$V.\rho V\alpha\beta = a\beta - b\alpha$$

somit

$$V.\rho(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta) = 0.$$

Es soll deshalb ρ dem Vektor

$$aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta$$

parallel sein, sodass man setzen kann

$$\rho = x(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta)$$

wenn x ein Skalar ist, dessen Wert wir näher bestimmen wollen. Es ist.

$$S.\alpha\rho = xS\alpha(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta)$$
$$= xaS.\alpha V\beta\gamma + xbS.\alpha V\gamma\alpha + xcS.\alpha V\alpha\beta$$

worin die letzteren beiden Glieder verschwinden. Somit ist

$$S.\alpha\rho = xaS\alpha\beta\gamma\,;$$

nach (f. 208) ist sodann aber auch

$$a = xaS\alpha\beta\gamma$$
$$x = \frac{1}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Die gesuchte Lösung des Systems ist daher schlieszlich

$$\rho = \frac{aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta}{S.\alpha\beta\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 209)$$

Wenn nicht drei Gleichungen von der hier benutzten Form gegeben sind sondern nur zwei, so ist der Vektor ρ dadurch nicht ganz bestimmt.

Es sei gefragt die allgemeinste Lösung des Systems

$$S\alpha\rho = a\,,\ S\beta\rho = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 210)$$

zu finden.

Mit Leichtigkeit lässt sich daraus folgern

$$S.(b\alpha - a\beta)\rho = 0.$$

Dem Vektor ρ, welcher hiernach senkrecht zu $b\alpha - a\beta$ erscheint, kann daher die Form erteilt werden

$$\rho = V(b\alpha - a\beta)\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 211)$$

wo γ ein willkürlicher Vektor ist.

Statt γ kann stets gesetzt werden

$$\gamma = u\alpha + v\beta + wV\alpha\beta$$

wo u, v, w willkürlich veränderliche Skalare bedeuten. Die Substitution dieses Wertes in ($f.$ 211) ergibt

$$\rho = (bv + au)V\alpha\beta + wV.(b\alpha - a\beta)V\alpha\beta.$$

Ersetzt man noch $bv + au$ durch einen neuen Skalar x und bestimmt man den Wert des Skalars w durch die Substitution des für ρ erhaltenen Ausdrucks in ($f.$ 210), so wird schlieszlich

$$\rho = xV\alpha\beta + V\frac{a\beta - b\alpha}{V\alpha\beta} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 212)$$

die allgemeinste Lösung jenes Gleichungssystems sein.

180. Die Ergebnisse des vorhergehenden Artikels gestatten noch eine wichtige Anwendung, die Auflösung der linearen Vektorgleichung nach einer neuen Methode, bei welcher einige bisher nicht erörterten Punkte der Theorie Erledigung finden.

Wenn gegeben ist

$$\phi\rho = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f.\ 213)$$

so leitet man hieraus unmittelbar die nachstehenden Beziehungen her

$$S.\lambda\phi\rho = S.\lambda\delta,\quad S.\mu\phi\rho = S\mu\delta,\quad S.\nu\phi\rho = S\nu\delta \quad \ldots \quad (f.\ 214)$$

wo λ, μ, ν drei willkürliche nicht complanare Vektoren bedeuten. Es ist sodann aber auch

$$S.\rho\phi'\lambda = S\lambda\delta,\quad S.\rho\phi'\mu = S\mu\delta,\quad S.\rho\phi'\nu = S\nu\delta \quad \ldots \quad (f.\ 215)$$

Wenn daher $\phi'\lambda$, $\phi'\mu$, $\phi'\nu$ nicht complanare Vektoren sind, so kann nach dem vorhergehenden Artikel hieraus geschlossen werden

$$\rho = \frac{S\lambda\delta.V\phi'\mu\phi'\nu + S\mu\delta.V\phi'\nu\phi'\lambda + S\nu\delta.V\phi'\lambda\phi'\mu}{S.\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu} \quad . \quad (f.\ 216)$$

Es ist hierbei zu bemerken, dass der gefundene Wert Invariantencharakter besitzt, wie man auf dem im Art. 144 verzeichneten Wege dartut.

Eine specielle Wahl der Vektoren λ, μ, ν kann der Lösung öfters eine einfache Gestalt erteilen. Als Beispiel wollen wir wieder die im Art. 154 schon gelöste Gleichung

$$V\alpha\rho\beta = \gamma$$

aufnehmen. Wählen wir auch hier für λ, μ, ν die Vektoren α, β, γ, so ist

$$\begin{aligned} V.\Phi'\mu\Phi'\nu &= \beta^2 V.\alpha V\alpha\gamma\beta \\ &= \beta^2 V.\alpha(\alpha\gamma\beta + S\alpha\beta\gamma) \\ &= \beta^2\alpha^2 V\gamma\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\beta\gamma \\ V.\Phi'\nu\Phi'\lambda &= \alpha^2 V.(V\alpha\gamma\beta)\beta \\ &= \alpha^2 V.(\alpha\gamma\beta + S\alpha\beta\gamma)\beta \\ &= \alpha^2\beta^2 V\alpha\gamma + \beta\alpha^2 S\alpha\beta\gamma \\ V.\Phi'\lambda\Phi'\mu &= -\alpha^2\beta^2 V\alpha\beta. \end{aligned}$$

Daher wird nach (*f.* 216)

$$\rho = \frac{(\alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma)S\alpha\beta\gamma - (S\alpha\gamma V\beta\gamma + S\beta\gamma V\gamma\alpha + \gamma^2 V\alpha\beta)}{S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma}$$

und dieser Wert geht mit Hülfe der Relation (*c.* 46), wenn man hierin ρ durch γ ersetzt, über in (*f.* 70).

Im allgemeinen kann keiner der Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ verschwinden. Denn wäre dies z. B. mit $\Phi'\lambda$ der Fall, so hätte man, wenn unter ρ ein willkürlicher Vektor verstanden wird,

$$S.\rho\Phi'\lambda = 0 \text{ oder } S.\lambda\Phi\rho = 0,$$

eine Gleichung, welche erfordert, dass für alle Werte von ρ der Vektor $\Phi\rho$ senkrecht zu λ, d. h. dass die lineare Vektorfunktion keine willkürliche ist.

Wenn jedoch $\Phi'\lambda$ verschwinden möchte, so wird nach der ersten der Gleichungen (*f.* 215) auch weiter $S\lambda\delta$ der Null gleich kommen und der in (*f.* 216) gefundene Wert für ρ wird unbestimmt.

Übrigens kann dieser Wert in dem allgemeinen Falle durch eine passende Wahl der Vektoren λ, μ, ν in eine neue Form geraten. Sind σ, τ zwei beliebige Vektoren, so setze man

$$\mu = V\delta\sigma\,, \quad \nu = V\delta\tau$$

Die Substitution dieser Werte in (*f.* 216) ergibt

$$\rho = \frac{S\lambda\delta\, V(\Phi' V\delta\sigma.\Phi' V\delta\tau)}{S.\Phi'\lambda(\Phi' V\delta\sigma)(\Phi' V\delta\tau)} \quad \ldots\ldots \quad (f.\ 217)$$

Diese Gleichung geht auch aus (*f.* 32), (*f.* 34) hervor, wenn man darin $V\lambda\mu$ durch δ, λ und μ durch zwei zu δ senkrechte Vektoren ersetzt und endlich noch ν in λ abändert.

181. Die Lösung ($f.$ 216) kann nicht mehr Anwendung finden, wenn die Relation

$$S.\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (f.\,218)$$

stattfindet. Es ist dies der schon in Art. 147—151 erörterte Fall, wo der Coefficient x, den wir im Art. 143 einführten, verschwindet.

Die Vektoren $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ sind in diesem Falle complanar. Man kann daher setzen

$$\Phi'\nu = a\Phi'\lambda + b\Phi'\mu$$

und die dritte der Gleichungen ($f.$ 215) musz deshalb aus den beiden andren hergeleitet werden können, sodass nur zwei unabhängige Relationen

$$S.\rho\Phi'\lambda = S\lambda\delta, \quad S.\rho\Phi'\mu = S\mu\delta. \;\ldots\ldots\; (f.\,219)$$

stattfinden.

Die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems, somit auch der linearen Vektorgleichung in dem betrachteten Falle, ist nach ($f.$ 212)

$$\rho = xV.\Phi'\lambda\Phi'\mu + V\frac{\Phi'\mu.S\lambda\delta - \Phi'\lambda.S\mu\delta}{V.\Phi'\lambda'\Phi'\mu} \;\ldots\; (f.\,220)$$

In diesem Falle kann der Umstand, dass einer der Vektoren $\Phi\lambda$, $\Phi'\mu$ verschwindet, eintreten und der für ρ angegebene Wert wird sodann unbestimmt. Wenn nämlich $\Phi'\lambda$ verschwindet, so erfordert dies nach ($f.$ 219), dass dasselbe mit $S\lambda\delta$ der Fall sei. Es muss somit λ senkrecht zu δ sein.

Bei der Wahl der Vektoren λ, μ werde dies wieder beachtet.

Wir wollen diese Resultate dazu verwenden die früher schon gelöste Gleichung

$$V\alpha\rho = \gamma$$

einer neuen Betrachtung zu unterwerfen. Die Gleichung erfordert

$$S\alpha\gamma = 0.$$

Für λ können wir nun nicht den Vektor α wählen, weil sodann $\Phi'\lambda$ verschwände. Lassen wir λ, μ ganz willkürlich, so ist nach ($f.$ 220)

$$\rho = xV.\,V\alpha\lambda\,V\alpha\mu - V\frac{S\lambda\gamma\,V\alpha\mu + S\mu\gamma\,V\lambda\alpha}{V.\,V\alpha\lambda\,V\alpha\mu}$$

$$= x\alpha S\alpha\mu\lambda - V\frac{\gamma S\alpha\mu\lambda + S\alpha\gamma\,V\lambda\mu}{\alpha S\alpha\mu\lambda}, \text{ nach (c. 44) (c. 46)}$$

$$= x\alpha^2 S\alpha\mu\lambda.\alpha^{-1} - V\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ weil } S\alpha\gamma = 0$$

$$= \alpha^{-1}(y + \gamma)$$

wie im Art. 154 gefunden ist.

182. Die erhaltenen Resultate setzen uns auch in den Stand die Gleichung

$$\Phi\pi = 0,$$

welcher wir im Art. 149 begegneten, allgemein zu lösen.

Wenn $\Phi'\lambda$, $\Phi'\mu$, $\Phi'\nu$ nicht complanar sind, so kann zu diesem Zwecke in ($f.$ 216) δ der Null gleich gesetzt werden, wodurch wir finden, dass auch π verschwindet.

Ist dagegen die Bedingung ($f.$ 218) erfüllt, so musz der Wert ($f.$ 220) Anwendung finden und die Annahme $\delta = 0$ ergibt

$$\pi = x V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$$

wo λ, μ willkürliche Vektoren bedeuten, welche jedoch nicht die Funktion Φ' der Null gleich machen [1]).

Wird z. B. die Lösung der Gleichung

$$V\alpha\pi\beta - \pi T\alpha\beta = 0$$

gesucht, bei welcher der Bedingung ($f.$ 218) genügt wird, so wählen wir für λ, μ die Vektoren α, β bzhw. Hierdurch wird

$$\Phi'\lambda = \alpha^2\beta - \alpha T\alpha\beta, \quad \Phi'\mu = \alpha\beta^2 - \beta T\alpha\beta,$$

$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = V.\alpha^2\beta^2(\alpha\beta + \beta\alpha) = 0.$$

Somit ist $\pi = 0$ die Lösung der vorgelegten Gleichung.

Schlieszlich sei noch die Lösung der Gleichung

$$\gamma_1 S\alpha_1\pi + \gamma_2 S\alpha_2\pi + \gamma_3 S\alpha_3\pi = 0$$

gefragt für den Fall, dass γ_1, γ_2, γ_3 complanar sind; es entspricht diese Bedingung der Forderung, dass der Coefficient x verschwindet.

---

1) Dieses Resultat hätte man auch in einer andren einfachen Weise erhalten können. Es wird die Lösung gesucht der Gleichung $\phi\rho = 0$ bei der Nebenbedingung

$$S.\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu = 0.$$

Aus letzerer schlieszt man

$$S.(V.\phi'\lambda\phi'\mu)\phi'\nu = 0 \text{ oder } S.\nu\phi(V.\phi'\lambda\phi'\mu) = 0 \text{ nach } (f.\ 29).$$

Diese Gleichung musz für jeden Wert von ν erfüllt werden, was offenbar nur möglich ist, wenn man hat

$$\phi(V.\phi'\lambda\phi'\mu) = 0.$$

Somit ist $xV.\phi'\lambda\phi'\mu$ die Lösung der Gleichung $\phi\rho = 0$. Es ist dies ein mit ($f.$ 52) ganz übereinstimmendes Resultat.

Hierbei ist

$$\Phi'\rho = \alpha_1 S\gamma_1\rho + \alpha_2 S\gamma_2\rho + \alpha_3 S\gamma_3\rho.$$

Nehme man für λ den Vektor $V\gamma_2\gamma_3$, so würde $\Phi'\lambda$ der Null gleich werden. Diese Wahl ist daher nicht gestattet.

Lässt man wieder λ, μ willkürlich, so wird leicht gefunden

$$V.\Phi'\lambda\Phi'\mu = -(V\alpha_2\alpha_3 S.V\gamma_2\gamma_3 V\lambda\mu + V\alpha_3\alpha_1 S.V\gamma_3\gamma_1 V\lambda\mu + \\ + V\alpha_1\alpha_2 S.V\gamma_1\gamma_2 V\lambda\mu).$$

Wählt man nun erst λ, μ derart, dass

$$V\lambda\mu = UV\gamma_2\gamma_3 = UV\gamma_3\gamma_1 = UV\gamma_1\gamma_2$$

und beachtet man, dass

$$S.V\gamma_3\gamma_3 UV\gamma_2\gamma_3 = S.TV\gamma_2\gamma_3(UV\gamma_2\gamma_3)^2 = -TV\gamma_2\gamma_3$$

so ergibt sich schlieszlich

$$\pi = x(TV\gamma_2\gamma_3 . V\alpha_2\alpha_3 + TV\gamma_3\gamma_1 . V\alpha_3\alpha_1 + TV\gamma_1\gamma_2 . V\alpha_1\alpha_2) \quad (f.\ 221)$$

als die gesuchte Lösung.

Hierbei ist angenommen, dass die in den Quaternionen $\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$ enthaltenen Drehungen den nämlichen Sinn haben.

183. Zum Schlusse sei noch die Lösung der linearen Vektorgleichung erörtert, wenn die lineare Vektorfunktion in der dreigliedrigen Grundform gegeben ist:

$$\gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho = \delta \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (f.\ 222)$$

Die Operation mit $S.\gamma_2\gamma_3$ an die beiden Seiten dieser Gleichung ergibt

$$S\alpha_1\rho = \frac{S\gamma_2\gamma_3\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}.$$

In gleicher Weise wird durch die Operation mit $S.\gamma_3\gamma_1$ und mit $S.\gamma_1\gamma_2$ erhalten

$$S\alpha_2\rho = \frac{S\gamma_3\gamma_1\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \quad S\alpha_3\rho = \frac{S\gamma_1\gamma_2\delta}{S\gamma_1\gamma_2\gamma_3};$$

nach ($f.$ 209) ist daher

$$\rho = \frac{S\gamma_2\gamma_3\delta V\alpha_2\alpha_3 + S\gamma_3\gamma_1\delta V\alpha_3\alpha_1 + S\gamma_1\gamma_2\delta V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}. \quad (f.\ 223)$$

Dieser Wert wird unbestimmt, falls γ_1, γ_2, γ_3 complanar sind, weil sodann auch δ, der Gleichung ($f.$ 222) zufolge, in der Ebene jener Vektoren enthalten sein musz.

In diesem Falle kann der Vektorfunktion eine einfachere Gestalt erteilt werden. Denn bestimmt man nun den Vektor

π aus (*f.* 221), so kann man von den drei willkürlichen Vektoren α_1, α_2, α_3 ein paar z. B. α_1, α_2 derart wählen, dass

$$V\alpha_1\alpha_2 = \pi$$

und dadurch musz γ_3, welcher durch die Gleichung (*f.* 87) definirt wird, verschwinden, sodass die lineare Vektorfunktion die Form annimmt

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho.$$

QUATERNIONGLEICHUNGEN DES ZWEITEN UND HÖHEREN GRADES.

184. Wir betrachten zuerst Quaterniongleichungen, welche nur complanare Quaternionen enthalten und deshalb rein algebraischer Form sind.

Die einfachste hierher gehörige Gleichung ist:

$$q^n = Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (g.\, 1)$$

wo Q ein bekannter, q der unbekannte Quaternion ist.

Indem von den beiden Seiten die $\frac{1}{n}$te Potenz genommen wird, wird die Lösung erhalten

$$q = Q^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{Q} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (g.\, 2)$$

Denn die Bedeutung dieser Symbole ist nach Art. 74—77 bekannt. Es ist nämlich

$$\sqrt[n]{Q} = (TQ)^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{1}{n} \angle Q\right) + \sin\left(\frac{1}{n} \angle Q\right) . UVQ \right] . \; . \; . \qquad (g.\, 3)$$

185. Der Begriff der Wurzel eines Quaternions kann jedoch verallgemeinert werden, und es steht diese Verallgemeinerung in Verbindung mit einer analogen bei dem Begriffe des Quaternions selbst.

Bisher nahmen wir nämlich an, der Winkel eines Quaternions sei zwischen 0 und π enthalten. In den nachfolgenden Artikeln wollen wir diese Voraussetzung fallen lassen, indem wir festsetzen, dass zwei Quaternionen einander gleich genannt werden, wenn dieselbe, bei derselben Achse und demselben

Tensor, Winkel haben, welche um ein Vielfaches der Grösze 2π verschieden sind. Wenn somit

$$q = Tq(\cos \angle q + \sin \angle q . UVq)$$

gesetzt wird, wo $\angle q$ zwischen 0 und π enthalten ist, so soll ebenfalls gelten

$$q = Tq[\cos(\angle q + 2k\pi) + \sin(\angle q + 2k\pi) UVq] \quad . \; . \; (g. 4)$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet.

Nach dieser Definition wird nun unmittelbar einleuchten, dass jede n^{te} Wurzel n gewöhnliche Quaternionwerte besitzt. Wenn man nämlich die Definition der n^{ten} Wurzel sich erinnert, welche durch die Gleichung (g. 3) ausgesprochen wird, so wird klar, dass allgemeiner nunmehr geschrieben werden musz

$$\sqrt[n]{Q} = Q^{\frac{1}{n}} = (TQ)^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\angle Q + 2k\pi}{n} + \sin \frac{\angle Q + 2k\pi}{n} UVQ \right] . \; . \; (g. 5)$$

wo k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... $n - 1$ erhalten kann, weil der Wert der Wurzel für $k = n$ mit derjenigen für $k = 0$ nach (g. 4) übereinstimmt.

Die neue Definion macht auch neue Namen notwendig. Nach Hamilton wollen wir als den Winkel eines Quaternions einfach den zwischen 0 und π enthaltenen Wert betrachten, und die Grösze $\angle Q + 2n\pi$, also jeden von dem Winkel um ein Vielfaches von 2π differirenden Winkel, die Amplitude des Quaternions nennen und mit $Am.q$ bezeichnen. Es gilt somit

$$Am.q = \angle q + 2k\pi, \; 0 < k < \infty \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (g. 5^*)$$

186. Als erstes Beispiel sei gewählt die Bestimmung der vier Werte der Wurzel

$$q = \sqrt[4]{-1 + i}.$$

Setzen wir

$$-1 + i = Q = w + xi + yj + zk,$$

so ist

$$w = -1, \; x = 1, \; y = z = 0.$$

Nach (b. 161), (b. 164), (b. 160) ist

$$TQ = \sqrt{2}, \; \cos \angle Q = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \text{ somit } \angle Q = \tfrac{3}{4}\pi, \; UVQ = i.$$

Die vier Werte sind daher enthalten in

$$q = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4} + \sin\frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

wenn der Reihe nach gesetzt wird: $k = 0, 1, 2, 3$.

Ein zweites Beispiel sei

$$\sqrt[6]{-\sqrt{3} + i + 2j + k}.$$

Setzen wir wieder

$$-\sqrt{3} + i + 2j + k = Q = w + xi + yj + zk,$$

somit

$$w = -\sqrt{3}, \quad x = z = 1, \quad y = 2,$$

so wird nach den vorher genannten Formeln

$$TQ = 3, \quad \cos \angle Q = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

somit

$$\angle Q = \pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad UVQ = \frac{i + 2j + k}{\sqrt{6}}$$

wo mit $arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}$ der spitze Winkel gemeint ist.

Daher sind die sechs reellen Werte der vorgelegten Wurzel enthalten in:

$$q = \sqrt[6]{3}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{i + 2j + k}{\sqrt{6}} \sin\frac{(2k+1)\pi - arc.\cos\frac{1}{\sqrt{3}}}{6}\right]$$

wenn der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ genommen wird.

187. Unsre nächsten Betrachtungen betreffen die allgemeinere Gleichung

$$q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_n = 0 \quad \ldots\ldots (g.\,6)$$

in der $q_1, q_2, \ldots q_n$ complanar vorausgesetzt werden. Es ist dies eine G l e i c h u n g a l g e b r a i s c h e r F o r m, indem die Coefficienten mit dem unbekannten Quaternion umgetauscht werden können.

Hamilton hat gezeigt, dass diese Gleichung stets n gewöhnliche Quaternionwurzeln hat und nicht mehr. Natürlich können einige dieser Wurzeln einander gleich werden, wenn die Coefficienten $q_1, q_2 \ldots q_n$ besonderen Bedingungen genügen.

Im Folgenden ist der HAMILTONsche Beweis der Hauptsache nach wiederholt.

Unser Zweck sei zunächst zu zeigen, dass eine Gleichung von der Form

$$q(q-q')(q-q'')\ldots.(q-q^{(n-1)})=Q\ldots\ldots (g.\,7)$$

stets wenigstens eine gewöhnliche Quaternionwurzel hat, wenn $q', q''\ldots.q^{(n-1)}$ gewöhnliche complanare Quaternionen sind.

Einige dieser Gröszen können auch verschwinden; wir setzen voraus, dass dies bei den $(m-1)$ letzteren, wo

$$1 \overline{\overline{<}}\, m < n-1,$$

der Fall sei. Es reducirt sich dadurch die Gleichung $(g.\,7)$ zur nachstehenden

$$q^m(q-q')(q-q'')\ldots.(q-q^{(n-m)})=Q\;\ldots (g.\,8)$$

Wir bestimmen weiter eine Grösze q_0 derart, dass

$$Q=q_0{}^m q'q''\ldots.q^{(n-m)}\ldots\ldots\ldots\ldots (g.\,9)$$

Dadurch kann man auch $(g.\,8)$ in die Gestalt, mit $(g.\,9)$ bezeichnet, bringen

$$\left(\frac{q}{q_0}\right)^m\left(\frac{q}{q'}-1\right)\left(\frac{q}{q''}-1\right)\ldots.\left(\frac{q}{q^{(n-m)}}-1\right)=1\;.\;(g.\,10)$$

Wenn λ irgend ein Vektor in der gemeinschaftlichen Ebene der Quaternionen ist, so sei

$$q\lambda=\rho\,,\;q_0\lambda=\alpha_0\,,\;q'\lambda=\alpha',\ldots.q^{(n-m)}\lambda=\alpha^{(n-m)}\,.\;(g.\,11)$$

gesetzt, wo ρ, α_0, $\alpha'\ldots.\alpha^{(n-m)}$ Vektoren bedeuten.

Wir denken dieselben aus einem Punkte O der Ebene gezogen und nennen

$$\rho=\mathrm{OP}\,,\;\alpha_0=\mathrm{OA}_0\,,\;\alpha'=\mathrm{OA}',\ldots.\alpha^{(n-m)}=\mathrm{OA}^{(n-m)}.$$

Die Gleichung $(g.\,10)$ wird mit diesen Voraussetsungen zur nachstehenden

$$\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m\left(\frac{\rho}{\alpha'}-1\right)\left(\frac{\rho}{\alpha''}-1\right)\ldots.\left(\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}-1\right)=1\;.\;(g.\,12)$$

oder

$$\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m\frac{\rho-\alpha'}{\alpha'}\,\frac{\rho-\alpha''}{\alpha''}\ldots.\frac{\rho-\alpha^{(n-m)}}{\alpha^{(n-m)}}=1\ldots (g.\,12^*)$$

und schlieszlich

$$\left(\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}_0}\right)^m\frac{\mathrm{A'P}}{\mathrm{OA'}}\,\frac{\mathrm{A''P}}{\mathrm{OA''}}\ldots.\frac{\mathrm{A}^{(n-m)}\mathrm{P}}{\mathrm{OA}^{(n-m)}}=1\ldots\ldots (g.\,13)$$

Die erste Seite der Gleichung $(g.\,12)$ setzt HAMILTON gleich

$\Phi(\rho)$. Es ist dies sodann ein Quaternion, dessen Wert der Gleichung zufolge die Einheit sein soll. Der Quaternion soll somit einen Vektor in seiner Ebene nicht ändern, somit soll $T\Phi(\rho) = 1$ und die durch den Quaternion bewirkte Drehung Null oder ein Vielfaches von 2π sein. Man erhält daher

$$T\Phi(\rho) = 1\,,\ am.\,\Phi(\rho) = 2p\pi\ \ldots\ldots\ldots \quad (g.\,14)$$

Es kommt nunmehr darauf an, die diesen Gleichungen genügenden Werte von ρ zu bestimmen.

Die Punkte A_0, A', ... $A^{(n-m)}$, O sind als gegebene zu betrachten. Ziehen wir weiter durch O eine willkürliche Gerade OQ, auf der ρ abgetragen werden soll und bestimmen wir, welcher Wert des Tensors des Vektors $\Phi(\rho)$ mit dem gewählten Werte von ρ übereinstimmt. Oder in anderen Worten: Wenn der Endpunkt P des Vektors ρ längs OQ sich bewegt, so fragen wir, welche die Änderungen sind, welche die Länge des Vektors $\Phi(\rho)$ erfährt, oder endlich mit den Bezeichnungen des Quaternionen-calculs: Wenn $U\rho$ constant, $T\rho$ veränderlich ist, welche ist sodann der zugehörige Wert von $T\Phi(\rho)$. Nach der Gleichung ($g.$ 12) kann man in Verbindung mit ($b.$ 47) ($b.$ 116) schlieszen

$$\begin{aligned} N\Phi(\rho) &= N\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m N\left(\frac{\rho}{\alpha'} - 1\right) N\left(\frac{\rho}{\alpha''} - 1\right) \ldots\, N\left(\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} - 1\right) \\ &= N\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m \left(N\frac{\rho}{\alpha'} + 1 - 2\,S\frac{\rho}{\alpha'}\right)\left(N\frac{\rho}{\alpha''} + 1 - 2\,S\frac{\rho}{\alpha''}\right)\Big(\ldots \\ &\qquad \ldots\Big)\left(N\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} + 1 - 2\,S\,\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}\right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} T\Phi(\rho) &= T\left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^m \left(\frac{T\rho^2}{T\alpha'^2} + 1 - 2\,\frac{T\rho}{T\alpha'}\cos\angle\frac{\rho}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}}\Big(\ldots \\ &\ldots\Big)\left(\frac{T\rho^2}{\{T\alpha^{(n-m)}\}^2} + 1 - 2\,\frac{T\rho}{T\alpha^{(n-m)}}\cos\angle\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (g.\,15) \end{aligned}$$

Welchen Wert wir nun auch für $U\rho$ angenommen haben mögen, stets wird für $T\rho = 0$ auch $T\Phi(\rho)$ verschwinden, für $T(\rho) = \infty$ auch $T\Phi(\rho)$ ins Unendliche wachsen, wenn nämlich die gegebenen Punkte sämtlich in endlicher Entfernungvon O liegen. Es musz somit auch für *jeden* Wert von $U\rho$ mindestens ein Wert von $T\rho$ gefunden werden können, welcher $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht. Diesen Wert von $T\rho$ — oder vielmehr, wenn mehrere Werte von $T\rho$ gefunden werden können, die $T\Phi(\rho)$ den Wert 1 erteilen, nur den kleinsten dieser Werte — denken wir auf jeden durch O gehenden Strahl OQ, welcher längs $U\rho$ fällt, abgetragen und indem wir die Endpunkte P der so erhaltenen Vektoren verbinden, entsteht eine Curve, welche *geschlossen* sein musz. Denn wenn wir in den oben gefundenen Wert für $T\Phi(\rho)$ der Einfachheit wegen

$$T\rho = r,\ T\alpha_0 = a_0,\ T\alpha' = a', \ldots.\ T\alpha^{(n-m)} = a^{(n-m)}$$

$$\angle\frac{\rho}{\alpha'} = \angle \mathrm{POA}', \angle\frac{\rho}{\alpha''} = \angle \mathrm{POA}'', \ldots. \angle\frac{\rho}{\alpha^{(n-m)}} = \angle \mathrm{POA}^{(n-m)}$$

setzen, so wird dieselbe

$$T\Phi(\rho) = \left(\frac{r}{a_0}\right)^m \left(\frac{r^2}{a'^2} + 1 - 2\frac{r}{a'}\cos\angle \mathrm{POA}'\right)^{\frac{1}{2}} \left(\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.\right)\left(\frac{r^2}{a^{(n-m)2}} + 1 - 2\frac{r}{a^{(n-m)}}\cos\angle \mathrm{POA}^{(n-m)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \ . \ (g.\ 16)$$

und es geht hieraus hervor:

1°. dass mit dem Werte von $U\rho$, d. h. mit dem Werte der Winkel POA′, POA″, ... der Wert von r, welcher $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht, sich ändern musz, sodass $T\rho$ als Funktion von $U\rho$ erscheint;

2°. dass wenn $am.U\rho$ mit 2π wächst, wodurch jeder der Winkel POA′, POA″, ... auch mit 2π wächst, $T\Phi(\rho)$ ungeändert bleibt. Derselbe Wert von $T\rho$, welcher bei einem bestimmten $U\rho$ die Grösze $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich machte, wird dasselbe somit bei einem $U\rho$ tun, dessen Amplitude um 2π von derjenigen des vorigen verschieden ist.

Aus dem letzteren Satze geht nun hervor, dass die durch den Endpunkt P beschriebene Curve eine geschlossene sein soll und nicht spiralartig verlaufen kann. Hamilton bezeichnet dieselbe daher als ein Oval. Die Curve musz weiter den Punkt O einschlieszen, denn weil $T\rho$ stets positiv ist, so wird auf jeden durch O gehenden Strahl *in der Richtung des Strahles* ein Punkt der Curve liegen.

Wir wollen die Curve oder das Oval in einem speciellen Falle näher untersuchen. Es sei nämlich die Gleichung ($g.$ **12**) eine quadratische in Bezug auf ρ, somit von der Form

$$\frac{\rho}{\alpha}\left(\frac{\rho}{\alpha'}-1\right)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\,17)$$

Die Gleichung ($g.$ 16) ergibt für diesen Fall

$$r^2[r^2+a'^2-2\,ra'\cos\angle\mathrm{POA'}]=a_0^2a'^2.$$

Setzt man noch

$$\angle\mathrm{POA'}=\theta,$$

so ist deshalb

$$r^2(r^2+a'^2-2\,ra'\cos\theta)=a_0^2a'^2 \quad \ldots\ldots \quad (g.\,18)$$

als die Gleichung des Ovals in Polarcoordinaten mit O als Pol und OA′ als polarer Achse zu betrachten, und es ist aus der analytischen Geometrie bekannt, dass diese Gleichung ein Cassinisches Oval darstellt.

In dem allgemeinen Falle gelten weiter die nachfolgenden Sätze:

1⁰. Jeder von O ausgehende Strahl trifft die Curve in einem einzigen Punkte.

2⁰. Die Curve kann keinen der Punkte A′, A″, ... $A^{(n-m)}$ enthalten.

Denn wenn in die Gleichung ($g.$ 16) z. B.

$$r=a',\ \angle\mathrm{POA'}=0,\ \angle\mathrm{POA''}=\angle\mathrm{A'OA''},\ldots.$$

gesetzt wird, so wird der Faktor der zweiten Seite dieser Gleichung:

$$\frac{r^2}{a'^2}+1-2\frac{r}{a'}\cos\angle\mathrm{POA'}$$

verschwinden, daher $T\Phi(\rho)$ der Null gleich werden, während nach unsrer Voraussetzung für jeden Punkt des Ovals $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich kommen musz.

Wir sind nun zu der Wissenschaft gelangt, dass $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich ist für jeden zu einem Punkte des Ovals gehörigen ρ. Es bleibt uns nur noch übrig zu zeigen, dass wenigstens für einen dieser Punkte $am.\ \Phi(\rho)=2p\pi$ werden musz. Zu diesem Zwecke denken wir, dass der Punkt P, der Endpunkt des Vektors ρ, dessen Tensorwert die Grösze $T\Phi(\rho)$ der Einheit gleich macht, das Oval entlang sich bewegt, sodass $am.\ \frac{\rho}{\alpha_0}$ oder $am.\ \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA_0}}$ mit 2π wächst.

Nach der Definition der m^{ten} Potenz eines Quaternions wächst sodann $am.\left(\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}_0}\right)^m$ mit $2m\pi$.

Bei $am.\ \frac{\mathrm{A'P}}{\mathrm{OA'}}$ (Formel g. 13) jedoch können zwei verscheidene Fälle eintreten. Wenn nämlich der Punkt A′ innerhalb des Ovals liegt (Fig. 63), so wird der Strahl A′P bei einem ganzen Umlaufe des Punktes P eine ganze Umdrehung 2π gemacht haben. Es ist somit in diesem Falle

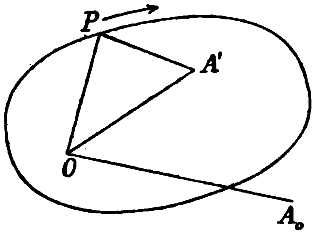


Fig. 63

$$am.\,(\mathrm{A'P} : \mathrm{OA'})$$

mit 2π gewachsen.

Wenn jedoch A′ auszerhalb des Ovals liegt, so wird der Strahl A′P, bei P anfangend, nach P_u (wenn $\mathrm{A'P}_u$ Tangente der Curve ist) sich drehen; sodann geht derselbe zurück bis nach $\mathrm{A'P}_i$ (die zweite Tangente der Curve aus A′), nachher bewegt sich A′P nochmals zurück nach $\mathrm{A'P}_u$, u. s. w.

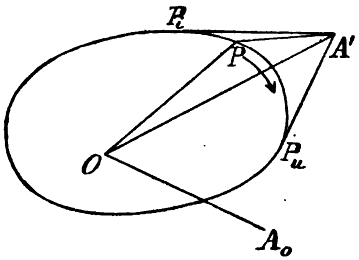


Fig. 64

Der Strahl A′P schwankt daher in diesem Falle hin und her; die Amplitude nimmt abwechselnd zu und ab. Nach einem Umlaufe des Punktes P hat daher die Amplitude des Quaternions A′P : OA′ den früheren Wert wieder erhalten.

Wenn t die Zahl der Punkte A′, A″, ... $\mathrm{A}^{(n-m)}$ ist, welche innerhalb des Ovals liegen, so ist nach dem Vorhergehenden $am.(\Phi)\rho$ bei einem Umlaufe des Punktes P mit $(m+t)\,2\pi$ zugenommen. Hierin ist Eins der kleinste Wert von m, Null von t. Somit wächst $am.(\Phi)\rho$ bei einem Umlaufe von P wenigstens mit 2π, und es soll daher auf dem Ovale wenigstens ein Punkt P liegen, fur den $am.\,(\Phi)\rho$ den Wert 2π erhält.

Wir haben nun hiermit gezeigt, dass es wenigstens einen reellen Vektor ρ gibt, welcher den beiden Gleichungen (g. 14) zugleich genügt. Dieser Vektor ρ wird auch der Gleichung (g. 12), und der reelle Quaternion $q = \rho : \lambda$ wird der Gleichung (g. 10) oder (g. 7) Genüge leisten, und hiermit ist der am Anfang dieses Artikels ausgesprochene Hülfssatz bewiesen.

188. Der allgemeinere in Art. 187 ausgesprochene Satz kann aus dem Vorigen leicht gefolgert werden.

Wie in der Algebra kann nämlich bewiesen werden, dass wenn q_0 eine Wurzel einer Gleichung der betrachteten Art ist, deren zweite Seite verschwindet, die erste Seite $q - q_1$ als Faktor enthalten musz. Wir können nun wie nachstehend weiter schreiten.

Die Gleichung

$$q(q + q_1) = - q_2 \text{ oder } q(q + q_1) + q_2 = 0$$

hat nach dem vorigen Artikel stets eine reelle Wurzel q_1'. Die erste Seite wird demnach $q - q_1'$ als Faktor enthalten und der zweite Faktor sei $q - q_2'$. Man kan daher setzen

$$q(q + q_1) + q_2 = (q - q_1')(q - q_2') \text{ . . . . . } (g. 19)$$

Die Gleichung

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3 = 0 \text{ oder } q\{q(q + q_1) + q_2\} = - q_3$$

oder endlich nach (g. 19)

$$q(q - q_1')(q - q_2') = - q_3$$

hat nach Art. 187 ebenfalls wenigstens eine reelle Wurzel q_1''. Indem $q - q_1''$ in

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3$$

dividirt wird, erhält man eine quadratische Funktion als Quotient, der nach dem Vorigen in zwei Faktoren $(q - q_2'')(q - q_3'')$ gespalten werden kann. Es ist somit

$$q\{q(q + q_1) + q_2\} + q_3 = (q - q_1'')(q - q_2'')(q - q_3'') \text{ . } (g. 20)$$

In dieser Weise fortgehend erkennt man, dass die Form

$$q[q\{q(\ldots\{q(q + q_1) + q_2\}\ldots) + q_{n-2}\} + q_{n-1}] + q_n$$

oder

$$q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_{n-2} q^2 + q_{n-1} q + q_n = F_n(q)$$

stets n reelle Quaternionfaktoren der Form $q - q_1^{(n)}$ enthält, und nicht mehr als n.

Die Gleichung (g. 6), welche entsteht, indem die Form $F_n(q)$

der Null gleich gesetzt wird, hat somit stets n reelle Wurzeln und nicht mehr als n, welche erhalten werden, indem jeder der n reellen Faktoren der Null gleich gesetzt wird.

189. Die Wurzeln der Gleichungen algebraischer Form mit complanaren Quaternionen können wie die Wurzeln gewöhnlicher Skalargleichungen höheren Grades bestimmt werden. Es sei z. B. die Gleichung

$$q^2 + q_1 q + q_2 = 0, \quad q_1 \parallel\!| q_2$$

vorgelegt mit der Aufgabe die beiden reellen, mit q_1, q_2 complanaren Wurzeln derselben zu bestimmen.

Die Gleichung lässt sich in die Form schreiben

$$\left(q + \frac{q_1}{2}\right)^2 + q_2 - \frac{q_1^2}{4} = 0$$

somit

$$q + \frac{q_1}{2} = \sqrt{\frac{q_1^2}{4} - q_2}$$

Die Wurzel der zweiten Seite dieser Gleichung hat zwei reelle Werte, welche nach Art. 185 bestimmt werden können. Hiermit ist das Problem gelöst.

190. Wir wollen weiter die vorher betrachtete Quaternionfunktion n^{ten} Grades

$$F_n(q) = q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \dots + q_n$$

in eine andre Form bringen.

Ersetzt man nämlich in derselben nach (b. 136)

$$q \text{ durch } x + yUVq., \quad q_1 \text{ durch } x_1 + y_1 UVq, \text{ u. s. w.}$$

so ersieht man leicht, dass $F_n(q)$ die Form $X + YUVq$ annehmen wird, wo X, Y Skalarfunktionen n^{ten} Grades in Bezug auf x, y sind. Die Gleichung (g. 6) oder $F_n(q) = 0$ ist somit identisch mit

$$X + YUVq = 0$$

oder mit dem System

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (g. 22)$$

Aus diesen beiden Gleichungen müssen x, y bestimmt werden. Es sind sodann

$$Tq\cos\angle q, \quad Tq\sin\angle q$$

bekannt; somit ist der ganze Quaternion q bekannt.

Die Elimination einer der beiden Gröszen x, y zwischen den

Gleichungen (g. 22) ergibt für die andere dieser Gröszen eine Gleichung vom Grade n^2, wie die Algebra lehrt. Es werden somit den Gleichungen (g. 22) n^2 Wertsysteme für die Gröszen x, y genügen, und hierdurch werden auch n^2 Werte des unbekannten Quaternions q gefunden, welche der Gleichung (g. 6) genügen.

Nach dem vorigen Artikel sind n dieser Wurzeln reell, somit müssen $n^2 - n$ konisch spaltende Quaternionwurzeln der Gleichung (g. 6) bestehen. Dasselbe wird somit auch von jeder Gleichung von der Form (g. 1), welche in (g. 6) als besonderer Fall enthalten ist, gelten.

Die n^{te} Wurzel eines Quaternions hat demnach n reelle und $n^2 - n$ complexe Quaternionwurzeln.

191. Wenn bei einer willkürlichen Quaterniongleichung Tq mittelst der Relation

$$Tq^2 = Sq^2 - Vq^2$$

Uq mittelst der Relation

$$Uq = \frac{q}{Tq}$$

und die Wurzeln durch Potenzirung eliminirt werden, so nennen wir den Grad der erhaltenen Gleichung auch den Grad der ursprünglich vorhandenen.

192. Wenn in diesem Sinne eine Quaterniongleichung n^{ten} Grades vorliegt, so kann man, indem jeder der darin sich vorfindenden Quaternionen durch die viergliedrige Grundform ersetzt wird, daraus vier Skalargleichungen n^{ten} Grades in den Unbekannten w, x, y, z erhalten. Die Elimination dreier der Unbekannten führt auf eine Skalargleichung vom Grade n^4. Es werden deshalb n^4 Wertsysteme der Gröszen w, x, y, z gefunden, somit auch n^4 Werte des unbekannten Quaternions. Es gilt daher der Satz:

Einer Quaterniongleichung n^{ten} Grades genügen n^4 Lösungen.

Selbstverständlich können darunter gewöhnliche und konisch spaltende Quaternionen sich vorfinden.

Bisweilen können die vier erhaltenen Skalargleichungen nicht ausreichen zur Bestimmung der Unbekannten. Es können sodann unendlich viele Lösungen der Gleichung gefunden werden. Dies ereignet sich z. B. bei der Gleichung

$$q^2 = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (g.\ 23)$$

oder

$$q = \sqrt{-1},$$

wodurch ausgesagt wird, dass q ein rechter Radial ist, dessen Ebene jedoch ganz unbestimmt bleibt.

Es wird aus dem Vorigen erhellen, dass die Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades ein sehr schwieriges Problem sein musz, weil dieselbe derjenigen einer Skalargleichung sechszehnten Grades gleich kommt. Wir wenden uns deshalb in den nächsten Artikeln der Auflösung einiger speciellen Gleichungen zu.

193. Von Hamilton ist eine allgemeine Auflösungsmethode der Gleichung

$$q^2 = qa + b \ldots\ldots\ldots\ldots (g.\ 24)$$

angegeben, die wir hier näher erörtern wollen.

Man setze

$$q = \tfrac{1}{2}(a + w + \rho) \ldots\ldots\ldots (g.\ 25)$$

wo w den Skalar-, ρ den Vektorteil des Quaternions $2q - a$ bedeutet.

Bei der Einführung dieses Wertes in die gegebene Gleichung wird erhalten:

$$\rho^2 + w^2 + 2w\rho + a\rho - \rho a - (a^2 + 4b) = 0 \ \ldots\ (g.\ 26)$$

Setzen wir weiter

$$Va = \alpha,\ S(a^2 + 4b) = c,\ V(a^2 + 4b) = 2\gamma \ \ldots\ (g.\ 27)$$

so sind die Gröszen c, α, γ als gegebene zu betrachten.

Weiter erhält man die Transformation

$$a\rho - \rho a = 2V\alpha\rho \text{ nach } (b.\ 152);$$

somit geht die Gleichung ($g.$ 26) über in die nachstehende

$$\rho^2 + w^2 - c + 2w\rho + 2V\alpha\rho - 2\gamma = 0 \ \ldots\ (g.\ 28)$$

und hierbei musz der Skalar- und auch der Vektorteil der ersten Seite verschwinden. Die ursprünglich gegebene Gleichung ist daher aequivalent mit dem Gleichungssystem

$$\rho^2 + w^2 = c,\ w\rho + V\alpha\rho = \gamma \ldots\ldots (g.\ 29)$$

Die zweite dieser Gleichungen, oder

$$V.(w + \alpha)\rho = \gamma \ldots\ldots\ldots (g.\ 30)$$

ist eine lineare Vektorgleichung. Aus derselben kann ρ mittelst einer der allgemeinen Methoden gelöst und der erhaltene Ausdruck nachher in die erste der Gleichungen (g. 29) substituirt werden behufs der Bestimmung des Skalars w. Auf kürzerem Wege jedoch kann man den Zweck, die Elimination des Vektors ρ, erreichen, indem man wie nachstehend verfährt.

Aus der Gleichung (g. 30) wird erhalten

$$S\alpha\gamma = S.\alpha V(w + \alpha)\rho = S.\alpha(w + \alpha)\rho = wS\alpha\rho$$

oder

$$S\alpha\rho = w^{-1}S\alpha\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 31)$$

Addirt man dieses Resultat zur zweiten der Gleichungen (g. 29), so ergibt sich

$$w\rho + \alpha\rho = \gamma + w^{-1}S\alpha\gamma$$

und hieraus

$$\rho = (w + \alpha)^{-1}(\gamma + w^{-1}S\alpha\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 32)$$

Demzufolge ist

$$\rho^2 = -N\rho = -\frac{N(\gamma + w^{-1}S\alpha\gamma)}{N(w + \alpha)} =$$

$$= -\frac{N\gamma + w^{-2}(S\alpha\gamma)^2}{N\alpha + w^2} = \frac{\gamma^2 - w^{-2}(S\alpha\gamma)^2}{w^2 - \alpha^2}.$$

Indem dieser Wert in die erste der Gleichungen (g. 29) eingesetzt wird, erhält man nach leichten Reduktionen

$$w^6 - w^4(c + \alpha^2) + w^2(c\alpha^2 + \gamma^2) - (S\alpha\gamma)^2 = 0 \quad . \quad (g.\ 33)$$

Es ist diese Gleichung als eine kubische Gleichung in Bezug auf w^2 zu betrachten; und es wird leicht bewiesen, dass die kubische Gleichung, besondere Fälle ausgenommen, stets eine positive und zwei negative Wurzeln hat.

Dass wenigstens eine der Wurzeln der kubischen Gleichung positiv ist, ergibt sich unmittelbar daraus, dass das constante Glied: $-(S\alpha\gamma)^2$, negativ ist. Dass die beiden anderen Wurzeln negativ sind, ist folgendermaszen zu ersehen.

Statt der Gleichung (g. 33) kann geschrieben werden:

$$(w^2 - \alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) + \alpha^2\gamma^2 - (S\alpha\gamma)^2 = 0$$

oder nach (c. 53)

$$(w^2 - \alpha^2)(w^4 - cw^2 + \gamma^2) - (V\alpha\gamma)^2 = 0 \quad \ldots \quad (g.\ 34)$$

Der Ausdruck

$$w^4 - cw^2 + \gamma^2$$

verschwindet für zwei Werte von w^2, deren eine positiv, deren andere negativ ist, weil γ^2 seiner Bedeutung nach negativ ist.

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$w^4 - cw^2 + \gamma^2 = 0$$

wollen wir daher mit

$$-p_1^2, +p_2^2$$

bezeichnen. Es wird nunmehr, wenn die erste Seite der Gleichung (g. 34) mit F bezeichnet wird:

Für $w^2 = -\infty$, $F = -\infty$, deshalb $F < 0$.
Für $w^2 = -p_1^2$, $F = -(V\alpha\gamma)^2 = NV\alpha\gamma$, somit $F > 0$.
Für $w^2 = 0$, $F = -(S\alpha\gamma)^2$, somit $F < 0$.
Für $w^2 = p_2^2$, $F = -(V\alpha\gamma)^2 = NV\alpha\gamma$, somit $F > 0$.

Die kubische Gleichung in w^2 hat somit drei Wurzeln w_1, w_2, w_3, derart dass

$$-\infty < w_1 < -p_1^2 < w_2 < 0 < w_3 < p_2^2.$$

Es sind deshalb zwei Wurzeln negativ und eine positiv. Dies gilt von den Werten der Grösze w^2. Man ersieht deshalb, dass im allgemeinen w ein positiver und ein negativer Wert, deren absolute Gröszen übereinstimmen, zukömmt und dass die vier anderen Werte imaginär sind. Für ρ und für $q = w + \rho$ werden demnach auch sechs Werte gefunden. Zwei der Werte des Quaternions q sind gewöhnliche Quaternionen, die vier übrigen dagegen konisch spaltende.

194. Ein Ausnahmefall besteht, wenn $S\alpha\gamma = 0$ oder wenn $\alpha \perp \gamma$.

Bei dieser Voraussetzung kann nämlich aus der Gleichung (g. 31) oder

$$w\, S\alpha\rho = S\alpha\gamma$$

geschlossen werden $w = 0$ oder $S\alpha\rho = 0$, und es lässt eine jede dieser Annahmen sich weiter verfolgen.

Wenn $w = 0$, so wird

$$\rho^2 = c \text{ und } V\alpha\rho = \gamma.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen wird nach (f. 74) erhalten

$$\rho = \alpha^{-1}(x + \gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 35)$$

wo x ein willkürlicher Skalar ist, dessen Wert sich jedoch in diesem Falle aus $\rho^2 = c$ bestimmen lässt. Denn es ist

$$\rho^2 = -N\rho = -\frac{N(x+\gamma)}{N\alpha} = -\frac{x^2 + N\gamma}{N\alpha} = \frac{x^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$$

und es ergibt sich somit die Gleichung

$$\frac{x^2 - \gamma^2}{\alpha^2} = c$$

woher

$$x = \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}.$$

In (g. 35) eingesetzt ergeben sich daher durch die Annahme $w = 0$ die beiden Werte von ρ

$$\rho = \alpha^{-1}\{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 36)$$

und hiermit

$$q = \tfrac{1}{2}[a + \alpha^{-1}\{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + c\alpha^2}\}] \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 37)$$

Wenn wir die zweite Annahme:

$$S\alpha\rho = 0,$$

weiter verfolgen, so können wir wie bei dem allgemeinen Falle fortschreiten und die Gleichung erhalten

$$w^4 - w^2(c + \alpha^2) + \gamma^2 + c\alpha^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 38)$$

welche aus (g. 33) hervorgeht, wenn man darin $S\alpha\gamma = 0$ setzt und das Resultat durch w^2 dividirt. Der Wert von ρ in diesem Falle wird nach (g. 32):

$$\rho = (w + \alpha)^{-1}\gamma \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 39)$$

In Betreff der Realität der Wurzeln dieser Gleichung, können drei Fälle unterschieden werden:

1°. $\gamma^2 + cx^2 > 0.$

Weil γ^2 und α^2 negativ sind, so erfordert diese Annahme zugleich $c < 0$. Es ist deshalb auch $c + \alpha^2$ negativ, und die beiden Wurzeln der Gleichung (g. 38) müssen somit negativ sein.

Aus (g. 37) erhält man in diesem Falle zwei gewöhnliche Quaternionwerte, aus (g. 38) vier konisch spaltende.

2°. $\gamma^2 + c\alpha^2 = 0,$

wobei auch gehört: c negativ. Es fällt die Gleichung (g. 38) nunmehr in

$$w^2 = 0, \ w^2 = c + \alpha^2$$

aus einander; der letztere Wert is negativ. Im Ganzen erhält man nun für q vier reelle Werte, nämlich viermal

$$q = \tfrac{1}{2}(a + \alpha^{-1}\gamma)$$

aus (g. 37) und weiter zwei complexe Werte.

3°. $\gamma^2 + c\alpha^2 < 0,$

wobei c positiv oder negativ sein kann; im letzteren Falle jedoch musz c grösser als $-\gamma^2 : \alpha^2$ sein.

Es wird demnach auch $c + \alpha^2$ positiv oder negativ sein können, und die Gleichung (g. 38) ergibt für w^2 stets eine positive und eine negative Wurzel. Somit sind zwei der Werte von w aus (g. 38) reell, zwei andre imaginär.

Zugleich werden die beiden Werte von q aus (g. 37) complex, sodass man zwei gewöhnliche und vier konisch spaltende Quaternionwurzeln erhält.

Fassen wir schlieszlich das Erörterte zusammen, so erhalten wir:

Die Gleichung $q^2 = qa + b$ hat, wenn a, b diplanare Quaternionen sind, stets zwei reelle und vier complexe Wurzeln, ausgenommen der Fall, wo

$$S.(a^2 + 4\,b)\,Va \text{ und } NV(a^2 + 4\,b) - 4\,S(a^2 + 4\,b)NVa$$

zugleich verschwinden.

Bei diesen Annahmen hat die Gleichung vier reelle und zwei complexe Quaternionwurzeln.

195. Es sei das Vorige durch die Auflösung der Gleichung

$$q^2 = mqi + nj \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 40)$$

erörtert. Es wird hiebei

$$a = mi, \quad b = nj, \quad \alpha = mi, \quad c = S(-m^2 + 4\,nj) = -m^2,$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,V(-m^2 + 4\,nj) = 2\,nj.$$

Somit ist

$$S.\alpha\gamma = S.2\,mnij = 2\,mnSk = 0$$

und wir haben es mit dem im vorigen Artikel erörterten Fall zu tun. Berechnen wir noch die Grösze $\gamma^2 + c\alpha^2$. Es ist

$$\gamma^2 + c\alpha^2 = -4\,n^2 + m^4$$

und es sind deshalb wieder drei Fälle zu unterscheiden

1°. $$m^4 > 4\,n^2.$$

Wir erhalten sodann für die zwei mit (g. 37) bezeichneten Lösungen

$$q = \tfrac{1}{2}\left[mi - \frac{i}{m}\{2\,nj \pm \sqrt{m^4 - 4n^2}\}\right] = \tfrac{1}{2}\left[m \mp \frac{1}{m}\sqrt{m^4 - 4n^2}\right]i - \frac{n}{m}\,k.$$

Die Gleichung (g. 38) geht weiter über in:

$$w^4 + 2\,w^2 m^2 + m^4 - 4n^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 41)$$

woraus

$$w^2 = -m^2 \pm 2n$$

sich folgern lässt. Setzen wir weiter voraus, m und n seien beide reelle Gröszen, so ist

$$m^2 - 2n > 0, \text{ wenn } n < 0.$$

Schreibt man jedoch

$$m^2 - 2n = \frac{m^4 - 4n^2}{m^2 + 2n},$$

so ersieht man hieraus, dass auch in dem Falle, wo

$$n > 0, \; m^2 - 2n$$

positiv sein musz.

In gleicher Weise ergibt sich, dass $m^2 + 2n$ stets positiv ist.

Somit sind die vier Werte

$$w = \pm \sqrt{-(m^2 \pm 2n)},$$

welche der Gleichung (g. 40) genügen, in diesem Falle stets imaginär, und die nach den Formeln (g. 39) (g. 25) berechneten Werte von q sind:

$$q = \tfrac{1}{2} m (i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \sqrt{m^2 - 2n} (1 + j)$$
$$q = \tfrac{1}{2} m (i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \sqrt{m^2 + 2n} (1 - j)$$

2°. $$m^4 = 4n^2.$$

Die vier gleichen Werte, welche q in diesem Falle hat, sind

$$q = \tfrac{1}{2} mi - \frac{n}{m} k.$$

Die beiden nicht verschwindenden Werte von w sind

$$w = \pm m \sqrt{-2}.$$

Hiermit findet man für q nach (g. 39) die beiden Quaternionen

$$q = \frac{m}{2} i + \frac{n}{m} k \pm \frac{m\sqrt{-2}}{2} \left(1 - \frac{2nj}{m^2}\right).$$

3°. $$m^4 < 4n^2.$$

Die beiden aus (g. 37) entstehenden Lösungen sind

$$\tfrac{1}{2} mi - \frac{n}{m} k \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1} \frac{\sqrt{4n^2 - m^4}}{m} i.$$

In Bezug auf die zwei für w^2 aus (g. 41) gefundenen Werte

$$w^2 = -m^2 \pm 2n,$$

lässt sich zeigen, dass

für $n > 0$, $-m^2 + 2n$ positiv, $-m^2 - 2n$ negativ;
für $n < 0$, $-m^2 + 2n$ negativ, $-m^2 - 2n$ positiv sind.

Unterscheiden wir daher zwei Fälle, so erhalten wir, wenn $n > 0$, nach (g. 39) die reellen Werte

$$q = \tfrac{1}{2} m (i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2n - m^2}\,(1 + j)$$

und die complexen Werte

$$q = \tfrac{1}{2} m (i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\,\sqrt{2n + m^2}\,(1 - j).$$

Schlieszlich sind diese Werte in dem Falle $n < 0$:

$$q = \tfrac{1}{2} m (i - k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-1}\,\sqrt{m^2 - 2n}\,(1 + j),$$
$$q = \tfrac{1}{2} m (i + k) \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-(m^2 + 2n)}\,(1 - j).$$

196. Eine zweite Methode die Gleichung (g. 24) oder

$$q^2 = qa + b$$

aufzulösen, besteht in der Reduktion der sämtlichen vorhandenen Quaternionen auf die viergliedrige Grundform. Man setze

$$\left.\begin{aligned} q &= w + xi + yj + zk, \\ a &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ b &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 42)$$

vereinige das Resultat dieser Substitution zu einem Ausdruck der Form

$$W + Xi + Yj + Zk = 0$$

und setze sodann

$$W = 0,\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0.$$

Man erhält in dieser Weise das nachstehende Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 x + a_2 y + a_3 z) = \tfrac{1}{4}(2w - a_0)^2 - \tfrac{1}{4} a_0^2 - b_0 \quad (g.\ 43)$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 y - a_2 z &= (2w - a_0)x - (b_1 + a_1 w) \\ a_1 z - a_3 x &= (2w - a_0)y - (b_2 + a_2 w) \\ a_2 x - a_1 y &= (2w - a_0)z - (b_3 + a_3 w) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 44)$$

Wir führen im weiteren die kurzen Bezeichnungen ein:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = P,\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = Q,\ x^2 + y^2 + z^2 = R \quad (g.\ 45)$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A,\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = B,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = C \quad (g.\ 46)$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (g. 44) der Reihe nach mit x, y, z und auch mit a_1, a_2, a_3 und addirt jedesmal die erhaltenen Produkte, so werden die beiden nachstehenden Relationen erhalten:

$$(2w - a_0)R = (Q + Pw),\ (2w - a_0)P = (C + Aw). \quad (g.\ 47)$$

Werden dieselben Gleichungen (g. 44) quadratirt und nachher die Resultate addirt, so ergibt sich

$$AR - P^2 = (2w - a_0)^2 R + (B + 2\,Cw + Aw^2) - \\ 2\,(2\,w - a_0)\,(Q + Pw) \quad \text{. . . . .} \quad (g.\,48)$$

Endlich lautet die Gleichung (g. 43) nach der Einführung der Gröszen P, R

$$R - P = \tfrac{1}{4}(2\,w - a_0)^2 - (\tfrac{1}{4}a_0^2 + b_0) \quad \text{. . . .} \quad (g.\,49)$$

Es lässt sich die Beziehung (g. 48) mit Hülfe der ersten der Gleichungen (g. 47) noch bedeutend vereinfachen. Man erhält

$$AR - P^2 = -(2\,w - a_0)^2 R + (B + 2\,Cw + Aw^2)\,. \quad (g.\,50)$$

Es sind nun in der zweiten der Gleichungen (g. 47), in (g. 49) (g. 50) drei Gleichungen vorhanden, zwischen denen P, R eliminirt werden können. Setzen wir vorher noch

$$2\,w - a_0 = u \quad \text{. . . . .} \quad (g.\,51)$$

und führen wir überall u statt w ein, so wird durch die Elimination erhalten

$$u^6 - u^4\,(a_0^2 + 4b_0 - 2A) - u^2\,[2a_0\,(2C + Aa_0) + \\ + 4B + 4Ab_0 - A^2] - (2C + Aa_0)^2 = 0 \quad . \quad (g.\,52)$$

Diese Gleichung ergibt sechs Werte für u; nach (g. 51) erhält man sodann auch sechs Werte für w und mittelst (g. 44) werden die zugehörigen Werte für x, y, z bestimmt.

Dieses Resultat stimmt somit ganz mit dem nach der Hamiltonschen Methode erhaltenen.

Die Diskussion der Realität der Wurzeln der Gleichung (g. 52) kann wie in Art. 193 stattfinden, indem man noch erwägt, dass dieselbe auch in die nachstehende Form geschrieben werden kann:

$$(u^2 + A)[u^4 + (A - a_0^2 - 4b_0)u^2 - (Aa_0^2 + 4a_0C + 4B)] + 4(AB - C^2) = 0,$$

während zugleich der Bedeutung nach

$$AB - C^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

und

$$Aa_0^2 + 4a_0C + 4B = \\ = \frac{A^2a_0^2 + 4a_0AC + 4AB}{A} = \frac{(Aa_0 + 2C)^2 + 4(AB - C^2)}{A}$$

woraus sich ergibt, dass die beiden ersten Seiten der letzteren Gleichungen wesentlich positiv sind.

Der in Art. 194 betrachtete Ausnahmefall tritt hier ein, wenn

$$Aa_0 + 2C = 0 \text{ und zugleich } 4B + 4Ab_0 - A^2 = 0.$$

Doch wollen wir nicht näher hierauf eingehen, weil wir dadurch nur schon Bekanntes wiederholen würden.

Es könnte sogar nicht schwer fallen die völlige Übereinstimmung der Gleichungen (g. 52) (g. 33) nachzuweisen. Man beachte dabei, dass, wenn wir die Schreibweise des Artikels 193 anwenden,

$$\alpha^2 = -NVa = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \text{ nach } (b. 158) = -A$$
$$a^2 + 4b = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 4b_0 + (2a_0a_1 + 4b_1)i + $$
$$+ 2(a_0a_2 + 4b_2)j + 2(a_0a_3 + 4b_3)k \text{ nach } (b. 170)$$

somit

$$c = S(a^2 + 4b) = a_0^2 + 4b_0 - A$$
$$4\gamma^2 = -NV(a^2 + 4b) = -4[(a_0a_1 + 2b_1)^2 + (a_0a_2 + 2b_2)^2 + $$
$$+ (a_0r_3 + 2b_3)^2]$$

oder

$$\gamma^2 = -(a_0^2A + 4a_0C + 4B) \text{ u. s. w.}$$

197. Wie die Gleichung (g. 24) kann auch die nachfolgende

$$q^2 = aq + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 53)$$

aufgelöst werden. Indem man nämlich setzt

$$q = \tfrac{1}{2}(a + w + \rho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 54)$$

erhält man hier das System der Gleichungen

$$\rho^2 + w^2 = c, \quad w\rho - V\alpha\rho = \gamma.$$

Die Elimination von ρ führt zu derselben Gleichung (g. 33) für w, und es wird weiter

$$\rho = (w - \alpha)^{-1}(\gamma - w^{-1}S\alpha\gamma) \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 55)$$

Ist eine Gleichung von der Form

$$q^2 = aq + qb + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 56)$$

vorgelegt, so transformire man dieselbe wie nachstehend

$$q^2 - aq - qb = c.$$
$$(q - a)^2 + qa - qb = a^2 + c.$$
$$(q - a)^2 + (q - a)(a - b) = a^2 - a(a - b) + c = ab + c.$$

Setzt man nunmehr

$$q - a = q', \; b - a = a', \; ab + c = b',$$

so ist die Gleichung (g. 56) übergegangen in

$$q'^2 = q'a' + b' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 57)$$

Zwei andere Gleichungen

$$qaq = qb + c, \; qaq = bq + c \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 58)$$

bieten auch keine Schierigkeiten. Denn man erhält, indem die erste *mit* a, die zweite *durch* a multiplicirt und

$$aq = q', \quad qa = q''$$

bzhw. gesetzt wird,

$$q'^2 = q'b + ac, \quad q''^2 = bq'' + ca \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 59)$$

Noch erwähnen wir

$$q^2 a = qb + c, \quad aq^2 = bq + c$$

als Gleichungen, welche auf eine der vorhergehenden zurückgeführt werden können.

198. Eine neue Klasse der quadratischen Gleichungen wird durch die nachstehende

$$aq^2 = 2qb + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 60)$$

dargestellt. Die Auflösung derselben kann, wie wir noch zeigen wollen, nach der in Art. 196 angewandten Methode stattfinden.

Setzen wir wieder

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \\ q &= w + xi + yj + zk, \\ b &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \\ c &= c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 61)$$

so führt die gegebene Gleichung zu dem mit (g. 62) (g. 63) bezeichneten System von Skalargleichungen, in welchem die Abkürzungen des Art. 196 angewandt sind:

$$a_0(w^2 - R) - 2b_0 w - c_0 = 2Pw - 2Q \quad \ldots \quad (g.\ 62)$$

$$\left.\begin{aligned} 2(b_3 + a_3 w)y - 2(b_2 + a_2 w)z &= a_1(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)x - (2b_1 w + c_1) \\ 2(b_1 + a_1 w)z - 2(b_3 + a_3 w)x &= a_2(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)y - (2b_2 w + c_2) \\ 2(b_2 + a_2 w)x - 2(b_1 + a_1 w)y &= a_3(w^2 - R) + \\ &\quad + 2(a_0 w - b_0)z - (2b_3 w + c_3) \end{aligned}\right\} \quad (g.\ 63)$$

Die drei letzteren Gleichungen geben zu drei anderen Anlass, indem dieselben nach einander zuerst mit x, y, z, sodann mit

$$b_1 + a_1 w, \quad b_2 + a_2 w, \quad b_3 + a_3 w,$$

multiplicirt und endlich auch quadratirt werden; während man jedesmal die drei erhaltenen Gleichungen addirt. Es entsteht in dieser Weise das Gleichungssystem

$$P(w^2 - R) + 2(a_0 w - b_0) R - (2Qw + S) = 0 \quad . \ . \quad (g.\ 64)$$

$$(C+Aw)(w^2-R)+2(a_0w-b_0)(Q+Pw)$$
$$-\{2Cw^2+(2B+D)w+E\}=0 \quad . \ . \ (g.\ 65)$$
$$4R(B+2Cw+Aw^2)-4(Q+Pw)^2=A(w^2-R)^2+$$
$$+4(a_0w-b_0)^2R+(F+4Ew+4Bw^2)+4(w^2-R)(a_0w-b_0)P-$$
$$-2(w^2-R)(2Cw+D)-4(a_0w-b)(2Qw+S) \ . \ . \ (g.\ 66)$$

worin noch die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} S&=c_1x+c_2y+c_3z, \\ D&=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3, \\ E&=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3, \\ F&=c_1^2+c_2^2+c_3^2, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (g.\ 67)$$

angewandt sind.

Wir haben somit in (g. 62) (g. 64) (g. 65) (g. 66) vier Gleichungen erhalten mit fünf unbekannten Gröszen w, P, Q, R, S. Es ist jedoch unschwer eine fünfte Relation zu finden. Aus den in Bezug auf x, y, z linearen Gleichungen:

$$a_1x+a_2y+a_3z=P, \quad b_1x+b_2y+b_3z=Q, \quad c_1x+c_1y+c_3z=S$$

können x, y, z leicht aufgelöst werden, und die erhaltenen Werte in

$$x^2+y^2+z^2=R$$

gesetzt, geben zur nachstehenden Gleichung Anlass

$$R\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=P^2A_1+Q^2B_1+S^2F_1+$$
$$+2QSE_1+2SPD_1+2PQC_1 \quad . \ . \ (g.\ 68)$$

wenn A_1, B_1,.... die Unterdeterminanten der Elemente A, B,.... der in der ersten Seite dieser Gleichung sich vorfindenden Determinante sind. Dieses Resultat wird leicht nach einiger Rechnung erhalten.

Zwischen den fünf Gleichungen (g. 62) (g. 64) (g. 65) (g. 66) (g. 68) müssen nun die Gröszen P, Q, R, S eliminirt werden um eine Gleichung in w zu erhalten.

Indem man (g. 64) mit (a_0w-b_0) multiplicirt und das Resultat von (g. 66) subtrahirt, wird die letztere Gleichung vereinfacht, und man erhält

$$4R(B+2Cw+Aw^2)-4(Q+Pw)^2=A(w^2-R)^2-4(a_0w-b_0)^2R-$$
$$-2(w^2-R)(2Cw+D)+F+4Ew+4Bw^2 \quad . \ . \ (g.\ 69)$$

Die beiden Gleichungen (g. 62) (g. 64) gestatten P, Q linear in R auszudrücken. Aus (g. 64) kann S als quadratische Funktion von R dargestellt werden.

Die Einführung dieser Werte in (g. 68) (g. 69) ergibt zwei Gleichungen in R, die eine zweiten, die andere vierten Grades, zwischen denen R nach bekannten Methoden eliminirt werden kann. Es ist demnach stets möglich eine Skalargleichung für w herzuleiten, doch sind die Resultate im allgemeinen zu umständlich um hier Platz finden zu können.

199. Eine einfache Gleichung jedoch möge nach der vorhergehenden Theorie aufgelöst werden. Es sei dazu gewählt

$$iq^2 = mqj + nk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g. 70)$$

wo m, n Zahlen bedeuten. Die Gleichungen, aus denen w, x, y, z nun bestimmt werden müssen, sind

$$\left.\begin{array}{c} mz = x^2 + y^2 + z^2 - w^2, \\ 2wx - my = 0, \; 2wz + wm = 0, \; 2wy - mx = n \end{array}\right\} . \quad (g. 71)$$

Die dritte dieser Gleichungen veranlasst die beiden nachfolgenden Voraussetzungen

1°. $$w = 0;$$

es wird sodann den übrigen Gleichungen (g. 71) zufolge

$$x = -\frac{n}{m}, \; y = 0, \; z^2 - mz + \frac{n^2}{m^2} = 0$$

oder

$$z = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{m^4 - 4n^2}.$$

Somit werden zwei reelle Werte für den unbekannten Quaternion gefunden

$$q = -\frac{n}{m} i + \left\{ \frac{m}{2} \pm \frac{\sqrt{m^4 - 4n^2}}{2m} \right\} k$$

2°. $$z = -\frac{m}{2}.$$

Mit Hülfe der übrigen der Gleichungen (g. 71) wird gefunden

$$x = \frac{mn}{4w^2 - m^2}, \; y = \frac{2wn}{4w^2 - m^2},$$

und zur Bestimmung des Skalars w die Gleichung sechsten Grades

$$(4w^2 - m^2)^3 - 2m^2(4w^2 - m^2)^2 - 4n^2(4w^2 - m^2) - 8m^2n^2 = 0,$$

in der $4w^2 - m^2$ als Unbekannte betrachtet werden kann. Setzt man

$$4w^2 - m^2 = 2\xi,$$

so gilt es nun die Zeichen der Wurzeln der Gleichung

$$\xi^3 - m^2\xi^2 - n^2\xi - m^2n^2 = 0$$

zu bestimmen. Setzen wir voraus, m und n seien reelle Zahlen, so ist das letzte Glied der ersten Seite negativ; somit hat die Gleichung stets eine positive Wurzel. Weil aber nur *ein* Zeichenwechsel darin vorkommt, so kann die Gleichung auch nicht mehr als *eine* positive Wurzel haben.

Schreibt man die erste Seite der Gleichung für ξ in die Form

$$\xi^2(\xi - m^2) - n^2(\xi + m^2)$$

so erkennt man leicht, dass diese Funktion für alle Werte zwischen $\xi = 0$ und $\xi = -m^2 : 2$ negative Werte haben musz und deshalb das Zeichen nicht wechseln kann. Es kann die Gleichung für ξ daher keine Wurzel zwischen jenen Grenzen haben.

Der Grösze $4n^2 - m^2$ kommt somit stets nur ein einziger positiver Wert zu und kein negativer, welcher zwischen 0 und $-m^2$ enthalten ist. Für w werden deshalb auch stets nur zwei reelle und weiter vier complexe Werte gefunden.

Dasselbe wird sodann aber auch von dem Quaternion q gelten.

200. Die in Art. 198 erörterte Auflösung der Gleichung

$$aq^2 = qb + c$$

macht auch andere Quaterniongleichungen der Behandlung zugängig.

Es seien von denselben nur genannt

1°. $$q^2 = aqb + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 72)$$

Denn man erhält hieraus

$$a^{-1}q^2 = qb + a^{-1}c,$$

eine Gleichung der Form $(g.\ 60)$

2°. $$qaq = bqc + d.$$

Denn man schlieszt hieraus zur nachstehenden

$$aqaq = aba^{-1}aqc + ad$$

oder

$$(aq)^2 = (aba^{-1})(aq)c + ad,$$

eine Gleichung der Form $(g.\ 72)$.

201. Zum Schlusse dieser Arbeit sei noch einiges über die Gleichung

$$q^3 = qa + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g\ 73)$$

mitgeteilt. Die Einführung der viergliedrigen Grundform ergibt das System der Gleichungen:

$$w(w^2 - 3R) = a_0 w + b_0 - P \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 74)$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 y - a_2 z &= (3w^2 - R - a_0)x - (b_1 + a_1 w) \\ a_1 z - a_3 x &= (3w^2 - R - a_0)y - (b_2 + a_2 w) \\ a_2 x - a_1 y &= (3w^2 - R - a_0)z - (b_3 + a_3 w) \end{aligned}\right\} \ldots \quad (g.\ 75)$$

wenn die Abkürzungen der vorigen Artikel beibehalten sind.

Nach der vorher angewandten Methode leitet man aus dem System (g. 75) die drei andren Gleichungen her:

$$(3w^2 - R - a_0)P - (C + Aw) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 76)$$

$$(3w^2 - R - a_0)R - (Q + Pw) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (g.\ 77)$$

$$AR - P^2 = (3w^2 - R - a_0)^2 R + (B + 2Cw + Aw^2) - \\ - 2(3w^2 - R - a_0)(Q + Pw)$$

deren letztere mit Hülfe der vorangehenden zur nachstehenden wird

$$AR - P^2 = B + 2Cw + Aw^2 - (3w^2 - R - a_0)^2 R \ . \ (g.\ 78)$$

Aus den Relationen (g. 74) (g. 76) (g. 78) können P, R leicht eliminirt werden, wodurch man eine Gleichung höheren Grades zur Bestimmung von w erhält, doch unterlassen wir die Mitteilung der ziemlich verwickelten Resultate.

Eine beträchtliche Vereinfachung tritt ein, wenn a ein Skalar, b ein Vektor ist. Denn man kann sodann in den vorigen Gleichungen setzen

$$b_0 = 0, \ P = 0, \ A = 0, \ C = 0.$$

Die Gleichung (g. 76) wird hiermit zu einer Identität, und (g. 74) (g. 78) gehen über in

$$\left.\begin{aligned} w(w^2 - 3R - a_0) &= 0 \\ B &= (3w^2 - R - a_0)^2 R \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (g.\ 79)$$

Zur Bestimmung der Grösze w wird somit erhalten $w = 0$, oder

$$(2w^2 - a_0)^2 (w^2 - a_0) = \tfrac{27}{16} B$$

eine Gleichung sechsten Grades, welche leicht diskutirt wird.

Der Fall, wo a ein Skalar, b ein willkürlicher Quaternion ist, obgleich weniger einfach als der vorige, kann jedoch auch leicht verfolgt werden.

ANHANG.

POTENZEN MIT QUATERNIONEXPONENTEN, LOGARITHMEN UND TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN DER QUATERNIONEN.

---

202. Um zur allgemeinen Potenz eines Quaternions mit Quaternionexponenten zu geraten, setzen wir fest, dass das Symbol e^q, wo e die gewöhnliche Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, wie in der Algebra nach aufsteigenden Potenzen von q entwickelt werden kann. Es ist somit durch diese Definition

$$e^q = 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} + \ldots . + \frac{q^m}{2 \ldots . m} + \ldots \ldots \quad (h.\ 1)$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass die beiden Seiten dieser Gleichung einen völlig bestimmten Quaternion darstellen, dass somit die zweite Seite einer bestimmten Grenze sich nähert.

203. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\left.\begin{aligned} F(q) &= 1 + q + \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{2.3} + \ldots . + \frac{q^m}{2 \ldots . m} + \ldots . \\ F_m(q) &= 1 + q + \frac{q^2}{2} + \ldots . \frac{q^m}{2 \ldots . m} \end{aligned}\right\} . \quad (h.\ 2)$$

sodass

$$F(q) = Lim.\ F_m(q), \text{ wenn } Lim.\ m = \infty.$$

Wir brauchen nur zu zeigen, dass

$$Lim.\ [F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0,$$

wenn $Lim.\ m = Lim.\ n = \infty$. Und dieses Resultat wird feststehen, sobald gezeigt ist, dass

$$Lim.\ T[F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (h.\ 3)$$

unter denselben Bedingungen stattfindet. Denn das Verschwinden des Tensors bedingt auch das Verschwinden des Quaternions.

204. Kehren wir zu der Gleichung ($b.$ 111) oder

$$N(q + q') = Nq + Nq' + 2TqTq'\cos\angle\frac{q}{q'}$$

zurück. Dieselbe lässt sich leicht umgestalten, wie nachstehend

$$T(q + q')^2 = (Tq - Tq')^2 + 2TqTq'\left(1 + \cos\angle\frac{q}{q'}\right)$$

$$= (Tq - Tq')^2 + 4TqTq'\cos^2\tfrac{1}{2}\angle\frac{q}{q'}.$$

Weil nunmehr stets die Ungleichheit stattfindet

$$0 < \cos^2\tfrac{1}{2}\angle\frac{q}{q'} < 1$$

so wird auch

$$Tq - Tq' < T(q + q') < Tq + Tq' \quad \ldots\ldots \quad (h.\ 4)$$

oder in Worten: der Tensor einer Summe von Quaternionen ist weniger als die Summe der Tensoren der einzelnen Glieder.

205. Wenn wir diese Ungleichheit anwenden, so ist

$$T[F_{m+n}(q) - F_m(q)] < F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq) \quad \ldots \quad (h.\ 5)$$

Wählen wir nun einen ganzen Wert m_1, welcher der Ungleichheit genügt

$$m_1 > 2Tq - 1$$

so findet man leicht

$$\frac{Tq}{m_1 + 1} < \tfrac{1}{2}, \frac{Tq}{m_1 + 2} < \tfrac{1}{2}, \ldots, \frac{Tq}{m} < \tfrac{1}{2}, \text{ wenn noch } m > m_1.$$

Deshalb kann auch gesetzt werden:

$$\frac{Tq^m}{2 \ldots m} = \frac{Tq}{m}\,\frac{Tq}{m-1}\,\frac{Tq}{m-2} \cdots \frac{Tq}{m_1 + 2}\,\frac{Tq}{m_1 + 1}\,\frac{Tq^{m_1}}{2 \ldots m_1}$$

$$< (\tfrac{1}{2})^{m-m_1}\frac{Tq^{m_1}}{2 \ldots m_1}.$$

Wenn nun m_1 einen endlichen Wert hat, wie stets möglich ist, so wird

$$\frac{Tq^{m_1}}{2\ldots m_1} = a$$

gesetzt werden können, wo a eine bestimmte endliche Zahl bedeutet.

Demnach wird stets, wenn $m > m_1$

$$\frac{Tq^m}{2\ldots m} < a\,(\tfrac{1}{2})^{m-m_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 6)$$

Nun ist aber weiter:

$$F^{m+n}(Tq) - F_m(Tq) =$$

$$= \frac{Tq^{m+n}}{2\ldots(m+n)} + \frac{Tq^{m+n-1}}{2\ldots(m+n-1)} + \ldots + \frac{Tq^{m+1}}{2\ldots(m+1)}$$

$$= \left[\frac{Tq}{m+n}\,\frac{Tq}{m+n-1}\cdots\frac{Tq}{m+1} + \ldots + \frac{Tq}{m+2}\,\frac{Tq}{m+1} + \frac{Tq}{m+1}\right]\frac{Tq^m}{2\ldots m}$$

$$< [(\tfrac{1}{2})^n + \ldots + (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}]\,\frac{Tq^m}{2\ldots m},$$

wenn stets $m > m_1$ vorausgesetzt wird. Die zwischen Klammern stehende Reihe ist aber, falls n endlich bleibt, kleiner als Eins, und für $Lim.\ n = \infty$ nähert die Reihe sich der Einheit. Zieht man noch ($h.$ 6) in Betracht, so wird somit stets die Ungleichheit gelten

$$F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq) < a\,(\tfrac{1}{2})^{m-m_1}.$$

Wenn nun m ins Unendliche wächst, so nähert die zweite Seite sich der Null; dasselbe soll somit mit der ersten stattfinden, weil diese auszerdem nicht negativ werden kann. Es wird deshalb

$$Lim.[F_{m+n}(Tq) - F_m(Tq)] = 0, \text{ wenn } Lim.m = \infty \text{ und } Lim.n = \infty \quad (h.\ 7)$$

Dann musz aber auch nach ($h.$ 5) die Gleichung stattfinden

$$Lim.\ T\,[F_{m+n}(q) - F_m(q)] = 0$$

womit unser Satz bewiesen ist.

206. Wir wollen nun weiter zeigen, dass allgemein

$$F(q)\,F(r) = F(q + r),$$

wenn q und r complanare Quaternionen bedeuten.

Betrachten wir zunächst die Funktion

$$P(q, r) = F_m(q)\,F_m(r) - F_m(q + r), \text{ wenn } q\,|||\,r. \quad . \quad . \quad (h.\ 8)$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned}
&F_m(q)\,F_m(r) = \\
&\left(1+q+\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{2.3}+\ldots+\frac{q^m}{2\ldots m}\right)\left(1+r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{2.3}+\ldots+\frac{r^m}{2\ldots m}\right) \\
&= 1+r+\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{2.3}+\ldots+\frac{r^m}{2\ldots m} \\
&\quad + q + qr + \frac{qr^2}{2}+\ldots+\frac{qr^{m-1}}{2\ldots(m-1)}+\frac{qr^m}{2\ldots m} \\
&\quad\quad + \frac{q^2}{2}+\frac{q^2r}{2}+\ldots+\frac{q^2r^{m-2}}{2.2\ldots(m-2)}+\frac{q^2r^{m-1}}{2.2\ldots(m-1)}+\frac{q^2r^m}{2.2\ldots m} \\
&\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot \\
&\qquad\qquad + \frac{q^m}{2\ldots m}+\frac{q^m r}{2\ldots m.2}+\ldots+\frac{q^m r^m}{2\ldots m.2\ldots m}
\end{aligned}\right\}(h.\,9)$$

Die ersten $m+1$ Columnen bilden die Funktion

$$F_m(q+r),$$

wie leicht ersichtlich, und es ist somit $P(q, r)$ gleich der Summe der Glieder der übrigen Columnen. Nach ($h.$ 4) ist sodann $TP(q, r)$ kleiner als die Summe der Tensoren dieser übrig bleibenden Glieder und diese Summe ist dem Ausdruck

$$F_m(Tq)\,F_m(Tr) - F_m(Tq+Tr)$$

gleich, wie unmittelbar einleuchtet, wenn man denselben hinschreibt.

Somit ist

$$TP(q, r) < F_m(Tq)F_m(Tr) - F_m(Tq+Tr)\,.\;.\;.\;(h.\,10)$$

Bilden wir noch die Funktion

$$F_{2m}(Tq+Tr)$$

oder

$$1+(Tq+Tr)+\frac{(Tq+Tr)^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{(Tq+Tr)^{2m}}{2\ldots\ldots 2m}$$

oder in andrer Schreibweise

$$\begin{aligned}
&1+Tr+\frac{Tr^2}{2}+\frac{Tr^3}{2.3}+\ldots\ldots+\frac{Tr^{2m}}{2\ldots 2m} \\
&+Tq+TqTr+\frac{TqTr^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{TqTr^{2m-1}}{2\ldots(2m-1)} \\
&\quad+\frac{Tq^2}{2}+\frac{Tq^2Tr}{\cdot 2}+\ldots\ldots+\frac{Tq^2Tr^{2m-2}}{2.2\ldots(2m-2)}
\end{aligned}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{Tq^{2m}}{2..\,.2m}$$

so erhellt unmittelbar, dass dieselbe alle Glieder der Funktion

$$F_m(Tq)\,F_m(Tr)\,,$$

— eines Ausdrucks, welcher aus ($h.$ 9) hervorgeht, wenn man darin q, r durch Tq, Tr ersetzt — enthält und auszerdem noch andere Glieder.

Somit ist

$$F_{2m}(Tq + Tr) > F_m(Tq)F_m(Tr)$$

und die Ungleichheit ($h.$ 10) ergibt a fortiori

$$TP(q, r) < F_{2m}(Tq + Tr) - F_m(Tq + Tr)$$

Nun musz aber nach ($h.$ 7) die Gleichung stattfinden

$$Lim.\, TP(q, r) = 0, \text{ oder } Lim.\, T[F_m(q)F_m(r) - F_m(q + r)] = 0 \quad (h.\ 11)$$

wenn $Lim.\, m = \infty$, und hierdurch auch

$$Lim.\, [F_m(q)\,F_m(r) - F_m(q + r)] = 0$$

oder

$$F(q)F(r) = F(q + r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 12)$$

Weil aber $F(q)$ mit e^q identisch ist, so erhalten wir somit den Satz

$$e^q e^r = e^{q+r}, \text{ falls } q \,|||\, r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 13)$$

207. Weil der Skalar- und der Vektorteil eines Quaternions stets als complanar betrachtet werden können, so erhalten wir weiter nach ($h.$ 13)

$$e^q = e^{Sq + Vq} = e^{Sq}\,e^{Vq} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 14)$$

Der Ausdruck e^{Sq} ist seiner Bedeutung ($h.$ 1) nach ein Skalar und aus der Algebra wissen wir, dass derselbe für alle Werte von Sq convergirt und einer positiven Zahl gleich kommt, welche gröszer oder kleiner als Eins ist, je nachdem Sq gröszer oder kleiner als die Null erscheint.

Der Ausdruck e^{Vq} kann leicht tranformirt werden

$$e^{Vq} = 1 + Vq + \frac{Vq^2}{2} + \frac{Vq^3}{2.3} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{(TVq)^2}{2} + \frac{(TVq)^4}{2.3.4} \cdots$$
$$+ UVq\left[TVq - \frac{(TVq)^3}{2.3} + \frac{(TVq)^5}{2.3.4.5} \cdots\right]$$

wenn noch beachtet wird, dass

$$(UVq)^2 = -1, \ (UVq)^4 = +1, \text{ u. s. w.}$$

Nach der Algebra kann dann weiter geschrieben werden

$$e^{Vq} = \cos TVq + UVq.\sin TVq \quad \ldots\ldots \quad (h.\ 15)$$

wo die Grösze des Winkels in der bekannten Weise gemessen ist durch die Länge des Bogens, von den Schenkeln des Winkels aus einem Einheitskreise ausgeschnitten.

In Verbindung mit der Gleichung (h. 14) erhalten wir schlieszlich

$$e^q = e^{Sq} (\cos TVq + \sin TVq.UVq) \quad \ldots\ldots \quad (h.\ 16)$$

und hieraus kann aufs neue erhellen, dass dem Symbol e^q ein bestimmter endlicher Wert zukommt. Man schlieszt weiter aus (h. 16)

$$T.e^q = e^{Sq}, \ S.e^q = e^{Sq} \cos TVq, \ V.e^q = e^{Sq} \sin TVq.UVq \quad . \quad (h.\ 17)$$

208. Nehmen wir die Gleichung (h. 15) wieder auf, und schreiben dieselbe

$$e^{TVq.UVq} = \cos TVq + \sin TVq.UVq$$

so kann dieselbe verallgemeinert werden. Es ist nämlich TVq ein willkürlicher Skalar, den wir somit durch x ersetzen können, und es wird dann

$$e^{xUVq} = \cos x + \sin x\, UVq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 18)$$

analog der bekannten algebraischen Formel

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x.\ \sqrt{-1}$$

Nehmen wir in (h. 18) speciell $x = \angle q$, so ist

$$e^{\angle q.UVq} = \cos \angle q + \sin \angle q.UVq = Uq \quad . \ . \quad (h.\ 19)$$

Wenn wir jedoch den Quaternion in dem in Art. 184 erörterten Sinne auffassten, so hätten wir allgemeiner schreiben können

$$e^{am.q.UVq} = \cos am.\ q + \sin am.\ q.UVq = Uq \ . \ . \quad (h.\ 20)$$

und hieraus geht hervor, dass die Funktion

$$Q = e^{am.q.UVq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 21)$$

eine periodische sein musz, indem dieselbe jedesmal denselben Wert erhält, wenn $am.q$ mit 2π wächst.

Es hat dies hierin seinen Grund, dass nach (h. 18)

$$e^{2\pi UVq} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h.\ 22)$$

sodass weiter nach (h. 13)

$$e^{(\angle q + 2\pi) UVq} = e^{\angle q.UVq} e^{2\pi UVq} = e^{\angle q.UVq}$$

Wenn $am. q$ mit π zunimmt, so ändert die Grösze Q das Zeichen, weil nach (h. 18)

$$e^{\pi UVq} = -1 \qquad (h. 23)$$

209. Die Gleichung (h. 20) wollen wir nun weiter benutzen den Logarithmus des Versors eines Quaternions zu definiren, wie nachstehend

$$log\, Uq = am\, q . UVq \qquad (h. 24)$$

Nehmen wir sodann noch an, dass auch die Gleichung

$$log\, q = log\, Tq + log\, Uq \qquad (h. 25)$$

gilt, so ist allgemein

$$log\, q = log\, Tq + am\, q . UVq \qquad (h. 26)$$

als die Definitionsgleichung des Quaternionlogarithmus zu betrachten. Dieselbe stimmt mit der bekannten Formel der Algebra für den allgemeinen Logarithmus einer Zahl überein. Denn, wenn q eine positive oder negative skalare Grösze ist, so ist die Ebene des Versors UVq unbestimmt und es musz somit diese Grösze durch $\sqrt{-1}$ ersetzt werden. Man erhält in dieser Weise, weil

für einen positiven Skalar $\angle q = 0$, $am. q = 2n\pi$,
und für einen negativen Skalar $\angle q = \pi$, $am. q = (2n+1)\pi$:

$$log\, x = lx + 2n\pi \sqrt{-1}, \text{ wenn } x > 0$$
$$log\, x = lx + (2n+1)\pi \sqrt{-1}, \text{ wenn } x < 0.$$

Es sind dies die bekannten algebraischen Formeln.

Die festgestellte Definition für $log\, q$ ergibt die Gleichung

$$e^{log\, q} = q \qquad (h. 27)$$

Denn es ist

$$e^{log\, q} = e^{log\, Tq + am\, q . UVq} = e^{log\, Tq}\, e^{am\, q . UVq} \text{ nach } (h. 13)$$
$$= Tq\, Uq \text{ nach } (h. 20) = q.$$

Es geht hieraus hervor, dass nur wenn $q \,|||\, r$, die Gleichung

$$log\, qr = log\, q + log\, r$$

stattfinden kann. Denn es ist sodann

$$qr = e^{log\, q}\, e^{log\, r} = e^{log\, q + log\, r} \text{ nach } (h. 13)$$

weil $log\, q$, $log\, r$ complanar sein müssen, sobald dasselbe bei q, r stattfindet.

210. Wir sind nun im Stande, allgemein q^r zu definiren. Es sei hierfür genommen

$$q^r = e^{r\, log\, q} \qquad (h. 28)$$

Es geht hieraus hervor, dass *nicht* stets

$$q^r q^s = q^{r+s}$$

sein kann. Denn es wird nur dann

$$q^r q^s = e^{r \log q}\, e^{s \log q} = e^{r \log q + s \log q} = e^{(r+s) \log q} = q^{r+s}$$

gültig sein, wenn $r \log q$, $s \log q$ complanare Quaternionen sind.

211. Den Sinus, Cosinus, Tangens eines Quaternions werden wir wie nachstehend erhalten

$$\left.\begin{aligned} 2 \sin q . U Vq &= e^{q\, UVq} - e^{-q\, UVq} \\ 2 \cos q &= e^{q\, UVq} + e^{-q\, UVq} \\ tg q . U Vq &= \frac{e^{q\, UVq} - e^{-q\, UVq}}{e^{q\, UVq} + e^{-q\, UVq}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (h.\ 29)$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass die beiden ersteren Gröszen stets convergiren. Mit Hülfe der Gleichung ($h.$ 1) und der Relation

$$(UVq)^2 = -1,\ (UVq)^4 = +1, \text{ u. s. w.}$$

beweist man leicht, dass auch die Gleichungen ($h.$ 30) gültig sind.

$$\left.\begin{aligned} \cos q &= 1 - \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{2.3.4} - \frac{q^6}{2.3.4.5.6} + \ldots \\ \sin q &= q - \frac{q^3}{2.3} + \frac{q^5}{2.3.4.5} - \ldots \end{aligned}\right\} \ldots \quad (h.\ 30)$$

wie in der Algebra.

Eine dritte Form für die Funktionen $\cos q$, $\sin q$ kann wie nachstehend hergeleitet werden.

Durch die Anwendung der Gleichung ($h.$ 16) erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cos q = e^{S.q\, UVq} \{\cos TV.q\, UVq + \sin TV(q\, UVq). UV(q\, UVq)\} \\ + e^{S.-q\, UVq} \{\cos TV.-q\, UVq + \sin TV(-q\, UVq). UV(-q\, VVq)\} \end{aligned}$$

Es ist jedoch

$$q\, UVq = (Sq + TVq. UVq) UVq = Sq. UVq - TVq$$

somit

$$S.q\, UVq = -TVq,\quad V.q\, UVq = Sq. UVq$$
$$TV.q\, UVq = \pm Sq,\quad UV.q\, UVq = \pm UVq$$

wo die oberen Zeichen gelten in dem Falle, wo

$$Sq > 0, \text{ oder } \angle q < \frac{\pi}{2},$$

die unteren, wenn

$$\angle q > \frac{\pi}{2}.$$

Die Einführung dieser Resultate in die erhaltene Gleichung ergibt für diese beiden Fälle

$$2\cos q = e^{-TVq}(\cos Sq + \sin Sq . UVq) + e^{TVq}(\cos Sq - \sin Sq . UVq)$$
$$= (e^{TVq} + e^{-TVq})\cos Sq - (e^{TVq} - e^{-TVq})\sin Sq . UVq$$
$$= 2\cos(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + 2\sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq$$

und zuletzt

$$\cos q = \cos(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + \sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq \quad (h.31)$$

In gleicher Weise wird erhalten

$$2\sin q\, UVq = e^{-TVq}(\cos Sq + \sin Sq . UVq) - e^{TVq}(\cos Sq - \sin Sq . UVq)$$
$$= -(e^{TVq} - e^{-TVq})\cos Sq + (e^{TVq} + e^{-TVq})\sin Sq . UVq$$
$$= 2\sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq + 2\cos(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq . UVq$$

und schlieszlich

$$\sin q = \cos(\sqrt{-1}\, TVq)\sin Sq - \sqrt{-1}\sin(\sqrt{-1}\, TVq)\cos Sq . UVq \quad (h.32)$$

BERICHTIGUNGEN.

Seite 14, Zeile 7 v. u. *lies:* denselben, *statt:* dasselbe.
» 15, » 17 v. o. *lies:* den, *statt:* das.
» 16, » 12 v. o. *lies:* der, *statt:* das.
» 39, » 20 v. o. *lies:* 67, *statt:* 71.
» 60, » 7 v. u. *lies:* Man sehe, *statt:* siehe.
» 72, » 6 v. u. *lies:* 69, *statt:* 67.

ANWENDUNG

DER

QUATERNIONEN

AUF DIE

GEOMETRIE.

ANWENDUNG

DER

QUATERNIONEN

AUF DIE

GEOMETRIE

VON

DR. P. MOLENBROEK.
Privatdocent der Mathematik an der Universität Leiden.

LEIDEN,
DRUCK UND VERLAG VON E. J. BRILL.
1893.

DRUCK VON E. J. BRILL IN LEIDEN.

VORWORT.

Die Veröffentlichung der »Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie", welche ich beim Erscheinen der Theorie innerhalb kurzer Zeit in Aussicht stellte, ist leider durch mehrere wissenschaftlichen und anderen Beschäftigungen verzögert worden. Ich hatte mir zunächst die Aufgabe gestellt, die Fruchtbarkeit jener Methode nach dem Vorgange des genialen Erfinders durch Anwendung auf verschiedene Gebiete der Geometrie nachzuweisen und bei der Bearbeitung erschien es mir am zweckmässigsten, wenn die Darstellung durchaus systematisch gehalten wurde. Es könnte vielleicht scheinen, dass mancherlei in den beiden ersten Abschnitten der Einfachheit wegen hätte unterdrückt werden können, doch wird sich bei einer eingehenderen Prüfung herausstellen, dass dadurch die Darstellung der folgenden Abschnitte nur gelitten hätte.

Bei der Wahl des Stoffes habe ich stets das Ziel vor Augen gehabt zu zeigen, dass auch die schwierigeren Probleme der Behandlung mittelst Quaternionen keine Hindernisse bieten, wenigstens in so weit, als überhaupt deren Lösung bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft möglich ist. Dazu war notwendig, die Mehrzahl der Gegenstände eingehender zu erörtern, als gewöhnlich in den Werken, welche demselben Ziel nachstreben, geschieht, ohne jedoch in eine Erschöpfung zu verfallen. Auch musste ich mir schon um nicht zu weitläufig zu werden, gewisse Schranken setzen. In wie weit es mir gelungen ist, der

Lösung dieser Aufgabe gerecht zu werden, wird sich nur mit der Zeit herausstellen können.

Die merkwürdige Eleganz der Methode tritt nur bei der Herleitung metrischer Relationen zu Tage. Natürlich finden auch die projektivischen Verhältnisse im Quaternionenkalkül ebenso gut ihren Platz wie in der gewöhnlichen Rechnungsmethode, doch können hierbei die gebräuchlichen HAMILTON'schen Symbole keine Anwendung finden.

In Bezug auf den Inhalt dieses Bandes erlaube ich mir noch Folgendes mitzuteilen. Bei weitem die Mehrzahl der in Betracht gezogenen Gegenstände wird man auch, und zwar ausführlicher, in HAMILTON's »Elemente" erörtert finden. Es ist mir jedoch gelungen durch Einführung zwei neuer Symbole d_0, D_0 die Theorie der Polaren beliebiger Ordnung eines Punktes in Bezug auf eine willkürliche Fläche der Behandlung mittelst Quaternionen zugängig zu machen, obgleich die Darstellung bei der JOACHIMSTHAL'schen an Einfachheit allerdings zurückbleibt. Doch erscheint manche diesbezügliche Aufgabe auch hier in einer sehr einfachen Form, wie z. B. die Aufstellung der Gleichung der HESSE'schen Fläche.

Im sechsten Abschnitte habe ich die Theorie der geradlinigen Strahlensysteme entwickelt und ich meine behaupten zu können, dass wol auf keinem Gebiete die Eleganz der Methode mehr hervortritt, als auf diesem, wie ein Vergleich mit der KUMMER'schen Darstellung desselben Gegenstandes (CRELLE's Journal, Bd. 57) unzweifelhaft dartun wird.

Zuletzt sei erwähnt, dass ich mich bemüht habe, die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung, soweit es innerhalb der gestellten Schranken möglich war, durchzuführen. Auf dieses Gebiet war, soviel mir bekannt, bis jetzt noch kaum der erste Schritt gesetzt. Denn die Notiz, welche Prof. TAIT in den Jahrgängen 1869—1870 der »Proceedings of the Royal

Society of Edinburgh" über diesen Gegenstand veröffentlicht hat, enthält nur den Keim einer Integrationsmethode für die partielle Differentialgleichung erster Ordnung. In der Tat kann das daselbst erörterte Verfahren nur in einem ganz seltenen Falle Anwendung finden, sogar nicht bei einem der von Prof. TAIT gewählten Beispiele. Es scheint diesem Autor nämlich entgangen zu sein, dass die Differentialgleichung der Kegelflächen überhaupt nicht mittelst eines Skalarfaktors integrabel gemacht werden kann. Im vorliegenden Werke wird man zwei Methoden finden um Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung erster und zweiter Ordnung zu erhalten.

Auch eine bekannte merkwürdige Transformation, welcher man in der gewöhnlichen Analyse bei partiellen Differentialgleichungen begegnet, wird in der Quaternionenrechnung zurückgefunden und erhält hier eine äusserst einfache Form, wie aus dem Artikel 107 einleuchten kann.

Hier könnte ich nun mein Buch seinem Wege überlassen, hätte ich nicht noch einige Bemerkungen, den ersten Teil meiner Arbeit, die Theorie der Quaternionen, betreffend, hinzuzufügen. Allerdings bin ich von der Unvollkommenheit, welche unzweifelhaft derselben anhaftet, überzeugt und ich erwähne hier dankbar, dass Prof. RAHUSEN die Güte hatte mich darauf hinzuweisen, dass im Art. 73 durch ein Versehen ein Satz, die Proportionen betreffend, fehlerhaft ausgesprochen ist; ein Umstand, welcher im Übrigen keinen Einfluss ausgeübt hat, weil jener Satz überhaupt nur Anwendung findet bei rechten Quaternionen, wo derselbe auch in der von mir mitgeteilten Gestalt gültig ist. Die Berichtigung wird man am Schlusse dieses Bandes finden; auch wird dieselbe von jetzt an dem theoretischen Teile hinzugefügt.

Doch ist meiner »Theorie" eine Kritik seitens der Zeitschrift »Philosophical Magazine" (Novemberheft 1891) zu Teil geworden, welche ich nicht ohne Weiteres vorübergehen möchte. Zwar ist dieselbe in solchen Worten abgefasst, dass wohl kaum Jemand na den wissenschaftlichen Ernst des Referenten glauben wird, doch will ich dasjenige herauswählen, was wenigstens einigermassen den Schein annimmt, ein Einwand wider meine Arbeit zu sein. Zu solchem kann ich die Bemerkungen über die Weitläufigkeit meiner Darstellung nicht zählen, zumal meine Meinung ist, dass bei einer Lehre, welche in so mancher Hinsicht von den üblichen Anschauungen abweicht, jede Frage einer sorgfältigen Prüfung unterzogen werden muss, wenn das Vertrauen des Studirenden auf die Richtigkeit der neuen Principien aufrecht bleiben soll. Übrigens wird dieser Punkt wol am besten mit der Zeit seitens des mathematischen Publikums ihre Erledigung finden.

Ebensowenig kann ich die Abwesenheit des Operators ∇ zu jenen Einwänden rechnen; im theoretischen Teile der Hamilton'schen »Elemente" findet man diesen Operator kaum erwähnt und Prof. Tait widmet demselben in seinem bekannten Buche, dessen hundert erste Seiten die Theorie enthalten, eine einzige Zeile. Im vorliegende Bande habe ich jenes Symbol an passender Stelle eingeführt, doch will ich schon jetzt bemerken, dass meines Erachtens, wie ich bald zeigen werde, der Wert desselben für die Anwendung auf die Physik sehr überschätzt wird.

Den meisten Anstoss jedoch scheint mein Bestreben gegeben zu haben, eine geometrische Deutung für die Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ zu finden. Ich wäre dadurch sogar in Widerspruch mit den von mir selbst mitgeteilten Definitionen geraten, doch wird wohl Niemand einer solchen Stelle begegnet sein, es sei denn der Referent, welcher einen derartigen Widerspruch in den von ihm in Cursivschrift abgedruckten Worten, dass ich einen imaginären *Skalarfaktor* als einen unbestimmten *rechtwinkligen Quaternion* betrachte, zu erblicken scheint. Ein derartiges Verfahren, die Skalargrössen als gewisse besondere Fälle der Quaternionen zu deuten, scheint ihm ganz unbekannt zu sein. Doch kann bemerkt werden, dass dieselbe Betrachtungsweise schon von HAMILTON auf die negativen Skalargrössen angewandt ist und sicherlich die einzig wahre Auffassung sein muss.

Wo übrigens der Referent behauptet, ich erteile dem Symbole $\sqrt{-1}$ das »glückliche aber bisher unerwartete" Vermögen, seine Achse senkrecht zu jedem beliebigen Vektor zu richten, — ein Vermögen, welches jedoch jeder positiven oder negativen Skalargrösse zukommen würde — zeigt er nur einen zu sehr oberflächlichen Blick in mein Buch geworfen zu haben, weil dieser Punkt im Artikel 107 specielle Erledigung gefunden hat, wo gerade das Gegenteil behauptet wird.

Die vollkommene Übereinstimmung der Resultate, welche durch meine Betrachtungen bezüglich der Biquaternionen erhalten worden sind mit denen, zu welchen Herr LAGUERRE schon vor längerer Zeit in der analytischen Geometrie geführt wurde — deren Zusammenhang ich in einer Abhandlung in »Nouvelles Annales de Mathématiques, 1891" nachgewiesen habe — ist wol der beste Beweis für die Zulässigkeit meiner Ansichten.

In den letzten Zeilen jener Kritik stellt sich aber erst deutlich heraus, dass mein eigentliches Verbrechen der Versuch ist, eine Lücke in den bewunderungswürdigen Arbeiten HAMILTON's auszufüllen. Wie gross auch die Verehrung sein mag, welche man der schöpferischen Kraft dieses englischen Mathematikers zuträgt, bei der Weise, worauf der Begriff der Biquaternionen in seine Werke eingeführt wird, kann man doch schwerlich Befriedigung finden. Der in jener Kritik aus HAMILTON's Werken citirte Satz, die imaginäre Skalargrösse betreffend, sagt eben nichts aus, wie einem jeden Unbefangenen unmittelbar klar sein wird.

Haag, im Februar 1893. P. MOLENBROEK.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER ABSCHNITT.

DEUTUNG EINIGER FORMELN. VERMISCHTE AUFGABEN AUS DER TRIGONOMETRIE UND DER GEOMETRIE.

ZWEITER ABSCHNITT.

DER PUNKT, DIE EBENE, DIE GERADE UND DIE KUGEL.

DRITTER ABSCHNITT.

DIE FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

VIERTER ABSCHNITT.

ALLGEMEINE THEORIE DER FLÄCHEN.

FÜNFTER ABSCHNITT.

ALLGEMEINE THEORIE DER CURVEN. KRÜMMUNG.

SECHSTER ABSCHNITT.

THEORIE DER GERADLINIGEN STRAHLENSYSTEME.

ANHANG.

DAS PRINCIP DER DUALITÄT.

DEUTUNG EINIGER FORMELN.

VERMISCHTE AUFGABEN AUS DER TRIGONOMETRIE UND DER GEOMETRIE.

---

1. Bevor wir systematisch die Anwendung der Quaternionen auf die Aufgaben der analytischen Geometrie auseinandersetzen, wollen wir in diesem Abschnitte einige schon in der Theorie gewonnenen Resultate näher betrachten und mehrere vermischten Aufgaben lösen.

Wegen der Deutung, welche wir den Vektoren und den Quaternionen beigelegt haben, lässt jede Formel sich geometrisch oder mechanisch deuten. Diesem Gegenstande mögen einige der nachfolgenden Artikel gewidmet werden.

2. 1°. Die Gleichung (*b*. 109) oder

$$S(q+q') = Sq + Sq' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A.\,1)$$

kann mit einem sphärischen Dreieck in Verbindung gesetzt werden. Es seien zu diesem Zwecke α, β, γ drei willkürliche Einheitsvektoren, welche auf der Einheitskugel O die Ecken eines sphärischen Dreiecks ABC bestimmen. Setzen wir nun

$$q = \frac{\beta}{\alpha},\ q' = \frac{\gamma}{\alpha},$$

so ist

$$q + q' = \frac{\beta+\gamma}{\alpha} = 2\,\frac{\mathrm{OM}}{\alpha},$$

wenn M die Mitte der Geraden BC ist. Somit wird

$$S(q+q') = 2\, T.\mathrm{OM} \cos \angle \mathrm{MOA} \text{ nach } (b.\,99)$$

$$= 2 \cos \frac{a}{2} \cos \mathrm{AD},$$

wenn D die Mitte ist des grössten Kreises BC und die Seiten des sphärischen Dreiecks mit a, b, c bezeichnet werden. Unsre Formel (A. 1) wird demnach

$$2 \cos \frac{a}{2} \cos \mathrm{AD} = \cos b + \cos c,$$

eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie.

2°. In derselben Weise kann die erste der Gleichungen (b. 149) gedeutet werden

$$S.qq' = Sq\, Sq' + S.\, Vq\, Vq' \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (\mathrm{A}.\,2)$$

Es sei zu diesem Zwecke mit der obigen Figur gesetzt

$$q = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}},\ q' = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}},\ \text{somit } qq' = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}.$$

Nun ist jedoch nach (b. 126)

$$Vq = Tq \sin \angle q . UVq = \sin a . UVq,$$

und nach (b. 99) wird nun (A. 2) die Gestalt annehmen

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c\ S.\, UVq\ UVq'.$$

Weil UVq als das zur Ebene des Quotienten q errichtete Lot betrachtet werden kann, so ist nach (c. 24) und Art. 28 der Theorie

$$S.\, UVq\ UVq' = \cos \mathrm{B}$$

daher

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \mathrm{B} \,. \,. \,. \,. \,. \quad (\mathrm{A}.\,3)$$

die Grundformel der sphärischen Dreiecke.

3°. Nach (c. 52) ist

$$S.\, V\alpha\beta\, V\gamma\delta = S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta \,. \,. \,. \,. \,. \,. \quad (\mathrm{A}.\,4)$$

Man hat es nun mit einem sphärischen Viereck ABCD zu tun. Setzt man wieder

$$S.\, V\alpha\beta\, V\gamma\delta = TV\alpha\beta\, TV\gamma\delta\ S.\, UV\alpha\beta\, UV\gamma\delta$$

$$= \sin \mathrm{AB} \sin \mathrm{CD} \cos \mathrm{E},$$

wenn E der Schnittpunkt der Bogen AB, CD ist, so geht (A. 4) über in die nachstehende Gleichung

$$\sin \mathrm{AB} \sin \mathrm{CD} \cos \mathrm{E} = \cos \mathrm{AD} \cos \mathrm{BC} - \cos \mathrm{AC} \cos \mathrm{BD},$$

eine Formel, welche leicht mittelst sphärischer Dreiecke bewiesen wird.

Ein specieller Fall der vorhergehenden Formel ist

$$S.\,V\alpha\beta\,V\beta\gamma = \beta^2 S\alpha\gamma - S\alpha\beta S\beta\gamma \;\ldots\ldots\; (\text{A. }5)$$
$$= -S\alpha\gamma - S\alpha\beta S\beta\gamma.$$

Man ersieht unmittelbar, dass diese Formel auf die Relation (A. 3) hinauskommt.

4°. Aus der Gleichung (c. 43) oder

$$V.\,V\alpha\beta\,V\gamma\delta = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta \;\ldots\ldots\; (\text{A. }6)$$

können ebenfalls mehrere anderen hergeleitet werden. Nehmen wir aber speciell an, δ sei gleich β, so wird

$$V.\,V\alpha\beta\,V\beta\gamma = -\beta S\alpha\beta\gamma,$$

daher, wenn mit T operirt wird, bei den obigen Voraussetzungen über α, β, γ

$$TV\alpha\beta\,TV\beta\gamma\;\;TV.\,UV\alpha\beta\,UV\beta\gamma = \pm S\alpha\beta\gamma,$$

wo das Zeichen stets so zu wählen ist, dass die zweite Seite der Gleichung positiv ist. Oder trigonometrisch

$$\sin c \sin a \sin \mathrm{B} = \pm S.\alpha V\beta\gamma = \pm TV\beta\gamma S.\alpha UV\beta\gamma$$
$$= \sin a \cos \mathrm{PA},$$

wenn P der Pol der Seite BC des Dreiecks ABC ist. Ist AD das Lot aus A auf die Seite BC gefällt, so wird hieraus erhalten

$$\sin c \sin \mathrm{B} = \sin \mathrm{AD}.$$

5°. Man ersieht unmittelbar die Richtigkeit der Gleichungen

$$S\beta\gamma + S\gamma\alpha + S\alpha\beta - 1 = S(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) = S(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) =$$
$$= S(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \;\ldots\ldots\ldots\; (\text{A. }7)$$

falls $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$.

Ist nun ABC wieder das durch α, β, γ bestimmte Dreieck und sind A′, B′, C′ die Mitten der Seiten BC, CA, AB, so ist

$$S(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) = T(\gamma+\alpha)\,T(\alpha+\beta) S.\,U(\gamma+\alpha) U(\alpha+\beta) \quad (\text{A. }8)$$
$$= -4 \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \cos \mathrm{B'C'}.$$

Daher kann auch statt (A. 7) geschrieben werden

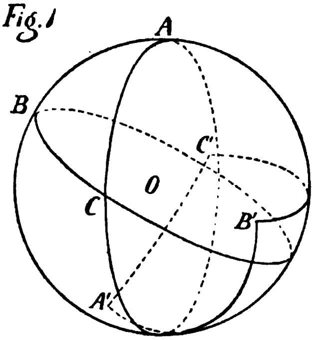
$$1 + \cos a + \cos b + \cos c = 4 \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos \mathrm{B'C'} = 4\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos \mathrm{C'A'},$$
$$= 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos \mathrm{A'B'}$$

oder

$$\cos \mathrm{B'C'} : \cos \mathrm{C'A'} : \cos \mathrm{A'B'} = \cos\frac{a}{2} : \cos\frac{b}{2} : \cos\frac{c}{2}.$$

3. In dem vorhergehenden Artikel haben wir einige Formeln der sphärischen Dreiecke aus speciellen Gleichungen erhalten. Es lässt sich jedoch zeigen, wie HAMILTON schon dargetan hat, dass es eine einzige Quaterniongleichung gibt, welche die gesamte sphärische Trigonometrie umfasst.

Fig. 1



Dieselbe zu erhalten sei in der Figur 1 auf der Einheitskugel ein sphärisches Dreieck ABC und dessen Polardreieck A′B′C′ gezeichnet. Lassen wir nun den Vektor OB′ durch eine Drehung um die zu ihm senkrechte Achse OA die neue Lage OC′ erhalten, nachher OC′ durch eine Drehung um OB in die Lage OA′ geraten, und führen wir endlich OA′ durch eine Drehung um OB nach OC′ zurück. Nun ist jedoch im Artikel 85 der Theorie gezeigt, dass ein willkürlicher Quaternion q stets auf die Form α^t gebracht werden kann, falls nur

$$Ax.q = \alpha,\ \angle q = t\frac{\pi}{2},\ Tq = T\alpha^t \text{ oder } T\alpha = Tq^{\frac{1}{t}}.$$

Setzen wir daher

$$q = \frac{\mathrm{OC}'}{\mathrm{OB}'},$$

so ist

$$Ax.q = \mathrm{OA} = \alpha,\ \angle q = \pi - \mathrm{A},\ Tq = 1,$$

somit

$$t = \frac{2}{\pi}(\pi - \mathrm{A})$$

und

$$q = \alpha^{\frac{2}{\pi}(\pi - \mathrm{A})} = \alpha^{2 - \frac{2\mathrm{A}}{\pi}} = -\alpha^{-\frac{2\mathrm{A}}{\pi}} \text{ nach } (b.\,197) \quad . \quad (\mathrm{A}.\,9)$$

In derselben Weise wird

$$\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OC}'} = -\beta^{-\frac{2\mathrm{B}}{\pi}},\quad \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}'} = -\gamma^{-\frac{2\mathrm{C}}{\pi}},$$

und durch Multiplikation mit (A. 9)

$$1 = \frac{OB'}{OA'}\,\frac{OA'}{OC'}\,\frac{OC'}{OB'} = -\gamma^{-\frac{2C}{\pi}}\,\beta^{-\frac{2B}{\pi}}\,\alpha^{-\frac{2A}{\pi}},$$

oder indem man die erhaltene Gleichung mit

$$\alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\beta^{\frac{2B}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}}$$

multiplicirt

$$\alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\beta^{\frac{2B}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A.\,10)$$

In dieser Gleichung ist augenscheinlich die im Art. 54 der Theorie bewiesene Formel

$$i\,j\,k = -1$$

als besonderer Fall enthalten; man hat nur vorauszusetzen, dass die Winkel A, B, C recht sind. Übrigens kann noch bemerkt werden, dass die Anordnung der Vektoren α, β, γ in der Formel (A. 10) durch die relative Lage der Punkte A, B, C auf der Kugel bestimmt wird. In der Figur sind diese Punkte so gewählt, dass bei den Vektoren OA, OB, OC die Bemerkung zutrifft, welche in Bezug auf OI, OJ, OK im Art. 54 der Theorie gemacht ist.

4. Allgemein wenn α, β, γ, $\delta \ldots \lambda$ die Punkte A, B, C, D ... L auf der Einheitskugel darstellen, derart dass ABCD...L ein concaves Vieleck bildet und $UV\alpha\beta$, $UV\beta\gamma, \ldots$ die Pole der Seiten AB, BC, ... sind, so kann man schreiben

$$\frac{UV\beta\gamma}{UV\alpha\beta} = -\beta^{-\frac{2B}{\pi}},\quad \frac{UV\gamma\delta}{UV\beta\gamma} = -\gamma^{-\frac{2C}{\pi}},\ \ldots \frac{UV\alpha\beta}{UV\lambda\alpha} = -\alpha^{-\frac{2A}{\pi}},$$

und die Multiplikation dieser Gleichungen ergibt

$$(-1)^n\,\lambda^{-\frac{2L}{\pi}}\ldots\gamma^{-\frac{2C}{\pi}}\,\beta^{-\frac{2B}{\pi}}\,\alpha^{-\frac{2A}{\pi}} = 1,$$

wenn n die Seitenzahl des Vielecks ist, und nach der obigen Transformation kann nun auch geschrieben werden

$$\alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\beta^{\frac{2B}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}}\ldots\lambda^{\frac{2L}{\pi}} = (-1)^n \quad \ldots\ldots \quad (A.\,11)$$

Es wird klar sein, dass eine cyclische Umtauschung der Faktoren der ersten Seite dieser Gleichung gestattet ist.

5. Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, dass die Formel (A. 10) in der Tat die bekannten Formeln des sphärischen

Dreiecks enthält. Dabei sei erinnert, dass nach (*c.* 24)

$$S\beta\gamma = -\cos a\,,\ S\gamma\alpha = -\cos b\,,\ S\alpha\beta = -\cos c \quad . \text{(A. 12)}$$

während nach (*c.* 9)

$$S.\alpha^{\frac{2A}{\pi}} = S\alpha^{-\frac{2A}{\pi}} = \cos A\,,\ V.\alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -V.\alpha^{-\frac{2A}{\pi}} = \alpha\sin A \quad . \text{(A. 13)}$$

Aus (A. 10) lässt sich schliessen

$$\beta^{\frac{2B}{\pi}}\gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -\alpha^{-\frac{2A}{\pi}}.$$

Wenn man nun an diese Gleichung mit S operirt und (*b.* 149) (A. 12) (A. 13) beachtet, so wird erhalten

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a.$$

Hätte man jedoch an dieselbe Gleichung mit V operirt, so wäre entstanden

$$V\beta\gamma\sin B\sin C = \alpha\sin A - \beta\sin B\cos C - \gamma\cos B\sin C.$$

Nun ist jedoch auch nach (*c.* 45)

$$V\beta\gamma S\alpha\beta\gamma = -\alpha N V\beta\gamma + \beta S.V\gamma\alpha V\beta\gamma + \gamma S.V\alpha\beta V\beta\gamma,$$

und die Vergleichung mit der vorhergehenden Gleichung ergibt

$$-\frac{S\alpha\beta\gamma}{\sin B\sin C} = \frac{NV\beta\gamma}{\sin A} = \frac{S.V\gamma\alpha V\beta\gamma}{\sin B\cos C} = \frac{S.V\alpha\beta V\beta\gamma}{\cos B\sin C}$$

und in Verbindung mit (*c.* 52), (A. 12)

$$\frac{\sin^2 a}{\sin A} = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin B\cos C} = \frac{\cos b - \cos a\cos c}{\cos B\sin C}.$$

Hätte man in derselben Weise mit dem Symbol V an die ebenfalls aus (A. 10) folgende Gleichung

$$\alpha^{\frac{2A}{\pi}}\beta^{\frac{2B}{\pi}} = -\gamma^{-\frac{2C}{\pi}}$$

operirt, so hätte man erhalten

$$\frac{\sin^2 c}{\sin C} = \frac{\cos b - \cos a\cos c}{\sin A\cos B} = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos A\sin B}$$

und schliesslich noch in analoger Weise

$$\frac{\sin^2 b}{\sin B} = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin C\cos A} = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\cos C\sin A}.$$

Die Verbindung dieser drei Gleichungssysteme führt uns sodann zu den Relationen

$$\frac{\cos a - \cos b\cos c}{\cos A} = \frac{\sin B\sin^2 c}{\sin C} = \frac{\sin C\sin^2 b}{\sin B}$$

daher auch

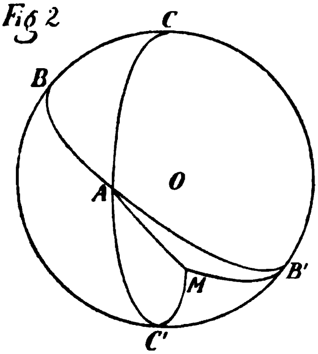
$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

und sodann

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos A} = \sin b \sin c.$$

6. Wir können auch mittelst Quaternionen einen sehr einfachen Ausdruck für den sphärischen Excess der Winkel eines Dreiecks bilden. Wenn nämlich in der Figur 2 wieder ABC das sphärische Dreieck darstellt und die Seiten BA, CA verlängert werden bis dieselben den grössten Kreis BC wieder in B′, C′ schneiden, so ist der sphaerische Excess des Dreiecks ABC

Fig 2



$$E = \pi - (\angle \mathrm{AB'C'} + \angle \mathrm{AC'B'} - \angle \mathrm{C'AB'}).$$

Es sei nun M der Mittelpunkt des um das Dreieck AB′C′ beschriebenen Kreises, so wird ersichtlich, dass

$$E = \pi - 2 \angle \mathrm{MC'B'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{A.}\ 14)$$

Es bleibt somit noch $\angle$ MC′B′ mittelst Quaternionen zu berechnen.

Weil die Punkte A, B′, C′ durch α, $-\beta$, $-\gamma$ dargestellt werden, so wird der Punkt M, dessen Vektor μ sei, bestimmt durch die Gleichungen

$$S\alpha\mu = -S\beta\mu = -S\gamma\mu,$$

deren Auflösung ergibt

$$\mu = UV(\alpha + \gamma)(\alpha + \beta).$$

Nun ist jedoch $\angle$ MC′B′ dem Winkel gleich zwischen den Ebenen OC′M, OC′B′, oder zwischen den zu diesen Ebenen gezogenen Senkrechten: $V\gamma\mu$ und $V\beta\gamma$; es ist daher

$$\angle \mathrm{MC'B'} = \angle \frac{V\gamma\mu}{V\beta\gamma} = \angle (V\gamma\mu\, V\gamma\beta)$$

und in Verbindung mit (A. 14)

$$E = \pi - 2 \angle (V\gamma\mu\, V\gamma\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{A.}\ 15)$$

Nun ist weiter

$$TV(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\,S.V\gamma\mu\,V\gamma\beta = S.\beta\,V(\gamma\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma)+$$
$$+\,S\beta\gamma S.\gamma\,V(\gamma\alpha+\alpha\beta-\beta\gamma)$$
$$=(1+S\beta\gamma)S\alpha\beta\gamma,$$
$$TV(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\,V.V\gamma\mu\,V\gamma\beta = \gamma S.\beta\gamma\,V(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$$
$$=\gamma(1+S\beta\gamma)(S\beta\gamma+S\gamma\alpha+S\alpha\beta-1)$$

daher

$$TV(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)\,.\,V\gamma\mu\,V\gamma\beta = (1+S\beta\gamma)\,[S\alpha\beta\gamma+$$
$$+\,\gamma S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-1)].$$

Weil aber $TV(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$ und $1+S\beta\gamma$ positive Skalare sind, so wird auch

$$\angle(V\gamma\mu.\,V\gamma\beta) = \angle[S\alpha\beta\gamma+\gamma S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-1)]. \quad . \ (A. 16)$$

Nun ergibt sich jedoch bei Ausführung der Multiplikation

$$(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) = (S+V)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)$$
$$=2S\alpha\beta\gamma+2\gamma(S\beta\gamma+S\gamma\alpha+S\alpha\beta-1) \quad (A.17)$$

somit in Verbindung mit (A. 16)

$$\angle(V\gamma\mu\,V\gamma\beta) = \angle(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma) \quad . \ . \ (A. 18)$$

Sind α', β', γ' die Vektoren der Mitten A′, B′, C′ der Seiten des Dreiecks, so ist

$$\gamma+\alpha = 2\,\beta' \cos\frac{b}{2},$$

und weil $\frac{b}{2}$ stets ein spitzer Winkel ist, schliesst man daher

$$\angle(V\gamma\mu\,V\gamma\beta) = \angle\,\beta'\gamma'\alpha'$$

und nach (A. 15) auch

$$E = \pi - 2\angle\,\beta'\gamma'\alpha' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (A. 19)$$

Natürlich können in dieser Formel die Grössen β', γ', α' eine cyclische Umtauschung erfahren.

7. In Verbindung mit einer Formel des Artikels 2 können nun aber noch weitere Schlüsse gezogen werden. Nach (*b*. 99) (*b*. 126) und den oben hergeleiteten Werten für die Skalar- und Vektorteile des Produktes $V\gamma\mu\,V\gamma\beta$ ist nämlich

$$tg\,\angle(V\gamma\mu\,V\gamma\beta) = \frac{S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-1}{S\alpha\beta\gamma}.$$

Nach (A. 15) ist daher

$$cotg\,\frac{E}{2} = \frac{S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-1)}{S\alpha\beta\gamma} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (A. 20)$$

und statt der Formel (A. 17) kann sodann auch geschrieben werden

$$(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)=2\,S\alpha\beta\gamma\left(1+\gamma\,cotg\,\frac{E}{2}\right)$$

und durch Operation mit dem Zeichen T

$$T(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)=-2\,S\alpha\beta\gamma\,cosec\,\frac{E}{2}\ . \quad (A.\,21)$$

Andrerseits folgt aber aus (A. 8) durch Multiplikation mit $T(\beta+\gamma)$ oder $2\cos\frac{a}{2}$

$$2\cos\frac{a}{2}\,S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-1)=-T(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\cos B'C'$$

und durch Multiplikation dieser Gleichung mit (A. 21) entsteht nun

$$\cos\frac{a}{2}\,S(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-1)=S\alpha\beta\gamma\,cosec\,\frac{E}{2}\cos B'C'$$

In Verbindung mit (A. 19) erhält man daher die bekannte Formel

$$\cos B'C'=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{E}{2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (A.\,22)$$

8. Die merkwürdige Formel (A. 19) für den sphärischen Excess kann noch leicht umgestaltet werden.

Man findet nämlich mit Hülfe der im Artikel 74 der Theorie entwickelten Begriffe, dass die nachfolgenden Formeln gültig sind

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\alpha}{\gamma'}=\frac{\gamma'}{\beta},\ \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\beta}{\alpha'}=\frac{\alpha'}{\gamma},\ \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\gamma}{\beta'}=\frac{\beta'}{\alpha}$$

daher

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\gamma'}{\beta}\,\frac{\beta}{\alpha'}=\frac{\gamma'}{\alpha'}=-\gamma'\alpha'$$

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}=-\alpha'\beta',\ \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}=-\beta'\gamma';$$

somit

$$\left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2=-(\beta'\gamma'\alpha')^2\ .\,.\,.\,.\,.\quad (A.\,23)$$

Die Gleichung

$$q^2=-q'^2$$

schliesst aber die nachfolgende ein

$$\angle q^2 = \pi - \angle q'^2$$

somit

$$\angle q = \frac{\pi}{2} - \angle q'.$$

Aus (A. 23) kann nun gefolgert werden

$$\angle \beta'\gamma'\alpha' = \frac{\pi}{2} - \angle \left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

und in Verbindung mit (A. 19) somit

$$E = 2 \angle \left[\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \ldots\ldots\ldots \text{(A. 24)}$$

9. Wir gehen jetzt wieder zur Deutung einer Quaternionengleichung

$$V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = V\beta\gamma + V\gamma\alpha + V\alpha\beta. \;.\;.\; \text{(A. 25)}$$

über. Man kann hierin überall das Symbol V durch $TV.UV$ ersetzen und α, β, γ als die Ecken der Grundfläche ABC eines Tetraeders betrachten, dessen Scheitel der Vektorenursprung D ist.

Sodann ist

$$\begin{aligned} V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) &= V(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \\ &= TV(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)UV(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \\ &= 2\triangle \mathrm{ABC}.UV(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

Die erste Seite der Gleichung (A. 25) ist somit ein Perpendikel aus D auf die Basis ABC gefällt, dessen Länge durch das Doppelte der Zahl der in der Fläche ABC enthaltenen Flächeneinheiten ausgedrückt wird.

In derselben Weise ist $V\beta\gamma$ ein Lot in D auf die Ebene DBC errichtet, dessen Länge der Grösse dieser Fläche proportional ist.

Wenn aber α, β, γ drei Vektoren sind, so ist

$$\tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$$

der Vektor des Schwerpunktes des von den Endpunkten jener Vektoren gebildeten Dreiecks, wie leicht dargetan wird. Es ist daher in (A. 25) der nachfolgende Satz enthalten:

Wenn man in dem Scheitel D eines Tetraeders ABCD nach derselben Seite hin Perpendikel DA′, DB′, DC′ zu den Seiten DBC, DCA, DAB errichtet und die Länge jener Perpendikel das c-fache der Flächenzahl dieser Seiten beträgt, so wird die Gerade, welche D mit dem Schwerpunkte des Dreiecks A′B′C′ verbindet, senkrecht zur Basis ABC des Tetraeders sein und ihre Länge wird dem $\frac{1}{3}c$-fachen der Flächenzahl dieser Basis gleich kommen.

10. Wir wollen hier nun weiter einige Aufgaben aus der Planimetrie folgen lassen, welche mittelst Quaternionen leicht bewiesen werden können. Es sind dieselben hauptsächlich der Aufgabensammlung entnommen, welche die mathematische Gesellschaft »Wiskundig Genootschap" in Amsterdam seinen Mitgliedern vorzulegen pflegt. Dabei wird es bisweilen vorkommen, dass Ergebnisse, welche erst später ausführlich erörtert werden, Anwendung finden; doch ist dies möglichst tunlich vermieden und allenfalls hoffe ich dort, wo ich ein solches Verfahren nicht umgehen konnte, die Deutlichkeit nicht dem Bestreben, viel Ungleichartiges in einen Abschnitt zu vereinigen, geopfert zu haben.

Zum Teile ist die Anwendung der Quaternionen auf diese Probleme von Herrn Mantel gezeigt.

Bevor wir zur Ausarbeitung einiger Probleme übergehen, mögen erst hier die Ausdrücke zusammengestellt werden, welche einige merkwürdigen Punkte des Dreiecks aus dessen Ecken zu finden gestatten.

Wenn α, β, γ die Vektoren der Ecken A, B, C sind und der Kürze halber

$$\beta - \gamma = \alpha_1,\ \gamma - \alpha = \beta_1,\ \alpha - \beta = \gamma_1$$
$$T(\beta - \gamma) = a,\ T(\gamma - \alpha) = b,\ T(\alpha - \beta) = c$$

gesetzt wird, so erhält man:

Für die Mitten der Seiten nach (a. 39)

$$\frac{\beta+\gamma}{2},\ \frac{\gamma+\alpha}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Für den Schwerpunkt nach (a. 39)

$$\zeta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Für den Mittelpunkt des um das Dreieck gehenden Kreises

$$\mu = \frac{2S\alpha\beta\gamma - (\beta^2-\gamma^2)\alpha - (\gamma^2-\alpha^2)\beta - (\alpha^2-\beta^2)\gamma}{2V(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}.$$

Dieser Punkt ist nämlich bestimmt durch die Gleichungen

$$(\mu-\alpha)^2=(\mu-\beta)^2=(\mu-\gamma)^2,$$
$$S(\mu-\alpha)(\mu-\beta)(\mu-\gamma)=0$$

oder

$$2S(\alpha-\beta)\mu=\alpha^2-\beta^2,$$
$$2S(\beta-\gamma)\mu=\beta^2-\gamma^2,$$
$$S\mu(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=S\alpha\beta\gamma,$$

welche nach Art. 179 der Theorie aufzulösen sind.

Für den Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises

$$\nu=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{2s}.$$

Der Punkt, wo die aus A gezogene Bisectrix BC schneidet, ist nämlich nach (*a*. 39)

$$\frac{b\beta+c\gamma}{b+c}$$

und ein willkürlicher Punkt dieser Bisectrix ist

$$\alpha(1-x)+x\frac{b\beta+c\gamma}{b+c},$$

welcher nun auch in der Geraden

$$V(\rho-\beta)\left(\frac{c\gamma+a\alpha}{c+a}-\beta\right)=0$$

enthalten sein muss.

Für die Mittelpunkte der dem Dreieck angeschriebenen Kreise findet man in gleicher Weise

$$\nu_1=\frac{b\beta+c\gamma-a\alpha}{2(s-a)},\quad \nu_2=\frac{c\gamma+a\alpha-b\beta}{2(s-b)},\quad \text{u. s. w.}$$

Für den Schnittpunkt der Symmedianen

$$\lambda=\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma}{a^2+b^2+c^2}$$

weil die Symmediane aus A die Seite BC in zwei Teile teilt, deren Verhältnis dem Quadrate des Verhältnisses der anliegenden Seiten gleich kommt.

Für den Höhenpunkt des Dreiecks

$$\mathfrak{z}=\frac{S\alpha\beta\gamma-\alpha S\alpha\alpha_1-\beta S\beta\beta_1-\gamma S\gamma\gamma_1}{V(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}.$$

Dieser Punkt wird nämlich aus den Gleichungen

$S(\rho-\alpha)\alpha_1=0, \quad S(\rho-\beta)\beta_1=0, \quad S(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)=0$
bestimmt.

Nun möge die Bearbeitung einiger Probleme folgen.

1°. Wenn zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten eines Vierecks gleich sind, so bilden dieselben gleiche Winkel mit der Verbindungslinie der Mitten der beiden andern Seiten des Vierecks.

Sind nämlich α, β, γ, δ die Ecken des Vierecks, so ist gegeben

$$T(\alpha-\beta)=T(\gamma-\delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(A. 26)}$$

Die Verbindungsgerade der Mitten M, N der Seiten BC, AD wird durch den Vektor

$$\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}$$

dargestellt. Es ist nun aber

$$\begin{aligned} S(\alpha-\beta)(\beta+\gamma-\alpha-\delta) &= -(\alpha-\beta)^2+S(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) \\ &= -(\gamma-\delta)^2+S(\alpha-\beta)(\gamma-\delta) \text{ nach (A.26)} \\ &= S(\delta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha-\delta) \end{aligned}$$

daher

$$S(\overline{AB}.\overline{MN})=S(\overline{DC}.\overline{MN})$$

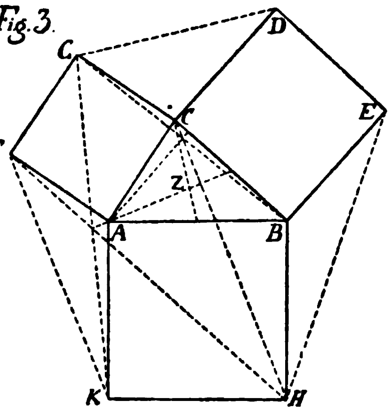
und weil

$$T.AB=T.DC$$

$$\angle(\overline{AB}.\overline{MN})=\angle(\overline{DC}.\overline{MN}).$$

2°. Wenn man auf den Seiten BC, CA, AB nach aussen Quadrate BCDE, CAFG, ABHK beschreibt, so lassen sich mehrere Eigenschaften beweisen, von denen hier einige angeführt werden mögen.

Fig. 3.



Dieselbe zu erörtern setzen wir nach willkürlicher Annahme des Ursprungs O

$$OA=\alpha, \; OB=\beta, \; OC=\gamma;$$

$$\beta-\gamma=\alpha_1, \; \gamma-\alpha=\beta_1, \; \alpha-\beta=\gamma_1,$$

sodass

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(A. 27)}$$

Ist noch ε ein rechtes Radial in der Ebene des Dreiecks, dessen Drehungsrichtung mit derjenigen des Quaternions BC : BA zusammenfällt, so sind für die übrigen Punkte der Figur 3 die Vektoren:

Für D: $\gamma - \varepsilon\alpha_1$, Für F: $\alpha - \varepsilon\beta_1$, Für H: $\beta - \varepsilon\gamma_1$,
» E: $\beta - \varepsilon\alpha_1$, » G: $\gamma - \varepsilon\beta_1$, » K: $\alpha - \varepsilon\gamma_1$.

Man erhält hieraus

$$DG = \varepsilon(\alpha_1 - \beta_1),\ HE = \varepsilon(\gamma_1 - \alpha_1),\ FK = \varepsilon(\beta_1 - \gamma_1)$$

oder wenn

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\zeta$$

gesetzt wird, sodass ζ der Vektor des Schwerpunktes Z des Dreiecks ist,

$$DG = 3\varepsilon(\zeta - \gamma),\ HE = 3\varepsilon(\zeta - \beta),\ FK = 3\varepsilon(\zeta - \alpha).$$

In Worten heisst dies: Die Verbindungsgeraden DG, HE, FK sind senkrecht zu den drei Mittellinien des Dreiecks und ihre Länge beträgt das Doppelte derjenigen dieser Mittellinien.

Die Gleichung der Geraden BG ist

$$V(\rho - \beta)(\alpha_1 + \varepsilon\beta_1) = 0 \text{ nach Art. 94 der Theorie.}$$

Ebenso ist CH durch

$$V(\rho - \gamma)(\alpha_1 - \varepsilon\gamma_1) = 0$$

und das Lot aus A auf BC gefällt durch

$$V(\rho - \alpha)\,\varepsilon\alpha_1 = 0$$

dargestellt. Addirt man diese Gleichungen, nachdem die erstere mit -1 multiplicirt ist, so wird identisch Null erhalten. Es gehen somit BG, CH und das Lot aus A auf BC gefällt durch einen Punkt.

Die Gleichungen der Geraden FH, KG sind:

$$V(\rho - \alpha + \varepsilon\beta_1)(\gamma_1 - \varepsilon\beta_1 + \varepsilon\gamma_1) = 0$$
$$V(\rho - \alpha + \varepsilon\gamma_1)(-\beta_1 + \varepsilon\beta_1 - \varepsilon\gamma_1) = 0$$

und die Mittellinie des Dreiecks aus A ist

$$V.(\rho - \alpha)(\beta_1 - \gamma_1) = 0.$$

Die Summirung dieser Gleichungen ergibt wieder eine Identität. Es stossen daher FH, KG und die Mittellinie aus A in einen Punkt zusammen.

3°. Auf den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach aussen Dreiecke A′BC, B′CA, C′AB beschrieben, welche gegebenen

Dreiecken ähnlich sind. Wenn die Ecken A′, B′, C′ gegeben sind, so wird gefordert ABC zu construiren.

Bezeichnen wir A, B, C mit α, β, γ und A′, B′, C′ mit ρ_1, ρ_2, ρ_3. Sind weiter q_1, q_2, q_3 Quaternionen, welche den gegebenen Dreiecken zu entnehmen sind, so kann man setzen

$$A'B = q_1 A'C, \quad B'C = q_2 B'A, \quad C'A = q_3 C'B$$

oder

$$\rho_1 - \beta = q_1(\rho_1 - \gamma), \quad \rho_2 - \gamma = q_2(\rho_2 - \alpha), \quad \rho_3 - \alpha = q_3(\rho_3 - \beta).$$

Indem man aus der zweiten dieser Gleichungen γ auflöst und durch Einsetzung dieses Wertes in die erste Gleichung β bestimmt, kann man durch Substitution in die dritte Gleichung α erhalten

$$(1 - q_3 q_1 q_2)\alpha = (1 - q_3)\rho_3 + q_3 q_1(1 - q_2)\rho_2 + q_3(1 - q_1)\rho_1$$

wodurch das Problem formell gelöst ist.

Behufs einer Construction schreiben wir die Auflösung in die Form

$$(1 - q_1 q_2 q_3)(\alpha - \rho_2) = \rho_3 - \rho_2 + q_3(\rho_1 - \rho_3) + q_3 q_1(\rho_2 - \rho_1)$$

oder

$$(1 - q_1 q_2 q_3)B'A = B'C' + q_3\, C'A' + q_3 q_1 A'B' \quad . \; . \; (A.\,28)$$

Weil qA′B′ mittelst eines einem der gegebenen Dreiecke ähnlichen Dreiecks construirt wird, so kommt die Construction des Punktes A hinaus auf die Construction einiger ähnlichen Dreiecke und Addition der erhaltenen Strecken.

Einige Fälle wollen wir noch specieller betrachten, nämlich erstens wenn die gegebenen Dreiecke gleichseitig sind. Es ist sodann

$$q_1 = q_2 = q_3 = q, \quad q^3 = -1, \text{ daher } q^2 = q - 1$$

zu setzen, sodass man erhält

$$2B'A = B'A' + B'C' - q\,B'C'$$

und die Construction des Punktes A aus den gegebenen Punkten A′B′C′ wird somit:

Man nehme die Mitte D der Seite A′C′; auf B′C′ beschreibe man ein gleichseitiges Dreieck B′EC′, so dass der Sinn der Drehung von B′C′ nach B′E mit derjenigen von A′B′ nach A′C′ übereinstimmt. Man verbinde die Mitte F von B′E mit D und ziehe einen Vektor B′A, welcher FD gleich kommt.

Es seien zweitens die gegebenen Dreiecke gleichschenklig und rechtwinklig. Wir setzen nun

$$q_1 = q_2 = q_3 = q\,,\; q^2 = -1$$

und die Formel (A. 28) ergibt

$$(1+q)\,\mathrm{B'A} = \mathrm{B'C'} - \mathrm{A'B'} + q\mathrm{C'A'}$$

woraus die nachstehende Construction folgt: Man errichte in der Mitte D der Geraden C'A' ein Lot nach der Seite hin, wo B' liegt und bestimme hierauf DE = DA'. Nun wird B'E die Hälfte der zweiten Seite der letzten Gleichung darstellen. Auf B'E errichte man in E ein Perpendikel, dessen Länge gleich derjenigen von B'E genommen werde, so ist der Endpunkt die Ecke A. Die Drehung von B'A nach B'E soll mit derjenigen von A'B' nach A'C' übereinstimmen.

Man kann jedoch auch leicht eine zweite Construction finden, indem erst die obige Gleichung transformirt wird. Man leitet daraus nämlich die Relation her

$$(1+q)\,\mathrm{A'A} = (1-q)\,\mathrm{B'C'}$$

oder

$$\mathrm{A'A} = q\,\mathrm{C'B'}.$$

Somit ist A'A senkrecht zu C'B' und diese beiden Geraden haben gleiche Länge.

4⁰. Eine ähnliche Aufgabe ist die nachfolgende: Auf den Seiten eines Dreiecks ABC beschreibt man nach aussen Dreiecke A'BC, AB'C, ABC' welche einem gegebenen Dreieck *abc* ähnlich sind. ABC werde aus A', B', C' bestimmt.

In diesem Falle setzen wir den Voraussetzungen gemäss

$$\rho_1 - \gamma = q(\rho_1 - \beta)\,,\quad \gamma - \alpha = q(\rho_2 - \alpha)\,,\quad \rho_3 - \alpha = q(\beta - \alpha)$$

und eliminiren β, γ durch Addition, wodurch wir erhalten

$$\rho_1 + \rho_3 - 2\alpha = q(\rho_1 + \rho_2 - 2\alpha).$$

Sind M, N die Mitten der Seiten C'A', A'B', so ist

$$\mathrm{AM} = q\mathrm{AN}.$$

Man beschreibe daher ein Dreieck MNA, welches dem Dreieck *cba* ähnlich ist.

5⁰. Aus den Mitten der Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC ziehe man Geraden, welche anderen gegebenen Geraden AS, BS, CS parallel sind. Es wird gefordert zu beweisen, dass die ersteren Geraden in einem Punkte S' zusammenstossen, welches mit dem Punkte S und dem Schwerpunkte Z des Dreiecks in einer Geraden liegt, derart dass S'Z : SZ = 1 : 2.

Es sei σ der Punkt S; die beiden Geraden, durch die Mitten der Seiten BC, CA parallel zu AS, BS gezogen, sind sodann

$$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)+x(\sigma-\alpha), \quad \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)+y(\sigma-\beta).$$

Für ihren Schnittpunkt S' sind diese beiden Ausdrücke einander gleich, somit

$$\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)+x(\sigma-\alpha)-y(\sigma-\beta)=0$$

und weil α, β, σ willkürliche Vektoren bedeuten, ergibt sich hieraus

$$x=y=-\tfrac{1}{2}.$$

Der Punkt S' hat somit den Vektor

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\sigma)$$

und weil dieser Ausdruck auch in die Form

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)$$

geschrieben werden kann, liegt S' auch in der Geraden, welche aus der Mitte von A'B' parallel zu CS gezogen wird.

Für den Schwerpunkt Z ist

$$OZ=\tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$$

somit

$$OS'=\tfrac{1}{2}(3\,OZ-OS)$$

oder

$$3\,OZ=OS+2\,OS'.$$

Dies zeigt den weiteren Teil des Satzes.

6°. Auf den Seiten eines Sechsecks werden nach aussen gleichseitige Dreiecke beschrieben. Es wird gefordert zu beweisen, dass die sechs Scheitel dieser Dreiecke nicht unabhängig von einander sind. Wie kann aus fünf Scheitel der sechste construirt werden?

Es seien α, β, γ, δ, ε, ζ die Ecken des Sechsecks und ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... ρ_6 die sechs Scheitel, P_1, P_2, ... P_6, so dass

$$\begin{aligned}
(\rho_1-\alpha)&=q(\rho_1-\beta)\\
(\rho_2-\beta)&=q(\rho_2-\gamma)\\
(\rho_3-\gamma)&=q(\rho_3-\delta)\\
(\rho_4-\delta)&=q(\rho_4-\varepsilon)\\
(\rho_5-\varepsilon)&=q(\rho_5-\zeta)\\
(\rho_6-\zeta)&=q(\rho_6-\alpha)
\end{aligned}$$

worin

$$q^3 = -1.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach einander mit 1, q, q^2, ... q^5 und addirt die Resultate, so erhält man

$$\rho_6 - \rho_1 + q(\rho_1 - \rho_2) + q^2(\rho_2 - \rho_3) + q^3(\rho_3 - \rho_4) + q^4(\rho_4 - \rho_5) + q^5(\rho_5 - \rho_6) = 0$$

wodurch der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Diese Gleichung kann jedoch sehr vereinfacht werden. Weil nämlich $q^3 = -1$, so wird

$$q^4 = -q\,,\ q^5 = -q^2, \text{ und schlieszlich } q^2 = q - 1.$$

Es entsteht nun

$$\rho_4 + \rho_5 - \rho_1 - \rho_2 = q(\rho_4 + \rho_3 - \rho_1 - \rho_6).$$

Man nehme daher die Mitten der Strecken P_4P_5, P_1P_2, P_3P_4, P_1P_6, welche wir mit K, L, M, N bezeichnen wollen, so ist

$$KL = q\,MN.$$

Wenn man somit auf KL ein gleichseitiges Dreieck KLI beschreibt, sodass KI aus KL durch eine Drehung entsteht in dem Sinne, worin P_1B aus P_1A entstanden ist, so ist MN=KI. Der Punkt N ist nun gefunden und P_6 kann unmittelbar erhalten werden.

7°. Wenn über den Seiten eines Dreiecks als Grundlinien nach aussen gleichschenklige Dreiecke beschrieben werden, deren Scheitelwinkel $\frac{2}{3}\pi$ beträgt, so sind die Scheitel die Ecken eines gleichseitigen Dreieks.

Man erhält wieder

$$\rho_1 - \beta = q(\rho_1 - \gamma),\ \rho_2 - \gamma = q(\rho_2 - \alpha),\ \rho_3 - \alpha = q(\rho_3 - \beta);$$
$$q^3 = 1, \text{ somit } q^2 = -q - 1.$$

Durch Subtraktion wird hieraus erhalten

$$(1-q)(\rho_1 - \rho_2) = q\alpha + \beta - (1+q)\gamma = \beta + q\alpha + q^2\gamma$$
$$(1-q)(\rho_2 - \rho_3) = q\beta + \gamma - (1+q)\alpha = \gamma + q\beta + q^2\alpha,$$

somit weil

$$\gamma + q\beta + q^2\alpha = q(\beta + q\alpha + q^2\gamma)$$
$$\rho_2 - \rho_3 = q(\rho_1 - \rho_2)$$

und hierin liegt der Satz enthalten.

8°. Auf zwei Seiten BC, CA eines Dreiecks ABC sind nach aussen gleichseitige Dreiecke beschrieben. Wenn die Scheitel A′, B′ dieser Dreiecke und der Höhepunkt H des Dreiecks ABC gegeben sind, so wird das Dreieck zu construiren gesucht.

Sind α, β, γ wieder die Vektoren der Ecken des Dreiecks, ρ_1, ρ_2 diejenige der Scheitel, σ der Höhepunkt. Ist noch i ein zur Ebene ABC senkrechter Einheitsvektor, so werden die Bedingungen des Problems ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\rho_1 - \beta = q(\rho_1 - \gamma), \quad \rho_2 - \gamma = q(\rho_2 - \alpha). \quad . \quad . \quad (\text{A. } 29)$$

$$q^3 = -1, \quad q^2 = q - 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A. } 30)$$

$$S(\sigma-\alpha)(\beta-\gamma) = 0, \quad S(\sigma-\beta)(\gamma-\alpha) = 0, \quad S(\sigma-\alpha)i = 0 \quad (\text{A. } 31)$$

Aus der zweiten der Gleichungen (A. 29) und (A. 30) folgt

$$\gamma - a = q^{-1}(\rho_2 - \alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A. } 32)$$

Durch Subtraktion ergibt sich aus (A. 29) in Verbindung mit (A. 30)

$$\begin{aligned} \beta - \gamma &= q(\gamma - \alpha) + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2) \\ &= \rho_2 - \alpha + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2) \text{ nach (A. 32).} \end{aligned}$$

Durch Addition dieses Resultats zu (A. 32) wird gefunden

$$\alpha - \beta = -(1 + q^{-1})(\rho_2 - \alpha) - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2).$$

Diese Werte können nun in (A. 31) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$S(\sigma - \alpha)[\rho_2 - \alpha + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)] = 0$$

$$S[\sigma - \alpha - (1 + q^{-1})(\rho_2 - \alpha) - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)]\, q^{-1}(\rho_2 - \alpha) = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} (\rho_2 - \alpha)^2 + S(\rho_2 - \alpha)\{\sigma - \rho_2 + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\} &= \\ = -S(\sigma - \rho_2)\, q^{-1}(\rho_1 - \rho_2) & \\ \{q^{-1}(\rho_2 - \alpha)\}^2 - S\{(\sigma - \rho_2) - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\}\, q^{-1}(\rho_2 - \alpha) &= 0. \end{aligned}\right\} (\text{A. } 33)$$

Nun ist aber

$$\{q^{-1}(\rho_2 - \alpha)\}^2 = -N\{q^{-1}(\rho_2 - \alpha)\} = -Nq^{-1}N(\rho_2 - \alpha) = (\rho_2 - \alpha)^2,$$

demnach kann statt (A. 33) geschrieben werden:

$$\left[\alpha - \rho_2 - \frac{\sigma - \rho_2 + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{\sigma - \rho_2 - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)}{2}\right]^2 \quad (\text{A. } 34)$$

$$\begin{aligned} &[\alpha - \rho_2 + \tfrac{1}{2} V.\{\sigma - \rho_2 - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\}\, q^{-1}]^2 = \\ &= -\tfrac{1}{4} NV\{\sigma - \rho_2 - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\}\, q^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (\text{A. } 35) \end{aligned}$$

Weiter ist, wenn λ ein willkürlicher Vektor ist, nach (*b.* 120), (*b.* 54)

$$\begin{aligned} V.\lambda q^{-1} &= -VK\lambda q^{-1} = \\ &= V(Kq^{-1}.\lambda) = Vq\lambda \end{aligned}$$

somit geht (A. 35) über in

$$\left[\alpha - \rho_2 + \frac{q(\sigma - \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2)}{2}\right]^2 = \tfrac{1}{4}\{q(\sigma - \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2)\}^2 \quad (\text{A. } 36)$$

Der Punkt A ist deshalb der Durchschnittspunkt zweier Kreise. Die Mittelpunkte jener Kreise sind nach (A. 34) (A. 36)

$$\rho_2 + \tfrac{1}{2}\left[\sigma - \rho_2 + q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\right], \quad \rho_2 - \tfrac{1}{2}\left[q(\sigma - \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2)\right]$$

und ihre Radien sind die Längen der Vektoren

$$\tfrac{1}{2}\left[\sigma - \rho_2 - q^{-1}(\rho_1 - \rho_2)\right], \quad \tfrac{1}{2}\left[q(\sigma - \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2)\right],$$

welche einander gleich sind.

Man erhält daher die nachfolgende einfache Construktion: Man beschreibe ein gleichseitiges Dreieck B′DA′, sodass der Sinn der Drehung von B′A′ nach B′D entgegengesetzt ist derjenigen von CA nach CB, welcher gegeben sein soll. Auf DH als Durchmesser beschreibe mann einen Kreis; derselbe wird den Punkt A enthalten. Construirt man weiter auf DH ein gleichseitiges Dreieck DHF, so dass die Drehung von HD nach HF mit derjenigen von B′D nach B′A′ übereinstimmt und zieht B′E, welche mit HF gleiche Länge und Richtung hat, so wird der auf B′E als Durchmesser beschriebene Kreis ebenfalls den Punkt A enthalten.

Wie man sieht, können bei allen derartigen Aufgaben die Quaternionen mit Erfolg angewandt werden. In der genannten Aufgabensammlung kann man noch andere ähnliche Aufgaben finden.

9°. In einer Ebene sind zwei Punkte A_1, A_2 und drei Geraden l_1, l_2, l_3 gegeben, in denen drei Punkte P_1, P_2, P_3 ähnliche Punktreihen beschreiben. Construirt man jedesmal ein Dreieck $A_1A_2A_3$ welches dem Dreieck $P_1P_2P_3$ ähnlich ist, so ist der Ort des Punktes P_3 ein Kreis.

Es seien α_1, α_2, α_3 die Vektoren der Punkte A_1, A_2, A_3; ρ_1, ρ_2, ρ_3 diejenigen der Punkte P_1, P_2, P_3. Man kann sodann setzen

$$\rho_1 = \beta_1 + x\pi_1, \quad \rho_2 = \beta_2 + x\pi_2, \quad \rho_3 = \beta_3 + x\pi_3.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $P_1P_2P_3$, $A_1A_2A_3$ muss

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\beta_3 - \beta_1 + x(\pi_3 - \pi_1)}{\beta_2 - \beta_1 + x(\pi_2 - \pi_1)}.$$

Setzt man noch

$$\alpha_3 - \alpha_1 = \rho, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha^{-1}, \quad \beta_3 - \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 - \beta_1 = \gamma,$$
$$\pi_3 - \pi_1 = \sigma, \quad \pi_2 - \pi_1 = \tau$$

so kann geschrieben werden

$$x(\rho\alpha\tau - \sigma) = \beta - \rho\alpha\gamma$$

oder

$$V(\rho\alpha\tau - \sigma)(\rho\alpha\gamma - \beta) = 0 \ldots\ldots (A. 37)$$

Nach unsren Annahmen ist

$$S\rho\alpha\tau = 0, \text{ somit } \rho\alpha\tau = V\rho\alpha\tau = V\tau\alpha\rho = \tau\alpha\rho.$$

Die Gleichung (A. 37) geht hiermit über in die nachstehende

$$\rho^2\alpha^2 V\tau\gamma - V\rho(\alpha\tau\beta - \sigma\gamma\alpha) + V\sigma\beta = 0$$

und wenn ϵ ein Einheitsvektor senkrecht zur Ebene der Figur ist, so erhält man durch die Operation mit $S.\epsilon$ an die zuletzt erhaltene Gleichung

$$\rho^2\alpha^2 S\epsilon\tau\gamma - S\rho\alpha(\tau\beta - \gamma\sigma)\epsilon + S\epsilon\sigma\beta = 0.$$

In Verbindung mit $S\rho\epsilon = 0$ ist dies die Gleichung eines Kreises. Denn man kann derselben die Gestalt erteilen

$$\left[\rho - \frac{\alpha^{-1}(\tau\beta - \gamma\sigma)\epsilon}{2\,S\epsilon\tau\gamma}\right]^2 = \left[\frac{\alpha^{-1}(\tau\beta - \gamma\sigma)\epsilon}{2\,S\epsilon\tau\gamma}\right]^2 - \frac{S\epsilon\sigma\beta}{S\epsilon\tau\gamma}$$

welche durch (*c*. 34) in die mit (*d*. 10) bezeichnete Form der Kugelgleichung übergeht.

10°. Wenn A′B′C′ die Projektion eines Dreiecks ABC auf eine Ebene U ist und das Dreieck ABC durch Drehung um die Durchschnittsgerade der Ebenen A′B′C′ und ABC in die Ebene U gebracht wird, so stossen die Senkrechten aus A′, B′, C′ auf BC, CA, AB gefällt, in einem Punkte zusammen.

Es sei der Einheitsvektor α parallel der Durchschnittsgeraden der Ebenen A′B′C′, ABC, β ein zu α senkrechter in U liegender Einheitsvektor, ϵ zur Ebene U senkrecht. Die Punkte A, B, C lassen sich sodann durch

$$a\alpha + a_1\beta,\ b\alpha + b_1\beta,\ c\alpha + c_1\beta$$

A′, B′, C′ durch

$$a\alpha + a_1\beta\cos x,\ b\alpha + b_1\beta\cos x,\ c\alpha + c_1\beta\cos x$$

darstellen. Das Perpendikel aus A′ auf BC gefällt, ist somit

$$V(\rho - a\alpha - a_1\beta\cos x)\epsilon[(b-c)\alpha + (b_1 - c_1)\beta] = 0$$

oder

$$V.\rho\epsilon[(b-c)\alpha + (b_1 - c_1)\beta] = \epsilon[a(b-c) + a_1(b_1 - c_1)\cos x].$$

Addirt man die drei so erhaltenen Gleichungen, so entsteht eine Identität.

11. Im Artikel 87 der Theorie haben wir die Bedeutung

der Grösse $S\alpha\beta\gamma$ erörtert. Der Vektorteil des Produktes $\alpha\beta\gamma$ sei Gegenstand der nun anzustellenden Betrachtungen.

Setzen wir nämlich

$$\rho = V\alpha\beta\gamma$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} S\alpha\rho = \alpha^2 S\beta\gamma \\ S\gamma\rho = \gamma^2 S\alpha\beta \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} S\rho\alpha^{-1} = S\beta\gamma \\ S\rho\gamma^{-1} = S\alpha\beta \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (A.\ 38)$$

somit

$$S\rho(\alpha^{-1}S\alpha\beta - \gamma^{-1}S\beta\gamma) = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (A.\ 39)$$

Nun ist jedoch $\alpha^{-1}S\alpha\beta$ die Projektion des Vektors β auf α; denn diese Projektion ist

$$U\alpha . T\beta \cos \angle \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{U\alpha}{T\alpha} S\alpha\beta \text{ nach } (c.\ 24)$$
$$= \alpha^{-1}S\alpha\beta \text{ nach } (c.\ 10).$$

Es seien B_1 und B_3 die Projektionen des Punktes B auf die Vektoren OA, OC; so sagt die Gleichung (A. 39) aus, dass ρ senkrecht ist zu B_1B_3.

Weiter ist

$$S\beta\rho = 2\, S\alpha\beta\, S\beta\gamma - \beta^2 S\alpha\gamma$$

und in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen

$$S(\gamma^{-1}\, S\beta\gamma + \alpha^{-1}\, S\beta\alpha - \beta)\rho = \beta^2 S\alpha\gamma$$

somit auch, wenn man diese Gleichung mit $S\beta\gamma$ oder $S\alpha\beta$ multiplicirt und das erhaltene Produkt subtrahirt von jedem der Produkte der Gleichungen (A. 38) mit $\beta^2 S\alpha\gamma$

$$S\rho\left[(\gamma^{-1}\, S\beta\gamma + \alpha^{-1}\, S\beta\alpha) S\frac{\alpha}{\beta} - (\beta^{-1}\, S\alpha\beta + \gamma^{-1}\, S\alpha\gamma)\right] = 0$$

$$S\rho\left[(\gamma^{-1}\, S\beta\gamma + \alpha^{-1}\, S\beta\alpha) S\frac{\gamma}{\beta} - (\beta^{-1}\, S\gamma\beta + \alpha^{-1}\, S\gamma\alpha)\right] = 0$$

Ist nun B_2 die Mitte der Strecke B_1B_3, und sind A_2, A_3, die Projektionen des Punktes A auf OB, OC bezhw., A_1 die Mitte der Strecke A_2A_3, endlich C_1, C_2 die Projektionen von C auf OA, OB und C_3 die Mitte von C_1C_2, so ist der Vektor ρ nach den beiden letzten Gleichungen senkrecht zu den Vektoren

$$\rho_1 = OB_2 S\frac{\alpha}{\beta} - OA_1,\ \rho_2 = OB_2 S\frac{\gamma}{\beta} - OC_3.$$

Zieht man aus B Geraden parallel zu A_2A_3, C_1C_2, welche von OA_1, OC_3 in den Punkten D, E bezhw. geschnitten werden, so sind B_2D, B_2E parallel zu den Vektoren ρ_1, ρ_2; denn es ist

$$B_2D = OD - OB_2 = OA_1 \frac{OB}{OA_2} - OB_2$$
$$= \frac{OB}{OA_2}\left(OA_1 - OB_2 \frac{OA_2}{OB}\right)$$

während

$$OA_2 : OB = T\alpha \cos \angle \frac{\alpha}{\beta} : T\beta = S\frac{\alpha}{\beta}.$$

Wir sind in dieser Weise zu dem Schlusse geraten, dass der Vektor ρ senkrecht ist zu den drei Vektoren B_1B_3, B_2D, B_2E.

Sind F, G die Punkte, in denen BD, BE die Kanten OC, OA schneiden, so ist DE parallel zu FG. Weil aber B_1B_3, B_2D, B_2E senkrecht zu ρ sind, so liegen B_1B_3 und DE in einer Ebene, und weil DE parallel der Ebene COA ist, so muss auch $DE // B_1B_3$, daher auch $FG // B_1B_3$. Dies hätte man auch leicht stereometrisch mit Hülfe von Proportionen beweisen können.

Es kann somit der nachstehende Satz ausgesprochen werden: Projicirt man jede der Ecken A, B, C einer Vierseite OABC auf die beiden von O ausgehenden, die Ecke nicht enthaltenden Kanten in A_2, A_3; B_3 B_1; C_1 C_2 so sind die Geraden A_2A_3, B_3B_1, C_1C_2 einer einzigen Ebene parallel.

Dieser Satz lässt sich auch sehr leicht direkt beweisen. Die Vektoren A_2A_3, B_1B_3, C_1C_2 werden nämlich dargestellt durch

$$\beta^{-1}S\beta\alpha - \gamma^{-1}S\gamma\alpha,\quad \gamma^{-1}S\beta\gamma - \alpha^{-1}S\beta\alpha,\quad \alpha^{-1}S\alpha\gamma - \beta^{-1}S\beta\gamma$$

und das Lot zu den beiden ersteren ist

$$V(\beta^{-1}S\beta\alpha - \gamma^{-1}S\gamma\alpha)(\gamma^{-1}S\beta\gamma - \alpha^{-1}S\beta\alpha) =$$
$$= S\alpha\beta\,[V\beta^{-1}\gamma^{-1}S\beta\gamma + V\gamma^{-1}\alpha^{-1}S\gamma\alpha + V\alpha^{-1}\beta^{-1}S\alpha\beta]$$

sodass der Vektor

$$V\beta^{-1}\gamma^{-1}S\beta\gamma + V\gamma^{-1}\alpha^{-1}S\gamma\alpha + V\alpha^{-1}\beta^{-1}S\alpha\beta$$

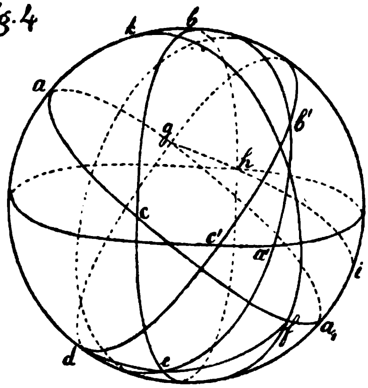
zu allen dreien senkrecht ist.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass zur Construction von $V\alpha\beta\gamma$ auch das Lot zu B_1B_3 und B_1D verwendet werden kann.

12. Durch Anwendung sphärischer Dreiecke zur Darstellung

der Versoren mittelst Bogen auf der Einheitskugel kann die Construktion der Richtung von $V\alpha\beta\gamma$ sehr anschaulich gemacht werden. Es sei abc die Darstellung der Vektoren α, β, γ auf der Einheitskugel $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ die Polarkreise der Punkte a, b, c.

Fig. 4



Der Vektor BB_1, welcher in der Ebene BOA enthalten und senkrecht zu OA ist, wird somit durch den Schnittpunkt d der grössten Kreise ab, $b'c'$ dargestellt. In derselben Weise wird der Schnittpunkt e der Kreise bc, $a'b'$ den Vektor BB_3 darstellen und der Punkt f, wo die grössten Kreise de, ac sich schneiden, ist die Darstellung des Vektors B_1B_3. In derselben Weise ergeben sich die Punkte g, h, i als Darstellung der Vektoren CC_1, CC_2, C_1C_2.

Den Vektor B_1E zu erhalten bemerken wir, dass aus dem rechtwinkligen Dreieck BB_1G folgt, $\angle EB_1G = \angle BGO$. Nun wird aber $\angle BGO$ oder $\angle C_2C_1O$ in unsrer Figur durch den Bogen $a_1 i$ veranschaulicht. Man nehme deshalb auf den Bogen ab den Punkt k so, dass $ak = a_1 i$, so stellt k den Vektor B_1E dar und weil $V\alpha\beta\gamma$ senkrecht ist zur Ebene B_3B_1E, so wird man in den Pol p des grössten Kreises kf $UV\alpha\beta\gamma$ gefunden haben.

Will man aber die aus der Definition folgende Construktion der Grösse $V\alpha\beta\gamma$ in Anwendung bringen, so hat man die Kreise $b'c'$, bc zu verlängern, bis dieselben sich schneiden, und längs jenen Kreisen von dem Durchschnittspunkte aus Bogen abzutragen, welche einen rechten Winkel bzhw. das Supplement des Bogens bc betragen. Die Endpunkte dieser Bogen bestimmen sodann wieder einen grössten Kreis, dessen Pol den Vektor $UV\alpha\beta\gamma$ darstellt, sodass derselbe mit kf identisch sein muss. Es gilt somit der Satz: Der Durchschnittspunkt der

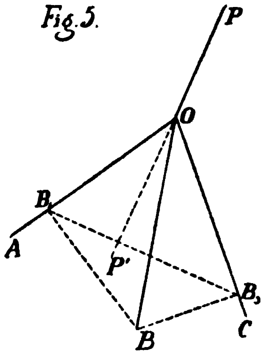
Bogen $b'c'$, bc ist längs diesen Kreisen gemessen von dem Kreise kf um Bogen entfernt, welche einem rechten Winkel bzhw. dem Bogen bc gleich kommen.

13. Die Construktion der Richtung der Grösse $V\alpha\beta\gamma$ wird ungemein leichter, wenn die Vektoren α, β, γ complanar sind. Es ist sodann

$$S\alpha\beta\gamma = 0\,, \quad \rho = V\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma\,, \quad S\beta\alpha\rho = 0\,,$$

sodass ρ auch in der Ebene von α, β, γ enthalten ist, und nach dem soeben erörterten kann dieser Vektor nun einfach gefunden werden, indem man BB_1, BB_3 senkrecht auf OA, OC fällt und aus O das Perpendikel OP′ auf B_1B_3 zieht; $\alpha\beta\gamma$ fällt sodann mit dem Negativen OP des Vektors OP′ der Richtung nach zusammen. Bekanntlich ist hierbei $\angle B_1OP' = \angle BOC$ oder OP′ ist in Bezug auf den Winkel AOC zu OB isogonal conjugirt.

Fig. 5.



In der Tat hat man mittelst Quaternionen

$$S.UaU\alpha\beta\gamma = S.U\alpha(U\alpha U\beta U\gamma) = \\ = -S.U\beta U\gamma.$$

Eine andere Construktion für $\alpha\beta\gamma$ in demselben Falle folgt aus der Transformation

$$\rho = \alpha\beta\gamma \text{ somit } \frac{\rho}{\gamma} = \alpha\beta\,,$$

oder schliesslich

$$\angle \frac{\rho}{\gamma} = \angle \alpha\beta \text{ und } \pi - \angle \rho\gamma = \angle \alpha\beta.$$

Wenn demnach OA, AB parallel zu α, β gezogen sind und um das Dreieck OAB ein Kreis beschrieben wird, in welchem BP eine Sehne parallel zu γ ist, so wird PO die Richtung von ρ darstellen; denn es genügen sodann

$$\angle OPB = \angle \rho\gamma, \quad \angle OAB = \angle \alpha\beta$$

der Forderung.

Und hieraus folgt wieder, dass wenn aus den Vektoren α, β, γ ein Dreieck gebildet werden kann, $\alpha\beta\gamma$ die Tangente des umschriebenen Kreises in dem Anfangspunkte des Vektors α ist.

Wenn weiter aus den Vektoren α, β, γ, δ ein ebenes oder windschiefes Viereck gebildet werden kann, so ist das Produkt $\alpha\beta\gamma\delta$ ein Quaternion, dessen Ebene leicht angegeben wird. Ist nämlich $OA = \alpha$, $AB = \beta$, $BC = \gamma$, $CO = \delta$ und setzen wir noch $BO = \rho$, so sind $\alpha\beta\rho$, $-\rho\gamma\delta$ die Tangenten im Punkte O gelegt an die Kreise, welche um die Dreiecke OAB, OBC beschrieben werden. Somit ist

$$\alpha\beta\rho.\rho\gamma\delta = \rho^2\alpha\beta\gamma\delta$$

das Produkt jener Tangenten, daher ein Quaternion, dessen Ebene die Kugel berührt, welche die Punkte OABC enthält.

15. Wir wollen nun noch einige Aufgaben über sphärische Dreiecke folgen lassen.

1°. Der grösste Kreis, welcher die Mitten zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, schneidet die dritte Seite in einem Punkte, dessen sphärische Entfernung von der Mitte jener dritten Seite einen rechten Winkel beträgt.

Sind α, β, γ die drei Ecken A, B, C, somit $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$, so sind $U(\beta+\gamma)$, $U(\gamma+\alpha)$, $U(\alpha+\beta)$ die Mitten A′, B′, C′ der Seiten. Nun ist der Schnittpunkt der Bogen A′B′, AB bestimmt durch die Gleichungen

$$S\rho\alpha\beta = 0, \; S\rho(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = 0, \; \rho^2 = -1 \quad . \; . \quad (A.\,40)$$

und man hat zu zeigen

$$S\rho(\alpha+\beta) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A.\,41)$$

Aus (A. 40) wird erhalten

$$\rho = x V.V\alpha\beta\, V(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$
$$= x(\alpha-\beta)\, S\alpha\beta\gamma$$

und die Substitution in (A. 41) ergibt eine Identität.

2°. Der geometrische Ort der Scheitel aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie und gleichen Inhalt haben, ist ein Kreis.

Wenn α, β, ρ die drei Ecken des Dreiecks bedeuten, von denen α, β constant sind und

$$U(\alpha+\beta) = \gamma', \; U(\beta+\rho) = \alpha', \; U(\rho+\alpha) = \beta'$$

gesetzt wird, so ist die Bedingung dafür, dass der Inhalt des Dreiecks constant sei

$$E = \text{const. oder } \angle\beta'\gamma'\alpha' = \text{const. nach Art. 6}$$

somit

$$S\beta'\gamma'\alpha' = C \text{ oder } SU(\rho+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\rho) = C.$$

Nach Gleichung (A. 17) kann statt dieser Relation geschrieben werden

$$2\,S\alpha\beta\rho = CT(\rho+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\rho)$$

daher mit zwei potenzirt

$$4\,S^2\alpha\beta\rho = C^2N[2S\alpha\beta\rho + 2\,\rho S(\alpha\beta+\beta\rho+\rho\alpha-1)]$$ nach (A. 17)

und nach (b. 116*)

$$C^2S^2(\alpha\beta+\beta\rho+\rho\alpha-1) = (1-C^2)\,S^2\alpha\beta\rho$$

$$CS(\alpha\beta+\beta\rho+\rho\alpha-1) = \pm\sqrt{1-C^2}\,S\alpha\beta\rho$$

$$S\rho(\alpha+\beta\mp V\alpha\beta\,tg\,x) = 1 - S\alpha\beta \quad \ldots\ldots \quad \text{(A. 42)}$$

wenn zur Abkürzung

$$C = \cos x$$

gesetzt wird.

Der Punkt ρ ist somit in zwei Ebenen enthalten, welche die Gegenpunkte der festen Endpunkte der Grundlinie enthalten, weil die Substitutionen $\rho = -\alpha$ oder $\rho = -\beta$ in (A. 42) Identitäten ergeben.

3°. Die Mitten der Schenkel aller sphärischen Dreiecke, welche auf derselben Grundlinie stehen und den nämlichen Inhalt haben, liegen in einem grössten Kreise der Kugel.

Wir fanden, dass der Ort des Scheitels durch (A. 42) bestimmt wird in Verbindung mit $\rho^2 = -1$. Es ist somit

$$S(\rho+\alpha)(\alpha+\beta\mp V\alpha\beta\,tg\,x) = 0$$

$$S(\rho+\beta)(\alpha+\beta\mp V\alpha\beta\,tg\,x) = 0$$

daher

$$y\,V(\rho+\alpha)(\rho+\beta) = \alpha+\beta\mp V\alpha\beta\,tg\,x = \text{constant}$$

und dies beweist unsren Satz.

Der umgekehrte Satz: Die Inhalte aller Dreiecke, welche auf der nämlichen Grundlinie stehen und deren Schenkel durch den nämlichen grössten Kreis halbirt werden, sind einander gleich, ist unmittelbar in der Gleichung

$$S\beta'\gamma'\alpha' = C$$

enthalten, welche aus $V\alpha'\beta' = \text{constant}$ hervorgeht.

4°. Über den Seiten eines sphärischen Dreiecks ABC werden nach aussen gleichschenklige Dreiecke mit gegebenen Scheitelwinkeln construirt. Wenn die Scheitel A'B'C' dieser Dreiecke gegeben sind, so wird gefragt das Dreieck ABC zu construiren.

Es seien α, β, γ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Vektoren der Punkte A, B, C, A′, B′, C′. Nun haben wir im Artikel 111 der Theorie gesehen, dass der Ausdruck

$$\rho = \alpha^t \beta \alpha^{-t}$$

einen Vektor darstellt, welcher aus β erhalten wird durch eine konische Drehung um die Achse α um einen Winkel, welcher gleich $t\pi$ ist. Es seien nun $a\pi$, $b\pi$, $c\pi$ die gegebenen Scheitelwinkel der gleichschenkligen Dreiecke BCA′, CAB′, ABC′, so erhält man die Gleichungen

$$\gamma = \rho_1{}^a \beta \rho_1{}^{-a}, \quad \alpha = \rho_2{}^b \gamma \rho_2{}^{-b}, \quad \beta = \rho_3{}^c \alpha \rho_3{}^{-c}.$$

Durch Substitution ergibt sich hieraus

$$\alpha = \rho_2{}^b \rho_1{}^a \rho_3{}^c \alpha \rho_3{}^{-c} \rho_1{}^{-a} \rho_2{}^{-b}, \quad \beta = \rho_3{}^c \rho_2{}^b \rho_1{}^a \beta \rho_1{}^{-a} \rho_2{}^{-b} \rho_3{}^{-c} \text{ u.s.w.}$$

wodurch α, β, γ bestimmt sind. Denn es wird hiermit

$$\alpha \rho_2{}^b \rho_1{}^a \rho_3{}^c = \rho_2{}^b \rho_1{}^a \rho_3{}^c \alpha.$$

Setzt man nun

$$\rho_2{}^b \rho_1{}^a \rho_3{}^c = q, \text{ wo } Tq = 1$$

so ist

$$\alpha q = q \alpha, \quad V.\alpha Vq = 0 \text{ daher } \alpha // Vq.$$

Das Resultat ist demnach

$$\alpha = UV\rho_2{}^b \rho_1{}^a \rho_3{}^c, \quad \beta = UV\rho_3{}^c \rho_2{}^b \rho_1{}^a, \text{ u.s.w.}$$

und die Punkte A, B, C sind durch das in der Theorie angegebene Verfahren, das Produkt mehrerer Quaternionen auf der Einheitskugel zu zeichnen, zu finden.

16. Wir wollen diesen Abschnitt damit schliessen, dass wir einige allgemeine Verwandtschaften mittelst Quaternionen darstellen. Zuerst wählen wir die Transformation mittelst reciproker Radien.

Es sei α der Mittelpunkt der Einheitskugel, ρ und σ zwei correspondirende Punkte, so wird die Verwandtschaft ausgesprochen durch die Gleichung

$$(\rho - \alpha)(\sigma - \alpha) = -1 \text{ . . . . } \quad (\text{A. } 43)$$

und in dem speciellen Falle, wo der Vektorenursprung 0 in dem Mittelpunkte der Einheitskugel angenommen werden kann

$$\rho\sigma = -1 \text{ . . . . } \quad (\text{A. } 44)$$

Der Punkt ρ beschreibe nun eine Ebene

$$S(\rho - \beta)\gamma = 0 \text{ oder } S\rho\gamma = a,$$

so beschreibt σ die Fläche

$$S\gamma\sigma^{-1} = -a$$

eine Kugel nach Art. 96 der Theorie, deren Mittelpunkt mit $-\frac{\gamma}{2a}$ bezeichnet werden muss, während der Radius $= \pm \frac{T\gamma}{2a}$, wo das obere oder das untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem a positiv oder negativ ist. Weil das Perpendikel aus O auf die Ebene gefällt durch $a\gamma^{-1}$ dargestellt wird, so ist der Mittelpunkt der Kugel zu finden, indem man den correspondirenden Punkt Q des Fusspunktes P jenes Perpendikels sucht und die Mitte der Strecke O Q nimmt. Die Kugel enthält im allgemeinen den Vektorenursprung, wie unmittelbar einleuchtet, wenn man ihre Gleichung in die Form $S\gamma\sigma + a\sigma^2 = 0$ schreibt.

Rückt die Ebene ins Unendliche, d. h. ist $Lim. a = \infty$, so geht die Kugel in den Vektorenursprung O über. Enthält die Ebene den Punkt O, so geht die correspondirende Kugel in eine Ebene über, welche mit der ersteren zusammenfällt.

Mit einer Geraden als Durchschnitt zweier Ebenen wird im allgemeinen ein durch O gehender Kreis übereinstimmen, welcher in der Ebene enthalten sein muss, durch O und die Gerade gelegt. Der Mittelpunkt jenes Kreises wird wie der soeben beschriebene Kugelmittelpunkt gefunden.

Mit der Kugel

$$(\rho - \beta)^2 = -a^2$$

wird die Fläche

$$(\sigma^{-1} + \beta)^2 = -a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A. 45)$$

übereinstimmen. Nun ist jedoch

$$(\sigma^{-1} + \beta)^2 = \sigma^{-2} + 2\, S\beta\sigma^{-1} + \beta^2.$$

Die Gleichung (A. 45) geht demnach über in

$$1 + 2\, S\beta\sigma + \sigma^2 (a^2 + \beta^2) = 0$$

oder

$$\left(\sigma + \frac{\beta}{a^2 + \beta^2}\right)^2 = -\left(\frac{a}{a^2 + \beta^2}\right)^2.$$

Die correspondirende Fläche ist daher eine Kugel, deren Mittelpunkt und Radius mit $-\frac{\beta}{a^2 + \beta^2}$, $\frac{a}{a^2 + \beta^2}$ bezeichnet werden.

Wenn speciell $T\beta = a$, d. h. wenn die Kugel durch den

Vektorenursprung hindurchgeht, so ist die correspondirende Fläche die Ebene

$$2\,S\beta\sigma = -1.$$

Welcher ist der geometrische Ort der Punkte im Raume, die als Inversionscentra bei der Transformation mittelst reciproker Radien benutzt werden können, damit eine oder mehrere Kugeln

$$T(\rho-\alpha)=a,\quad T(\rho-\beta)=b,\quad T(\rho-\gamma)=c \text{ u.s.w.}$$

in solche von gegebenen Radien a_1, b_1, c_1, d_1 übergehen.

Es sei ω ein solches Inversionscentrum, mithin

$$(\rho-\omega)(\sigma-\omega)=-1.$$

Nun geht die Kugel

$$T(\rho-\alpha)=a \text{ oder } (\rho-\alpha)^2=-a^2$$

über in

$$(\sigma-\omega)^2\,[(\omega-\alpha)^2+a^2]-2\,S(\omega-\alpha)(\sigma-\omega)+1=0$$

eine Kugel, deren Radius gleich a_1 sein muss. Schreibt man diese Gleichung in die Gestalt

$$\left[\sigma-\omega-\frac{\omega-\alpha}{a^2+(\omega-\alpha)^2}\right]^2=-\left[\frac{a}{a^2+(\omega-\alpha)^2}\right]^2$$

so erkennt man, dass hieraus die Bedingung entspringt

$$\frac{a^2}{[a^2+(\omega-\alpha)^2]^2}=a_1{}^2$$

oder

$$(\omega-\alpha)^2=\pm\frac{a}{a_1}-a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A.\,46)$$

Damit die erste Kugel in eine solche mit Radius a_1 übergehe, muss das Inversionscentrum in einer von zwei mit der gegebenen concentrischen Kugelflächen angenommen werden, welche durch die Fläche der gegebenen Kugel getrennt sind. Müssen zwei, drei... Kugeln in solche von gegebener Grösse umgewandelt werden so erhält man ausser (A. 46) noch

$$(\omega-\beta)^2=\pm\frac{b}{b_1}-b^2,\quad (\omega-\gamma)^2=\pm\frac{c}{c_1}-c^2$$

u. s. w. mit anderen Worten: es gibt vier Kreise, deren Punkte Inversionscentra sein können bei der Umwandlung zweier Kugeln; sechzehn Punkte, welche als Inversionscentra dienen können bei der Umwandlung dreier Kugeln in solche von gegebenem Radius. Natürlich können einige derselben imaginär werden.

Soll die erste Kugel in eine andere von gegebenem Mittelpunkte α_1 transformirt werden, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\omega + \frac{\omega - \alpha}{a^2 + (\omega - \alpha)^2} = \alpha_1$$

oder

$$(\omega - \alpha)[1 + a^2 + (\omega - \alpha)^2] = (\alpha_1 - \alpha)(a^2 + (\omega - \alpha)^2].$$

Indem man quadrirt und

$$(\omega - \alpha)^2 = -x, \quad (\alpha_1 - \alpha)^2 = -k^2$$

setzt, so gilt es die positiven Wurzeln der Gleichung

$$x(1 + a^2 - x)^2 = k^2 (a^2 - x)^2$$

zu bestimmen. Die Gleichung, welche nur Zeichenwechsel enthält, hat stets drei positive Wurzeln; für $(\omega - \alpha)^2$ werden daher stets drei reelle Werte gefunden und ω erhält somit auch drei reelle Werte. Es gibt daher stets drei Inversionscentra, welche eine willkürlich gegebene Kugel in eine solche von gegebenem Mittelpunkt transformiren.

17. Zieht man von dem Punkte P aus, dessen Vektor ρ sei, ein Linienelement $d\rho$, so correspondirt hiermit im Punkte Q oder σ ein Linienelement $d\sigma$ derart dass

$$d\rho.\sigma + \rho d\sigma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A. 47)$$

wie durch Differentiation von (A. 44) hervorgeht. Es ist deshalb

$$d\sigma = -\rho^{-1} d\rho\sigma = \sigma d\rho\sigma.$$

Aus (A. 47) folgt weiter

$$SUd\rho\sigma = SU.(-\rho)d\sigma$$

oder in Worten: correspondirende Linienelemente bilden nach deren Verlängerung mit der Strecke zwischen ihren Anfangspunkten ein gleichschenkliges Dreieck.

Weil

$$Ud\sigma = U\sigma\, Ud\rho\, U\sigma$$

so ist

$$SUd\sigma\, Ud\sigma_1 = S(U\sigma\, Ud\rho\, U\sigma)\,(U\sigma\, Ud\rho_1\, U\sigma)$$
$$= SUd\rho\, Ud\rho_1$$

d. h. die Winkel zwischen zwei Linienelementen und deren correspondirenden sind stets einander gleich.

18. Eine andere Verwandtschaft, welche wir mittelst Quaternionen beschreiben wollen, ist die **Ähnlichkeit**, sowohl die direkte, wie die umgekehrte.

Schon in der Theorie haben wir umgekehrt ähnliche Figuren im vierten Abschnitte betrachtet; wir wollen jetzt aber auf ganz andere Weise dabei verfahren.

Sind A, B und A_1, B_1 zwei correspondirende feste Punktepaare, deren Vektoren mit α, β und α_1, β_1 bezeichnet werden mögen und ist $P_1(\rho_1)$ der mit $P(\rho)$ correspondirende Punkt, so wird die Verwandtschaft der direkten Ähnlichkeit ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{\rho-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\rho_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad (A.48)$$

mit der Bedingung

$$S(\beta-\alpha)(\alpha_1-\alpha)(\beta_1-\alpha_1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (A.49)$$

welche ausdrückt, dass die Punkte A, B, A_1, B_1 complanar sind.

Indem nun

$$q=\frac{\beta_1-\alpha_1}{\beta-\alpha}$$

gesetzt wird, erhält man mit Benutzung von einem der Sätze in Art. 73

$$\rho_1-\alpha_1=q(\rho-\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A.50)$$

Hierin ist sodann $Ax.q$ senkrecht zu $\alpha_1-\alpha$ oder

$$S.q(\alpha_1-\alpha)=0$$

Um das homothetische Centrum S der ähnlichen Figuren zu finden, muss $\rho=\rho_1$ angenommen werden. Bezeichnet man diesen Wert mit ρ_0, so ist

$$\frac{\rho_0-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\rho_0-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}=\frac{\alpha-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1-\beta+\alpha}.$$

Zieht man noch B_1B_2 dem Vektor BA gleich, so ist

$$\frac{AS}{AB}=\frac{A_1A}{A_1B_2},$$

somit ist das Dreieck SAB dem andern AA_1B_2 direct ähnlich, wodurch eine einfache Construktion für den Punkt S erhalten ist.

Die gewöhnliche Construktion des homothetischen Centrums mittelst Kreise geht jedoch auch auf einfache Weise aus (A. 48) hervor. Es ist nämlich nach Art. 73 der Theorie auch

$$\frac{\rho_0 - \alpha}{\rho_0 - \alpha_1} = \frac{\beta - \alpha}{\beta_1 - \alpha_1} = \frac{\rho_0 - \beta}{\rho_0 - \beta_1},$$

somit sind die Winkel dieser Quaternionen einander gleich. Schneiden AB und A_1B_1 sich in P, so ist

$$\angle ASA_1 = \angle BPB_1 = \angle BSB_1,$$

d. h. die Punkte APA_1S sind in einem Kreise enthalten und dasselbe gilt von den Punkten BPB_1S.

Aus der Gleichung (A. 50) ergibt sich für das homothetische Centrum

$$\rho_0 - \alpha = (1 - q)^{-1} (\alpha_1 - \alpha)$$

oder indem man

$$(1 - q)^{-1} = q_1$$

setzt

$$\rho_0 - \alpha = q_1 (\alpha_1 - \alpha).$$

Die Operation q_1 kann leicht ausgeführt werden. Ist nämlich A_1B_3 dem Vektor AB gleich und parallel gezogen, so ist

$$q = \frac{A_1B_1}{A_1B_3}, \quad 1 - q = \frac{B_1B_3}{A_1B_3}, \quad q_1 = \frac{B_3A_1}{B_3B_1}.$$

Man hat somit das Dreieck SAA_1 dem bekannten Dreieck $A_1B_3B_1$ ähnlich zu construiren, wodurch eine der obigen völlig analoge Construktion erhalten ist.

19. Wir wollen nunmehr eine diesbezügliche Aufgabe lösen:

Wenn die eine der beiden Figuren fest bleibt, die andere aber um einen willkürlichen Punkt ω der Ebene gedreht wird, so beschreibt das Centrum der beiden Figuren einen Kreis.

Sind A, B und A_1 B_1 in der ursprünglichen Lage der Figuren correspondirende Punkte mit den Vektoren α, β, α_1, β_1, i ein Einheitsvektor senkrecht zur Ebene der Figuren, x ein willkürlicher Skalar, so gehe durch die Drehung $\alpha_1 - \omega$ in $i^x(\alpha_1 - \omega)$ und $\beta_1 - \omega$ in $i^x(\beta_1 - \omega)$ über. Die Ähnlichkeit wird sodann ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{\rho - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\rho_1 - \omega - i^x(\alpha_1 - \omega)}{i^x(\beta_1 - \alpha_1)},$$

oder mit Benutzung eines Satzes in Art. 73 der Theorie, und indem wieder

$$q = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta - \alpha}$$

gesetzt wird,

$$\rho_1 - \omega - i^x(\alpha_1 - \omega) = i^x q(\rho - \alpha).$$

Für das Ähnlichkeitscentrum hat man somit

$$i^{-x}(\rho_0 - \omega) = \alpha_1 - \omega + q(\rho_0 - \alpha)$$

und es ist nun der Ort von ρ_0 bei veränderlichem x zu bestimmen. Dieser Zweck wird aber unmittelbar erreicht, indem man die zuletzt erhaltene Gleichung quadrirt.

Man erhält dadurch

$$(\rho_0 - \omega)^2 = [\alpha_1 - \omega + q(\rho_0 - \alpha)]^2$$

oder

$$\rho_0^2(1 - Nq) - 2\,S\rho_0[\omega - \alpha Nq + Kq(\alpha_1 - \omega)] =$$
$$= \alpha_1^2 + \alpha^2 Nq - 2\,S\alpha_1\omega - 2\,Sq\alpha(\alpha_1 - \omega)$$

eine Gleichung, welche die Form

$$(\rho_0 - \alpha)^2 = \beta^2$$

hat und somit einem Kreise angehört. Einzelne Ausnahmefälle sind zu erwähnen.

Ist erstens $Nq = 1$, d. h. sind die beiden Figuren einander gleich, dann geht der Kreis in eine Gerade über, welche senkrecht ist zum Vektor

$$\omega - \alpha + Kq(\alpha_1 - \omega) = \omega - \alpha - q^{-1}(\omega - \alpha_1).$$

Ist bei der ursprünglichen Lage der Figuren P der Punkt der ersten, welcher mit ω, als Punkt der zweiten Figur betrachtet, correspondirt, so ist nach (A. 49) der Vektor von P

$$\rho = \alpha + q^{-1}(\omega - \alpha_1),$$

sodass der Vektor Pω durch

$$\omega - \alpha - q^{-1}(\omega - \alpha_1)$$

dargestellt wird. Die soeben erwähnte Gerade ist somit senkrecht zu Pω. Der erhaltene Kreis geht ebenfalls in eine Gerade über, wenn der Punkt ω ins Unendliche rückt; denn bei dieser Annahme gestaltet sich die vorhergehende Gleichung wie nachstehend

$$S.\rho_0(1 - Kq)\,U\omega = S.(\alpha_1 - q\alpha)\,U\omega.$$

20. Sind die Figuren nicht direct sondern umgekehrt ähn-

lich, so wird diese Verwandtschaft durch die Gleichung

$$\frac{\rho-\alpha}{\beta-\alpha}=K\frac{\rho_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1} \quad \dots\dots\dots \quad (\mathrm{A}.\,51)$$

ausgesprochen mit der Bedingung (A. 49) für α, β, α_1, β_1. Setzt man nun

$$\frac{1}{\beta-\alpha}=\gamma, \quad \frac{1}{\beta_1-\alpha_1}=\gamma_1$$

und beachtet man, dass nach (c. 13)

$$K\frac{\rho_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}=(\beta_1-\alpha_1)^{-1}(\rho_1-\alpha_1),$$

so kann die Verwandtschaft auch durch

$$(\rho-\alpha)\gamma=\gamma_1(\rho_1-\alpha_1) \quad \dots\dots\dots \quad (\mathrm{A}.\,52)$$

ausgedrückt werden. Hierbei genügen α, α_1, γ, γ_1 sodann der Bedingung

$$S(\alpha_1-\alpha)\gamma\gamma_1=0 \quad \dots\dots\dots \quad (\mathrm{A}.\,53)$$

Fragen wir hier auch wieder, wann zwei homologe Punkte zusammenfallen, so ergibt sich dessen Vektor ρ_0 aus

$$(\rho_0-\alpha)\gamma=\gamma_1(\rho_0-\alpha_1)$$

und nach (f. 187) wird hieraus erhalten

$$\rho_0-\alpha=\frac{\gamma_1}{\gamma^2-\gamma_1^{\,2}}[(\alpha-\alpha_1)\gamma+\gamma_1(\alpha-\alpha_1)].$$

Ist nun π_1 der Punkt P der zweiten Figur, welcher zum Punkte A_1, als der ersten Figur angehörig betrachtet, correspondirt, so ist

$$\gamma_1\pi_1=-(\alpha-\alpha_1)\gamma+\gamma_1\alpha_1$$

somit

$$\rho_0-\alpha=-\frac{\gamma_1^{\,2}}{\gamma^2-\gamma_1^{\,2}}(\pi_1-\alpha).$$

Bezeichnet man mit S den gesuchten Doppelpunkt der Figuren, so ist deshalb

$$\mathrm{AS}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AB}^2-\mathrm{A_1B_1}^2}\,\mathrm{AP},$$

d. h. der Punkt S ist auf der Geraden AP enthalten. In gleicher Weise findet man, dass S liegt auf der Geraden A_1Q, wenn Q der Punkt der ersten Figur ist, welcher zu A, als

Punkt der zweiten Figur betrachtet, homolog ist; und hiermit ist nun der Doppelpunkt auf einfache Weise als Schnittpunkt der zwei Geraden AP, A_1Q bestimmt. Wenn die Figuren gleich werden, so rückt der Punkt S ins Unendliche in der Richtung AP oder A_1Q.

21. Wir wenden uns jetzt zur Beantwortung der Aufgabe einen Punkt S und einen Vektor SX zu finden, derart dass die Vektoren, welche S mit zwei willkürlich gewählten homologen Punkten verbinden, ein constantes Verhältniss haben und gleiche Winkel mit SX einschliessen.

Es sei σ der Punkt und λ die Richtung, so sind die Bedingungen des Problems in der Gleichung

$$(\sigma - \rho)\lambda = a K(\sigma - \rho_1)\lambda$$

oder

$$(\sigma - \rho)\lambda = a\lambda(\sigma - \rho_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A. 54)$$

wo a positiv ist, enthalten. Hierzu kommt noch die Bedingung

$$S\lambda\gamma\gamma_1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A. 55)$$

Ausserdem besteht die Gleichung (A. 52) zwischen ρ und ρ_1.

Indem man ρ_1 eliminirt, erhält man

$$(\sigma - \alpha)\lambda - \alpha\lambda(\sigma - \alpha_1) = (\rho - \alpha)\lambda - \alpha\lambda\gamma_1^{-1}(\rho - \alpha)\gamma \quad (A. 56)$$

eine Gleichung, welche für jeden Vektor $\rho - \alpha$, welcher in der Ebene der beiden Figuren enthalten ist, stattfinden muss.

Setzt man

$$\rho - \alpha = x\gamma + y\gamma_1$$

wo x, y jeder willkürliche Wert beigelegt werden kann, so müssen die drei Glieder der aus (A. 56) hervorgehenden Gleichung, nachdem dieselbe in die Form

$$\xi + x\eta + y\theta = 0$$

geschrieben ist, einzeln verschwinden. Man erhält dadurch nur zwei Bedingungsgleichungen

$$(\sigma - \alpha)\lambda - a\lambda(\sigma - \alpha_1) = 0, \quad \gamma_1\lambda = a\lambda\gamma.$$

Wenn man an die zweite Gleichung mit T operirt, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{T\gamma_1}{T\gamma}.$$

Nun gehen hiermit die beiden Gleichungen in die nachfolgende über:

$$(\sigma-\alpha)\lambda T\gamma = \lambda(\sigma-\alpha_1)T\gamma_1, \quad U\gamma_1.\lambda = \lambda U\gamma = K(U\gamma.\lambda).$$

Die letzte Gleichung sagt aus, dass λ den Winkel zwischen den homologen Segmenten AB, A_1B_1 halbirt; oder

$$\lambda = U\gamma + U\gamma_1.$$

Aus der ersten kann nun weiter σ erhalten werden. Nach (*f.* 187) ist

$$\sigma-\alpha = -\frac{(\alpha_1-\alpha)T\gamma_1+\lambda(\alpha_1-\alpha)\lambda^{-1}T\gamma}{\gamma_1^2-\gamma^2}T\gamma_1$$

$$= -\frac{(\alpha_1-\alpha)T.AB+\lambda(\alpha_1-\alpha)\lambda^{-1}T.A_1B_1}{(\gamma_1^2-\gamma^2)}T\gamma\, T\gamma_1^2.$$

Die Gerade AS fällt somit der Richtung nach mit dem Vektor

$$AA_1.T\frac{AB}{A_1B_1}+AA_2$$

zusammen, wenn AA_2 zu AA_1 antiparallel ist in Bezug auf λ und die Längen dieser beiden Vektoren einander gleich kommen, wie aus der Bedeutung von $\lambda(\alpha_1-\alpha)\lambda^{-1}$ nach Art. 111 der Theorie erhellt. AS kann somit auf einfache Weise construirt werden, und weil A_1S zu AS in Bezug auf λ antiparallel ist, so ist auch die Richtung von A_1S bekannt, daher der Punkt S als Schnittpunkt dieser Geraden zu finden.

Weil die Werte

$$\sigma-\alpha = -\frac{(\alpha_1-\alpha)T\gamma_1+\lambda(\alpha_1-\alpha)\lambda^{-1}T\gamma}{\gamma_1^2-\gamma_2}T\gamma_1$$

$$\sigma-\alpha_1 = -\frac{(\alpha_1-\alpha)T\gamma+\lambda(\alpha_1-\alpha)\lambda^{-1}T\gamma_1}{\gamma_1^2-\gamma^2}T\gamma$$

der Relation

$$(\sigma-\alpha)\gamma = \gamma_1(\sigma-\alpha_1)$$

Genüge leisten, wie leicht bewiesen wird, wenn man die Relation (A. 54) zu Hülfe nimmt, so erhellt daraus, dass σ mit ρ_0 d. h. mit dem Doppelpunkte der beiden Figuren zusammenfällt.

22. Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch den schon in der Theorie angeführten Satz über umgekehrt ähnliche Figuren beweisen, jedoch auf ganz andere Weise als dort im Art. 105* geschah.

Dieser Satz lautet: Teilt man die Strecke zwischen je zwei homologen Punkten im constanten Verhältnis der Längen homologer Strecken der beiden Figuren, so besteht der geometrische Ort des Teilpunktes aus zwei Geraden.

Wird die Strecke PP_1 zwischen zwei homologen Punkten ρ, ρ_1 durch einen Punkt Q derart geteilt, dass

$$QP : QP_1 = 1 : x,$$

so ist, wenn σ den Vektor des Punktes Q bedeutet, nach Art. 22 der Theorie

$$\sigma(1 - x) = \rho_1 - x\rho = \rho_1 - \alpha_1 - x(\rho - \alpha) + \alpha_1 - x\alpha,$$

daher in Verbindung mit (A. 52)

$$\sigma(1 - x) = \gamma_1^{-1}(\rho - \alpha)\gamma - x(\rho - \alpha) + \alpha_1 - x\alpha$$

oder, wenn noch $\rho - \alpha = \tau$ gesetzt wird,

$$\sigma(1 - x) = \gamma_1^{-1}\tau\gamma - x\tau + \alpha_1 - x\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad (A. 56)$$

Im Allgemeinen wird

$$\omega = \gamma_1^{-1}\tau\gamma - x\tau$$

einen mit τ veränderlichen Vektor in der Ebene der beiden Figuren bedeuten. Setzt man jedoch

$$x = \pm \frac{T\gamma}{T\gamma_1},$$

d. h. nimmt man das Verhältnis der Teile $QP : QP_1$ gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Figuren, so ist

$$\omega = - T\frac{\gamma}{\gamma_1}.(U\gamma_1\tau U\gamma \pm \tau),$$

und es lässt sich leicht zeigen, dass

$$V.\omega(U\gamma_1 \mp U\gamma) = 0,$$

sodass ω bei veränderlichem τ constante Richtung behält.

Es ist nämlich

$$V(U\gamma_1 - U\gamma)(U\gamma_1\tau U\gamma + \tau) = V.U\gamma_1(U\gamma_1\tau U\gamma + \tau) -$$
$$- V.U\gamma(U\gamma\tau U\gamma_1 + \tau) \quad (A. 57)$$

weil

$$\begin{aligned} U\gamma_1\tau U\gamma &= V.U\gamma_1\tau U\gamma \\ &= V.U\gamma\tau U\gamma_1 \text{ nach (c. 42)} \\ &= U\gamma\tau U\gamma_1 \end{aligned}$$

wegen der Complanarität von $U\gamma$, τ, $U\gamma_1$. Die zweite Seite der Gleichung (A. 58) verschwindet nun identisch.

Die Gleichung (A. 56) des geometrischen Ortes des Punktes σ kann deshalb geschrieben werden

$$\sigma(T\gamma_1 \mp T\gamma) = \alpha_1 T\gamma_1 \mp \alpha T\gamma + uT\gamma(U\gamma_1 \mp U\gamma).$$

Der Punkt σ beschreibt daher eine Gerade, welche leicht construirt werden kann.

23. Im Vorhergehenden haben wir einige Anwendungen der Quaternionen hauptsächlich auf dem Gebiete der Planimetrie gegeben. Es wird wohl keiner näheren Beleuchtung bedürfen, wenn wir behaupten, dass die räumliche Geometrie der Behandlung mit Quaternionen grössere Vorteile bieten wird, weshalb die übrigen Abschnitte ausschliesslich diesem Gegenstande gewidmet sind.

DER PUNKT, DIE EBENE, DIE GERADE UND DIE KUGEL.

---

24. Wir wollen zuerst zeigen, wie die Methode der Quaternionen mit den Methoden der analytischen Geometrie in Verbindung gebracht werden kann.

Setzen wir

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B. 1)$$

d. h. zerlegen wir den Vektor ρ nach den Richtungen α, β, γ, so sind $xT\alpha$, $yT\beta$, $zT\gamma$ die gewöhnlichen schiefwinkligen Coordinaten des durch ρ dargestellten Punktes P in Bezug auf α, β, γ als Achsen.

Wählt man für α, β, γ Einheitsvektoren, so sind x, y, z auch einfach die schiefwinkligen Coordinaten van P, und wenn man ins besondere α, β, γ mit einem System unter sich rechtwinkliger Vektoren i, j, k zusammenfallen lässt, so ist stets nach Art. 71 der Theorie der Übergang von den Quaternionen nach den rechtwinkligen Coordinaten leicht auszuführen.

25. Operirt man an (B. 1) mit $S.\beta\gamma$, so wird in Übereinstimmung mit (c. 45) gefunden

$$x = \frac{S\beta\gamma\rho}{S\alpha\beta\gamma} = \frac{\text{Volumen Ppd.OPBC}}{\text{Volumen Ppd.OABC}},$$

wodurch eine Annäherung an die homogenen Coordinaten erhalten ist. Die Verknüpfung mit denselben kommt jedoch erst völlig zu Stande, wenn wir den Vektor ρ nach den

Richtungen vier willkürlicher Vektoren α, β, γ, δ zerlegen, also wenn wir setzen

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma + u\delta \quad \text{(B. 2)}$$

Diese Zerlegung kann auf unendlich verschiedene Weise stattfinden; wenn wir nämlich die Componente in der Richtung α willkürlich wählen, so kann die zweite Componente in der Ebene POA stets auf eine einzige Weise nach β, γ, δ zerlegt werden. Wir können demnach zwischen x, y, z, u noch irgend eine Relation annehmen. Setzen wir nun

$$x + y + z + u = 1 \quad \text{(B. 3)}$$

oder, was auf dieselbe Annahme hinauskommt,

$$\left.\begin{aligned} Xx = a_1 x_1,\ Xy = a_2 x_2,\ Xz = a_3 x_3,\ Xu = a_4 x_4 \\ X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{(B. 4)}$$

so geht (B. 2) über in

$$X\rho = x_1 a_1 \alpha + x_2 a_2 \beta + x_3 a_3 \gamma + x_4 a_4 \delta \quad \text{(B. 5)}$$

oder schliesslich in

$$X\rho = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4, \quad \text{(B. 6)}$$

wenn noch

$$a_1 \alpha = \alpha_1,\ a_2 \beta = \alpha_2,\ a_3 \gamma = \alpha_3,\ a_4 \delta = \alpha_4 \quad \text{(B. 7)}$$

angenommen wird.

Die Coefficienten x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung (B. 6) haben nun aber eine sehr einfache Bedeutung. Denn wenn wir wieder von (B. 6) mittelst (B. 7) nach (B. 5) übergehen, und an diese Gleichung mit $S.(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$ operiren, so entsteht

$$XS\rho(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3) S\alpha\beta\gamma + x_4 a_4 S\delta(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)$$

oder

$$X[S\rho(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - S\alpha\beta\gamma] = x_4 a_4 [S\delta(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - S\alpha\beta\gamma]$$

somit

$$\frac{a_4 x_4}{X} = \frac{S(\rho - \alpha)(\rho - \beta)(\rho - \gamma)}{S(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)} = \frac{\text{Volumen Ppd.PABC}}{\text{Volumen Ppd.DABC}},$$

wenn A, B, C, D, P die durch α, β, γ, δ, ρ dargestellten Punkte sind.

Bezeichnet man schliesslich das Lot aus P auf die Ebene ABC gefällt mit l^p_{abc}, so ist

$$\frac{a_4 x_4}{X} = \frac{l^p_{abc}}{l^d_{abc}}.$$

und hieraus

$$a_1 l^a_{bcd} x_1 : a_2 l^b_{acd} x_2 : a_3 l^c_{abd} x_3 : a_4 l^d_{abc} x_4 =$$
$$l^p_{bcd} : l^p_{acd} : l^p_{abd} : l^p_{abc}.$$

Augenscheinlich sind x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten des Punktes P in Bezug auf das Fundamentaltetraeder ABCD. Auch kann geschrieben werden

$$a_1 x_1 : a_2 x_2 : a_3 x_3 : a_4 x_4 =$$
$$\text{Vol. PBCD} : \text{Vol. PCDA} : \text{Vol. PDAB} : \text{Vol. PABC}.$$

26. Wenn nun zwischen x, y, z in (B. 1) oder zwischen x, y, z, u in (B. 2) in Verbindung mit (B. 3) irgend eine Relation n^{ten} Grades

$$F(x, y, z) = C \text{ oder } F_1 (x, y, z, u) = C_1 \; . \; . \; . \; . \; (\text{B. } 8)$$

angenommen wird, so beschreibt der Punkt P eine Fläche n^{ten} Grades. Anstatt der zweiten der Gleichungen (B. 8) kann nun auch

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{B. } 9)$$

treten, wo U eine homogene Funktion n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4 ist.

Die erste der Gleichungen (B. 8) und die Gleichung (B. 1) bilden zusammen die gewöhnliche Skalargleichung der Fläche, während das System der Gleichungen (B. 6), (B. 9) die homogene Skalargleichung der Fläche genannt werden kann.

Es ist hieraus ersichtlich, dass alle Betrachtungen, welche in der analytischen Geometrie bei homogenen Coordinaten angestellt werden, ohne Weiteres auch in der Methode der Quaternionen anwendbar bleiben, sodass eine nähere Erörterung überflüssig sein würde, zumal die Symbole der Quaternionenrechnung keine weitere Anwendung dabei finden.

Anders aber gestaltet sich die Sache bei der Benutzung der Gleichungen

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma, \quad F(x, y, z) = C.$$

Hierbei ist nämlich

$$x = \frac{S\beta\gamma\rho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad y = \frac{S\gamma\alpha\rho}{S\alpha\beta\gamma}, \quad y = \frac{S\alpha\beta\rho}{S\alpha\beta\gamma} \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{B. } 10)$$

Setzt man nun weiter

$$-S\alpha_1\beta_1\gamma_1 V\beta\gamma = \alpha_1, \quad -S\alpha_1\beta_1\gamma_1 V\gamma\alpha = \beta_1,$$
$$-S\alpha_1\beta_1\gamma_1 V\alpha\beta = \gamma_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{B. } 11)$$

somit

$$-(S\alpha_1\beta_1\gamma_1)^3\, S.\, V\beta\gamma\, V\gamma\alpha\, V\alpha\beta = S\alpha_1\beta_1\gamma_1$$

und beachtet man die Gleichung

$$S.\, V\beta\gamma\, V\gamma\alpha\, V\alpha\beta = -(S\alpha\beta\gamma)^2,$$

welche im Art. 159 der Theorie bewiesen ist, so ergibt sich

$$S\alpha\beta\gamma\, S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = -1,$$

daher

$$V\beta\gamma = \alpha_1 S\alpha\beta\gamma,\quad V\gamma\alpha = \beta_1 S\alpha\beta\gamma,\quad V\alpha\beta = \gamma_1 S\alpha\beta\gamma \quad . \text{ (B. 12)}$$

Hieraus folgt nun aber weiter

$$S\alpha\alpha_1 = 1\,,\quad S\alpha\beta_1 = S\alpha\gamma_1 = 0$$

und

$$\alpha S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = V\beta_1\gamma_1,\quad \beta S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = V\gamma_1\alpha_1,\quad \gamma S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = V\alpha_1\beta_1. \text{ (B. 13)}$$

Aus (B. 1) (B. 10) entstehen jetzt die nachfolgenden Gleichungen

$$\rho S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = x\, V\beta_1\gamma_1 + y\, V\gamma_1\alpha_1 + z\, V\gamma_1\alpha_1 \;.\;.\;.\; \text{(B. 14)}$$

$$x = S\alpha_1\rho\,,\quad y = S\beta_1\rho\,,\quad z = S\gamma_1\rho. \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(B. 15)}$$

in Übereinstimmung mit (*c*. 46) und die Skalargleichung der Fläche lautet

$$F(S\alpha_1\rho\,,\; S\beta_1\rho\,,\; S\gamma_1\rho) = C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(B. 16)}$$

27. Die ursprüngliche Gleichung

$$F(x\,,\; y\,,\; z) = C$$

gestattet im Allgemeinen die Grössen x, y, z mittelst zwei unabhängig veränderlicher Skalaren u, v auszudrücken. Dadurch geht (B. 1) über in

$$\rho = \Phi_1(u, v)\,\alpha + \Phi_2(u, v)\,\beta + \Phi_3(u, v)\,\gamma \;.\;.\;.\;.\; \text{(B. 17)}$$

eine Gleichung, welche wir die Vektorgleichung der Fläche nennen.

Zwei Gleichungen von der Form (B. 16) zusammen bilden die Skalargleichungen einer Curve im Raume oder in der Ebene und die Vektorgleichung einer Curve enthält nur eine veränliche Skalargrösse

$$\rho = f_1(u)\,\alpha + f_2(u)\,\beta + f_3(u)\,\gamma. \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(B. 18)}$$

28. Nachdem nun diese allgemeinen Principien dargelegt sind, wenden wir uns der speciellen Betrachtung des Punktes und der relativen Lage mehrerer Punkte im Raume zu.

Im Art. 22 der Theorie, Gleichung (*a*. 37), haben wir schon gesehen, dass der Vektor ρ eines Punktes P der Geraden AB, welche die Punkte α, β verbindet, oder deren Verlängerung, ausgedrückt werden kann durch

$$\rho = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}, \text{ wenn } \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(B. 19)}$$

Für Punkte auf der Strecke AB ist $y : x$ positiv. Speciell ist für die Mitte der Strecke

$$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und für den unendlich fernen Punkt

$$\nu = k(\alpha - \beta), \; \mathit{Lim.}\, k = \infty .$$

Das Doppelverhältnis des Punktepaares ρ, ρ_1 zum Punktepaare α, β ist

$$\frac{y}{x} : \frac{y_1}{x_1} = \frac{\rho - \alpha}{\rho - \beta} : \frac{\rho_1 - \alpha}{\rho_1 - \beta}$$

und es besteht harmonische Lage der Punkte, wenn

$$\frac{\rho - \alpha}{\rho - \beta} = - \frac{\rho_1 - \alpha}{\rho_1 - \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B. 20)}$$

Diese Gleichung schliesst jedoch die harmonische Lage der vier Punkte nicht unbedingt ein, wenn nicht hinzugefügt wird, dass die Punkte ρ, ρ_1, α, β in einer Geraden enthalten sind. Wohl kann aus derselben unmittelbar geschlossen werden, dass ρ, ρ_1, α, β vier in einer Ebene enthaltene Punkte sind. Zu jedem Punkte ρ im Raume kann jedoch der zugehörige Punkt ρ_1 in folgender Weise construirt werden.

Man lege eine Ebene durch die Punkte ρ, α, β oder P, A, B und verlängere AP mit $\mathrm{PA_1} = \mathrm{AP}$. Nun construire man das Dreieck $\mathrm{AA'B} \backsim \triangle\, \mathrm{A_1AB}$, so dass A′ und $\mathrm{A_1}$ an verschiedene Seiten von AB liegen. Die Mitte von AA′ ist der gesuchte Punkt $\mathrm{P_1}$. Denn, weil $\triangle\, \mathrm{AA'B} \backsim \triangle\, \mathrm{A_1AB}$, so ist auch $\triangle\, \mathrm{A_1PB} \backsim \triangle\, \mathrm{AP_1B}$, daher

$$\frac{\mathrm{PA_1}}{\mathrm{PB}} = \frac{\mathrm{P_1A}}{\mathrm{P_1B}} = - \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}}.$$

Die Punkte P, $\mathrm{P_1}$ sind mit A, B concyclisch, wie leicht bewiesen wird. Man könnte die Verwandtschaft zwischen den Punkten P, $\mathrm{P_1}$, A, B die allgemeine harmonische Verwandtschaft nennen.

29. Die Grösse

$$\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}:\frac{\rho_1-\alpha}{\rho_1-\beta},$$

welche mit der Bedingung verbunden, dass ρ, ρ_1, α, β terminocollinear sind, das Doppelverhältnis der Punktepaare P, P_1; A, B ausdrückt, ist für vier willkürliche Punkte einem Quaternion gleich. Setzen wir

$$\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}:\frac{\rho_1-\alpha}{\rho_1-\beta}=q \text{ oder } \frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}(\alpha-\beta):\frac{\rho_1-\alpha}{\rho_1-\beta}(\alpha-\beta)=q \quad \text{(B.21)}$$

so kann q augenscheinlich bei willkürlicher Wahl von α, β, ρ nicht beliebig gewählt werden, weil $Ax.q$ senkrecht sein muss zum Vektor $(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\alpha-\beta)$.

Wir wollen nun im weiteren voraussetzen α, β, q seien beliebig angenommen; ist $Ax.q \| \lambda$, so ergibt sich

$$S\lambda(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\alpha-\beta)=0$$

oder

$$\rho^2 S(\alpha-\beta)\lambda - S.\rho[\beta(\alpha-\beta)\lambda+\alpha\lambda(\alpha-\beta)]+S\lambda\alpha\beta(\alpha-\beta)=0.$$

Der Punkt ρ ist somit auf eine durch die Punkte α, β hindurchgehende Kugelfläche beschränkt.

Indem man auf die aus (B. 21) hervorgehende Gleichnng

$$\frac{(\rho-\alpha)}{(\rho-\beta)}(\alpha-\beta)=q\frac{(\rho_1-\alpha)}{(\rho_1-\beta)}(\alpha-\beta)$$

mit $S.$ operirt, erhält man für den geometrischen Ort des Punktes ρ_1 die nämliche Kugelfläche.

Die Gleichung (B. 21) stellt daher bei willkürlich angenommenen α, β, q eine Correspondenz auf einer Kugelfläche dar.

Wählt man einen willkürlichen Punkt P der ersten Figur, so kann der zugehörige Punkt P_1 leicht construirt werden. Legt man nämlich durch PAB eine Ebene und construirt das Dreieck ACB dem Dreieck PAB ähnlich, so dass C und P an verschiedenen Seiten von AB liegen, so ist

$$AC=\frac{PA}{PB}AB=\frac{\rho-\alpha}{\rho-\beta}(\beta-\alpha)$$

daher $AC \perp Ax.q$. Es sei nun $AC:AD=q$. Wenn sodann noch in der Ebene ADB das Dreieck, P_1AB dem anderen ADB ähnlich construirt wird, so ist P_1 gefunden.

Beschreibt der Punkt P den gewählten ebenen Kreisschnitt der Kugelfläche, so beschreibt der Punkt C die Gerade AC, D ebenfalls die Gerade AD und P_1 endlich durchläuft einen anderen Kreisschnitt der Kugelfläche.

Aus dem Vorhergehenden erhellt unmittelbar, dass die Geraden AC und AD die Kugelfläche berühren. Weil aber der Quotient dieser Vektoren dem gegebenen Quaternion q gleich ist, so wird die Kugel aus den gegebenen Grössen α, β, q leicht construirt. Indem A und B umgetauscht werden, erhält man eine zweite Kugelfläche, auf der ρ und ρ_1 enthalten sein können.

Nur wenn q eine skalare Grösse ist, sodass $Ax.q$ unbestimmt wird, stellt (B. 21) eine allgemeine Verwandtschaft zwischen zwei Punkten im Raume dar und ein correspondirendes Punktepaar kann in ähnlicher Weise wie bei der allgemeinen harmonischen Verwandtschaft construirt werden.

30. Wenn drei Punkte α, β, γ gegeben sind, so ist

$$TV(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=TV(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$$

dem doppelten Inhalte des aus denselben gebildeten Dreiecks gleich, und $UV(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$ ist der zur Ebene desselben senkrechte Einheitsvektor. Diese Ergebnisse sind gelegentlich schon mehrmals benutzt worden.

Befinden sich in den Punkten α_1, α_2, ... α_n Massen m_1, m_2, ... m_n, so wird der Schwerpunkt dieses Massensystems gesucht. Der Schwerpunkt ρ_1 der Massen m_1, m_2 ist nach (B. 19) bestimmt durch

$$(m_1+m_2)\rho_1=m_1\rho_1+m_2\rho_2.$$

Derjenige der Masse m_1+m_2 im Punkte ρ_1 und der Masse m_3 in α_3 ist ebenfalls bestimmt durch

$$\begin{aligned}(m_1+m_2+m_3)\rho_3&=(m_1+m_2)\rho_1+m_3\alpha_3\\&=m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3,\end{aligned}$$

sodass wir für den Schwerpunkt σ des ganzen Systems schliessen

$$\sigma\sum_1^n m=\sum_1^n m\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(B. 22)}$$

Einige Anwendungen mögen hier eingeschaltet werden.

1°. Es seien zwei Vierseiten $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ gegeben. Wenn nun Vektoren OA, OB, OC, OD gezogen werden, welche den Vektoren A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 gleich sind, so werden vier Massen, welche den Volumen OBCD, OADC, ODAB, OCBA proportional sind, denselben Schwerpunkt haben, mögen dieselben in A_1, B_1, C_1, D_1 oder in A_2, B_2, C_2, D_2 sich befinden.

Es seien A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 durch die Vektoren α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, β_2, γ_2, δ_2 gegeben in Bezug auf O als Vektorenursprung und es seien noch

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha, \quad \beta_2 - \beta_1 = \beta, \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma, \quad \delta_2 - \delta_1 = \delta \qquad \text{(B. 23)}$$

gesetzt. Die Volumina der Vierseiten OBCD, OADC u. s. w. sind sodann proportional zu

$$S\beta\gamma\delta, \quad S\alpha\delta\gamma, \quad S\delta\alpha\beta, \quad S\gamma\beta\alpha$$

und man hat zu zeigen

$$\alpha_1 S\beta\gamma\delta + \beta_1 S\alpha\delta\gamma + \gamma_1 S\delta\alpha\beta + \delta_1 S\gamma\beta\alpha =$$
$$= \alpha_2 S\beta\gamma\delta + \beta_2 S\alpha\delta\gamma + \gamma_2 S\delta\alpha\beta + \delta_2 S\gamma\beta\alpha$$

oder mit Bezug auf (B. 23)

$$\alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\alpha\delta\gamma + \gamma S\delta\alpha\beta = \delta S\gamma\beta\alpha = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach (c. 45) eine Identität.

2°. Wenn man auf die Perpendikel, aus den Ecken einer Vierseite ABCD auf die correspondirenden Seiten einer zweiten Vierseite $A_1B_1C_1D_1$ gefällt, Strecken AA′, BB′, CC′, DD′ nimmt, welche den Längen der Perpendikel aus A_1, B_1, C_1, D_1 auf die gegenüberliegenden Seiten der Vierseite $A_1B_1C_1D_1$ gefällt umgekehrt proportional sind, so haben die Vierseiten A′B′C′D′, ABCD denselben Schwerpunkt.

Es seien α, β, γ, δ; α_1, β_1, γ_1, δ_1 die Ecken der zwei Vierseiten. Die Ebene, durch die Punkte B_1, C_1, D_1 gelegt, ist nach Art. 95 der Theorie

$$S\rho V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 + \delta_1\beta_1) - S\beta_1\gamma_1\delta_1 = 0.$$

Es sei weiter $\alpha_1 + x V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 + \delta_1\beta_1)$ der Fusspunkt des Lotes aus A_1 auf diese Ebene gefällt, so ist

$$S\alpha_1(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 + \delta_1\beta_1) - xN V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 + \delta_1\beta_1) - S\beta_1\gamma_1\delta_1 = 0,$$

sodass jenes Lot ist

$$\frac{S\beta_1\gamma_1\delta_1 - S\alpha_1\gamma_1\delta_1 + S\alpha_1\beta_1\delta_1 - S\alpha_1\beta_1\gamma_1}{V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\delta_1 + \delta_1\beta_1)}.$$

In gleicher Weise wird für das Lot aus B_1 auf die Ebene $C_1D_1A_1$ gefällt, gefunden

$$\frac{-S\beta_1\gamma_1\delta_1+S\alpha_1\gamma_1\delta_1-S\alpha_1\beta_1\delta_1+S\alpha_1\beta_1\gamma_1}{V(\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1+\delta_1\alpha_1)}$$

u. s. w., sodass Strecken, welche diesen Loten umgekehrt proportional sind, durch

$$cV(\beta_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1+\delta_1\beta_1),\quad -cV(\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1+\delta_1\alpha_1),$$
$$cV(\alpha_1\beta_1+\beta_1\delta_1+\delta_1\alpha_1),\quad -cV(\alpha_1\beta_1+\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1)$$

dargestellt werden müssen. Die Punkte A'B'C'D' haben somit die Vektoren

$$\begin{aligned}\alpha'&=\alpha+cV(\beta_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1+\delta_1\beta_1)\\ \beta'&=\beta-cV(\alpha_1\gamma_1+\gamma_1\delta_1+\delta_1\alpha_1)\\ \gamma'&=\gamma+cV(\alpha_1\beta_1+\beta_1\delta_1+\delta_1\alpha_1)\\ \delta'&=\delta-cV(\alpha_1\beta_1+\beta_1\gamma_1+\gamma_1\alpha_1)\end{aligned}$$

und weil nun

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=\alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

so ist der Satz bewiesen.

31. Im Artikel 22 der Theorie haben wir gesehen, dass, wenn α, β zwei beliebige Vektoren OA, OB bedeuten,

$$\rho=x\alpha+y\beta$$

ein Vektor OP in der Ebene jener ist und dass $xT\alpha$, $yT\beta$ die Längen der Componenten von ρ in den Richtungen von α, β sind; somit gilt die Relation

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin\angle \mathrm{POB}}{\sin\angle \mathrm{POA}}\,\frac{T\beta}{T\alpha}$$

und wenn wir noch den Vektor $\rho_1=x_1\alpha+y_1\beta$ ziehen, so ist

$$\mathrm{D}=\frac{x}{y}:\frac{x_1}{y_1}$$

das Doppelverhältnis der Vektoren ρ, ρ_1 zu α, β. Weil aber

$$x=\frac{V\rho\beta}{V\alpha\beta},\quad y=\frac{V\alpha\rho}{V\alpha\beta},$$

so kann auch für jenes Doppelverhältnis geschrieben werden

$$\mathrm{D}=\frac{V\rho\beta}{V\rho\alpha}:\frac{V\rho_1\beta}{V\rho_1\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(\mathrm{B}.\,24)$$

und die vier Vektoren bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$\frac{V\rho\beta}{V\rho\alpha}=-\frac{V\rho_1\beta}{V\rho_1\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(\mathrm{B}.\,25)$$

Die Gleichung (B. 25) schliesst aber auch unbedingt die harmonische Verwandtschaft der vier gewählten Vektoren ein. Denn schreibt man dieselbe in die Form

$$\frac{V\rho\beta\, V\rho\alpha}{V^2\rho\alpha} = -\frac{V\rho_1\beta\, V\rho_1\alpha}{V^2\rho_1\alpha}$$

und operirt mit V, so wird erhalten

$$\frac{\rho S\alpha\beta\rho}{V^2\rho\alpha} = -\frac{\rho_1 S\alpha\beta\rho_1}{V^2\rho_1\alpha}.$$

Die Voraussetzung $\rho_1 = x\rho$ ergibt eine Absurdität; somit muss

$$S\alpha\beta\rho = S\alpha\beta\rho_1 = 0$$

sein und nun spricht (B. 25) unmittelbar die harmonische Verwandtschaft aus.

32. Für vier willkürliche Vektoren ρ, ρ_1, α, β ist die Grösse D im allgemeinen ein Quaternion.

Dass die vier gewählten Vektoren complanar sind, kann leicht dadurch ausgedrückt werden, dass dieselben sämtlich zu einem einzigen Vektor λ senkrecht sind. Wir fragen nun das Doppelverhältnis der Vektoren

$$V\lambda\alpha,\quad V\lambda\beta,\quad V\lambda\gamma,\quad V\lambda\delta,$$

wenn α, β, γ, δ willkürliche Vektoren bedeuten.

Nach (c. 45) ist

$$\gamma S\alpha\beta\lambda = \alpha S\beta\lambda\gamma + \beta S\lambda\alpha\gamma + \lambda S\alpha\beta\gamma$$

$$\delta S\alpha\beta\lambda = \alpha S\beta\lambda\delta + \beta S\lambda\alpha\delta + \lambda S\alpha\beta\delta.$$

Setzt man die hieraus erhaltenen Werte für γ, δ in die Ausdrücke $V\lambda\gamma$, $V\lambda\delta$, so werden die vier gegebenen Vektoren

$$V\lambda\alpha,\ V\lambda\beta,\ V\lambda\alpha\frac{S\beta\lambda\gamma}{S\alpha\beta\lambda} + V\lambda\beta\frac{S\lambda\alpha\gamma}{S\alpha\beta\lambda},\ V\lambda\alpha\frac{S\beta\lambda\delta}{S\alpha\beta\lambda} + V\lambda\beta\frac{S\lambda\alpha\delta}{S\alpha\beta\lambda},$$

wodurch man den im vorigen Artikel erörterten Fall erhalten hat. Das gesuchte Doppelverhältnis ist somit

$$D_1 = \frac{S\beta\lambda\gamma}{S\lambda\alpha\gamma} : \frac{S\beta\lambda\delta}{S\lambda\alpha\delta} = \frac{S\lambda\beta\gamma}{S\lambda\alpha\gamma} : \frac{S\lambda\beta\delta}{S\lambda\alpha\delta} \ldots\ldots \quad \text{(B. 26)}$$

und dieses Resultat wird uns nachher nützlich sein.

33. Wir wollen nun weiter zur Betrachtung der Ebene übergehen. Wenn wir dieselbe als die Fläche ersten Grades definiren, so ist es leicht hieraus die Quaterniongleichung der Ebene zu finden.

Es ist sodann nämlich

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma$$

mit

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ . . . . } \quad \text{(B. 27)}$$

zu verbinden. Wenden wir nun die Transformation des Artikels 26 an und beachten speciell die Gleichung (B. 15), so geht (B. 27) über in

$$S(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)\rho + d = 0.$$

Führt man anstatt $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1$ einen neuen Vektor $-\lambda$ ein, so wird die Gleichung der Ebene

$$S\lambda\rho = d \text{ . . . . } \quad \text{(B. 28)}$$

Die geometrische Bedeutung derselben ist evident. Nach (c. 24) folgt hieraus nämlich

$$T\rho T\lambda \cos \angle \frac{\rho}{\lambda} = -d$$

somit

$$T\rho \cos \angle \frac{\rho}{\lambda} = \text{constant.}$$

Die Gleichung (B. 28) sagt somit aus, dass die Projection der Verbindungsgeraden OP des Vektorenursprungs O mit einem beliebigen Punkte P der Ebene auf die Richtung λ constante Länge hat. Der Vektor λ ist somit der Normale der Ebene parallel.

Zwei Ebenen sind einander parallel, wenn ihre Gleichungen die Form haben

$$S\lambda\rho = d, \ S\lambda\rho = e.$$

Im allgemeinen ist der Winkel zwischen zwei Ebenen

$$S\lambda\rho = d, \ S\mu\rho = e$$

dem Winkel zwischen den Vektoren λ, μ gleich. Dieselben sind senkrecht zu einander, wenn die Bedingung $S\lambda\mu = 0$ erfüllt wird. Die Ebenen

$$S\lambda\rho = d, \ S\lambda\nu\rho = e,$$

wo λ, ν willkürliche Vektoren bedeuten, werden daher stets sich rechtwinklig schneiden.

Schreibt man die Gleichung der Ebene wie nachstehend

$$S\mu\rho = 1 \text{ . . . . } \quad \text{(B. 29)}$$

so wollen wir dieselbe die gewöhnliche Gleichung der Ebene nennen.

Im Artikel 95 der Theorie sahen wir schon, dass die Gleichung der Ebene, welche durch den Punkt α senkrecht zum Vektor β gebracht wird, ist

$$S\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0,$$

oder wenn mit α^2 multiplicirt wird,

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 30)$$

und weiter, dass die Gleichung der Ebene, welche die drei gegebenen Punkte α, β, γ enthält, in der Form

$$S\rho(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = S\alpha\beta\gamma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 31)$$

erscheint.

Wir wollen nicht näher auf diese Formen eingehen. Nur mögen einige Grössen, welche bei den Anwendungen mehrmals vorkommen, angegeben werden und im allgemeinen sei dabei die Form (B. 30) benutzt, welche durch die Voraussetzung $S\alpha\beta = d$ unmittelbar in (B. 28) übergeht.

34. Wir suchen nun zuerst das Lot, aus einem willkürlichen Punkte π auf die Ebene gefällt, zu bestimmen.

Weil β die Normale der Ebene darstellt, so kann für den Fusspunkt jenes Lotes gesetzt werden

$$\rho = \pi + x\beta,$$

und die Substitution dieses Wertes in (B. 30) ergibt

$$x\beta^2 = -S(\pi - \alpha)\beta,$$

somit

$$\rho = \pi - \beta^{-1}S(\pi - \alpha)\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 32)$$

Das Lot selbst ist hiernach durch

$$\lambda = -\beta^{-1}S(\pi - \alpha)\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 33)$$

dargestellt und die Länge beträgt $\pm S(\pi - \alpha)U\beta$, ein Resultat, welches sehr leicht behalten werden kann.

Specieller wird die Senkrechte, aus dem Vektorenursprung auf die Ebene gefällt, durch

$$\beta^{-1}S\alpha\beta$$

dargestellt, und wenn wir die gewöhnliche Form der Ebenengleichung gewählt hätten, so wäre dieser Ausdruck einfach in β^{-1} übergegangen.

Die Distanz zweier parallelen Ebenen

$$S\alpha\rho = a\,,\quad S\alpha\rho = b$$

kann nun auch leicht angegeben werden. Es ist dieselbe nämlich, wenn aus dem Punkte P(π) eine Senkrechte auf beide gefällt wird,

$$\alpha^{-1}(S\pi\alpha - a) + \alpha^{-1}S(\pi\alpha - b) = (a - b)\alpha^{-1}.$$

35. Die Aufgabe: die Durchschnittsgerade zweier Ebenen

$$S\alpha\rho = a\,,\quad S\beta\rho = b$$

zu bestimmen, ist schon im Art. 179 der Theorie ausführlich erörtert. Es wurde daselbst gefunden (*f.* 212)

$$\rho = \frac{a\beta - b\alpha}{V\alpha\beta} + x\,V\alpha\beta$$

oder

$$V.\rho\,V\alpha\beta = a\beta - b\alpha.$$

Wie in der analytischen Geometrie kann weiter auch hier dargetan werden, dass die Gleichung

$$(S\alpha\rho - a) + k(S\beta\rho - b) = 0 \;\ldots\ldots\; \text{(B. 34)}$$

wo k eine beliebige skalare Grösse ist, eine jene Durchschnittsgerade enthaltende Ebene ist, sodass bei veränderlichem k ein Ebenenbüschel erhalten ist. Und indem man aus (B. 34) k auflöst und die Relation (B. 33) beachtet, so erkennt man unmittelbar, dass $k\dfrac{T\beta}{T\alpha}$ dem negativen Verhältnis der Längen der Perpendikel gleich kommt, welche aus einem Punkte der Ebene (B. 34) auf die Ebenen

$$S\alpha\rho = a\,,\quad S\beta\rho = b$$

gefällt werden, sodass wenn k_1, k_2 die Werte der skalaren Grösse k in (B. 34) sind, welche zwei Ebenen des Büschels angehören, das Doppelverhältnis dieses Ebenenpaares zum gegebenen wieder durch $k_1 : k_2$ ausgedrückt wird.

Die Bedingung, welche ausdrückt, dass drei Ebenen

$$S\alpha\rho = a\,,\quad S\beta\rho = b\,,\quad S\gamma\rho = c$$

eine gemeinsame Gerade enthalten, kann wie in der analytischen Geometrie in zwei Formen angegeben werden. In diesem Falle sind nämlich die Normalen, zu jenen Ebenen α, β, γ aus einem Punkte gezogen, complanar, somit

$$S\alpha\beta\gamma = 0.$$

Dieselbe Relation wird erhalten, wenn wir ρ aus den beiden ersteren Gleichungen auflösen und den erhaltenen Wert in die dritte Gleichung einsetzen. Es ergibt sich dann weiter

$$S(a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta)\,V\alpha\beta = 0,$$

oder weil der Gleichung

$$S\alpha\beta\gamma = 0$$

zufolge

$$a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta$$

der Richtung nach mit $V\alpha\beta$ zusammenfällt

$$a\,V\beta\gamma + b\,V\gamma\alpha + c\,V\alpha\beta = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(B. 35)}$$

und dies ist die eine der erwähnten Formen.

Auf andere Weise ergibt sich, dass den Ebenen eine Gerade gemeinsam ist, wenn drei skalare Grössen x, y, z gefunden werden können, derart, dass die Summe

$$x(S\alpha\rho - a) + y(S\beta\rho - b) + z(S\gamma\rho - c)$$

identisch verschwindet.

Der Durchschnittspunkt dreier beliebigen Ebenen ist im Art. 179 der Theorie schon bestimmt. Es wird für jetzt genügen zu bemerken, dass dieser Punkt ins Unendliche fällt, wenn

$$S\alpha\beta\gamma = 0$$

ohne die Gültigkeit der Gleichung (B. 35) anzunehmen.

Im allgemeinen wird

$$x(S\alpha\rho - a) + y(S\beta\rho - b) + z(S\gamma\rho - b) = 0$$

eine Ebene darstellen, welche den Schnittpunkt der drei gegebenen Ebenen enthält, und vier Ebenen

$$S\alpha\rho = a\,,\; S\beta\rho = b\,,\; S\gamma\rho = c\,,\; S\delta\rho = d$$

gehen durch einen Punkt, entweder wenn vier Skalare x, y, z, u gefunden werden können, welche die Summe

$$x(S\alpha\rho - a) + y(S\beta\rho - b) + z(S\gamma\rho - c) + u(S\delta\rho - d)$$

identisch verschwinden machen, oder wenn

$$aS\beta\gamma\delta - bS\alpha\gamma\delta + cS\alpha\beta\delta - dS\alpha\beta\gamma = 0\,,$$

wie man findet, wenn man ρ nach Art. 179 der Theorie aus den ersteren drei Gleichungen auflöst und den erhaltenen Wert in die vierte einträgt.

36. Bevor wir jetzt zur Geraden übergehen, wollen wir untersuchen, wie zwei Räume mittelst Quaternionen projektivisch auf einander bezogen werden können oder vielmehr specieller wie die Collinearität der Räume ausgedrückt wird.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ fünf beliebig gewählte feste Punkte $A_1, A_2, \ldots A_5$ des einen Systems, denen die Punkte, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ oder $B_1, B_2, \ldots B_5$ des anderen entsprechen, während wir mit ρ, σ zwei entsprechende variable Punkte P, Q des Raumes bezeichnen.

Bringt man ein Ebenenbüschel durch die Gerade $A_1 A_2$ welches die Punkte A_3, A_4, A_5, P enthält und ein entsprechendes durch $B_1 B_2$ und die Punkte B_3, B_4, B_5, Q, so müssen die Doppelverhältnisse gleich sein. Nun ist das Doppelverhältnis des ersten Büschels demjenigen der Vektoren

$$V(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3),\ V(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4),$$
$$V(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_5),\ V(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\rho)$$

gleich und dasselbe beträgt somit nach Art. 32

$$\frac{S(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)}{S(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_5)}:\frac{S(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\rho)}{S(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\rho)}=$$
$$=\frac{S\lambda_3\alpha_5-a_3}{S\lambda_4\alpha_5-a_4}:\frac{S\lambda_3\rho-a_3}{S\lambda_4\rho-a_4}$$

wenn der Kürze halber

$$V(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_4\alpha_1)=\lambda_3,\ V(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)=\lambda_4$$
$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_4=a_3,\ S\alpha_1\alpha_2\alpha_3=a_4$$

gesetzt wird. Bezeichnet man die Grössen, welche aus diesen Ausdrücken hervorgehen, wenn man darin $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ durch $\beta_1, \beta_2 \ldots$ ersetzt, mit μ_3, μ_4, b_3, b_4, so liefert die Gleichheit jener Doppelverhältnisse die Relation

$$\frac{S\lambda_3\rho-a_3}{S\lambda_4\rho-a_4}:\frac{S\lambda_3\alpha_5-a_3}{S\lambda_4\alpha_5-a_4}=\frac{S\mu_3\sigma-b_3}{S\mu_4\sigma-b_4}:\frac{S\mu_3\beta_5-b_3}{S\mu_4\beta_5-b_4}\quad\text{(B. 36)}$$

In gleicher Weise erhält man, indem Ebenenbüschel durch $A_2 A_3$, $B_2 B_3$ und auch noch durch $A_3 A_1$, $B_3 B_1$ gelegt werden, bei Einführung ähnlicher Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{S\lambda_2\rho-a_2}{S\lambda_4\rho-a_4}:\frac{S\lambda_2\alpha_5-a_2}{S\lambda_4\alpha_5-a_4}=\frac{S\mu_2\sigma-b_2}{S\mu_4\sigma-b_4}:\frac{S\mu_2\beta_5-b_2}{S\mu_4\beta_5-b_4}\\ \frac{S\lambda_1\rho-a_1}{S\lambda_4\rho-a_4}:\frac{S\lambda_1\alpha_5-a_1}{S\lambda_4\alpha_5-a_4}=\frac{S\mu_1\sigma-b_1}{S\mu_4\sigma-b_4}:\frac{S\mu_1\beta_5-b_1}{S\mu_4\beta_5-b_4}\end{aligned}\right\}\text{(B. 37)}.$$

$$V(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_2)=\lambda_1,\ V(\alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_1=\lambda_2$$
$$S\alpha_2\alpha_3\alpha_4=a_1,\ S\alpha_1\alpha_3\alpha_4=a_2.$$

Setzt man nun weiter allgemein

$$\frac{\lambda_i}{S\lambda_i\alpha_5 - a_i} = \xi_i, \quad \frac{a_i}{S\lambda_i\alpha_5 - a_i} = c_i,$$

$$\frac{\mu_i}{S\mu_i\beta_5 - b_i} = \eta_i, \quad \frac{b_i}{S\mu_i\beta_5 - b_i} = d_i,$$

so hat man die ξ_i, η_i, c_i, d_i als gegebene Grössen zu betrachten und die Gleichungen (B. 36) (B. 37) gehen über in die nachstehende

$$\frac{S\xi_i\rho - c_i}{S\xi_4\rho - c_4} = \frac{S\eta_i\sigma - d_i}{S\eta_4\sigma - d_4} \; (i = 1, 2, 3) \; . \; . \; . \; . \quad (B. 38)$$

Nun seien noch drei ganz beliebige Vektoren ζ_1, ζ_2, ζ_3 gewählt und die drei Produkte dieser Vektoren mit den entsprechenden der Gleichungen (B. 38) addirt. Dann entstehen in den Zählern Ausdrücke von der Form der dreigliedrigen Grundform der linearen Vektorfunktion, der wir im Art. 158 der Theorie begegneten. Setzen wir nun

$$\Sigma\zeta_i S\xi_i\rho = \Phi\rho, \quad \Sigma\zeta_i S\eta_i\sigma = \psi\sigma,$$

wo Φ, ψ lineare Vektorfunktionen bedeuten, und weiter

$$\Sigma c_i\zeta_i = \gamma, \quad \Sigma d_i\zeta_i = \delta,$$

so wird aus (B. 38) erhalten

$$\frac{\Phi\rho - \gamma}{S\xi_4\rho - c_4} = \frac{\psi\sigma - \delta}{S\eta_4\sigma - \delta_4} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 39)$$

und diese Gleichung enthält die allgemeine projektivische Verwandtschaft zweier Räume. Man ersieht leicht, dass im allgemeinen aus jeder Gleichung dieser Form drei Skalargleichungen von der Gestalt (B. 38) folgen müssen.

37. Wenn eine Relation von der Form

$$\frac{\Phi\rho + \alpha}{S\alpha_1\rho + a} = \frac{\psi\sigma + \beta}{S\beta_1\sigma + b} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 40)$$

zwischen den beiden Vektoren ρ, σ gegeben ist, so kann leicht σ in ρ ausgedrückt werden. Man operire nämlich an diese Gleichung mit $S.\psi'^{-1}\beta_1$, so wird erhalten

$$\frac{S(\rho\Phi'\psi'^{-1}\beta_1 + \alpha\psi'^{-1}\beta_1)}{S\alpha_1\rho + a} = \frac{S\beta_1\sigma + S\beta\psi'^{-1}\beta_1}{S\beta_1\sigma + b}$$

woraus $S\beta_1\sigma$ aufgelöst werden kann. Die Substitution dieses Wertes in (B. 40) ergibt den Wert von $\psi\sigma$, woraus wieder σ

durch Operation mit ψ^{-1} erhalten wird. Das Resultat

$$\sigma = -\psi^{-1}\beta + \frac{S\beta\psi'^{-1}\beta_1 - b}{S(\rho\Phi'\psi'^{-1}\beta_1 + \alpha\psi'^{-1}\beta_1) - S\alpha_1\rho - a}(\psi^{-1}\Phi\rho + \psi^{-1}\alpha)$$

kann in die Form

$$\sigma = \frac{\Phi_1\rho + \alpha_2}{S\alpha_3\rho + a_2} \dots\dots\dots\dots \text{(B. 41)}$$

geschrieben werden, wenn

$$\Phi_1\rho = (S\beta\psi'^{-1}\beta_1 - b)\psi^{-1}\Phi\rho - \psi^{-1}\beta S(\Phi'\psi'^{-1}\beta_1 - \alpha_1)\rho$$
$$\alpha_2 = \psi^{-1}\alpha(S\beta\psi'^{-1}\beta_1 - b) - \psi^{-1}\beta(S\alpha\psi'^{-1}\beta_1 - a)$$
$$\alpha_3 = \Phi'\psi'^{-1}\beta_1 - \alpha_1,\ a_2 = S\alpha\psi'^{-1}\beta_1 - a$$

gesetzt wird. Weil

$$S\pi\sigma = \frac{S\rho\Phi_1'\pi + S\alpha_2\pi}{S\rho\alpha_3 + a_2},$$

so ist augenscheinlich, dass der Grad einer Skalarfunktion $F\sigma$ durch projektivische Transformation nicht geändert werden kann, somit die Ordnung zweier entsprechenden Flächen übereinstimmen muss.

Es ist unmittelbar klar, dass bei Annahme der Relation (B. 40) der Ebene $S\alpha_1\rho + a = 0$ die andere $S\beta_1\sigma + b = 0$ entsprechen muss.

Einem unendlich fernen Punkt in der Richtung ρ entspricht im zweiten Raume nach (B. 41) der Punkt

$$\sigma = \frac{\Phi_1\rho}{S\alpha_3\rho}.$$

Wenn man an diese Gleichung mit $S.\Phi_1'^{-1}\alpha_3$ operirt, so entsteht

$$S\sigma\Phi_1'^{-1}\alpha_3 = 1$$

als Ort der Punkte des zweiten Systems, welche den unendlich fernen Punkten des ersten entsprechen.

38. Wir wollen nun weiter die Gerade betrachten.

Im Artikel 94 der Theorie fanden wir schon, dass

$$V\frac{\rho - \alpha}{\beta} = 0 \text{ oder } V(\rho - \alpha)\beta = 0 \dots \text{(B. 42)}$$

wenn mit β^2 multiplicirt wird, die Gleichung einer Geraden ist, welche durch den Punkt α dem Vektor β parallel gezogen wird, und dass

$$V(\rho - \alpha)(\beta - \alpha) = 0 \dots\dots\dots \text{(B. 43)}$$

die Gleichung der Geraden ist, welche die Punkte α, β verbindet.

Die erste Gleichung ist gleichbedeutend mit $\rho - \alpha = x\beta$ oder mit

$$\rho = \alpha + x\beta,$$

wenn x eine veränderliche skalare Grösse bedeutet.

Der Winkel zweier Geraden ist somit bekannt, wenn man deren Gleichungen in die Form

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0, \quad V(\rho - \alpha_1)\beta_1 = 0$$

schreibt, nämlich jener Winkel ist demjenigen des Quaternionen $\beta : \beta_1$ gleich. Die Geraden sind einander parallel, wenn $\beta_1 = \beta$ oder $V\beta\beta_1 = 0$; senkrecht zu einander, wenn $S\beta\beta_1 = 0$.

Wenn eine Ebene und eine Gerade

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0, \quad V(\rho - \gamma)\delta = 0$$

gegeben sind, so wird gefragt den Schnittpunkt zu bestimmen.

Trägt man den Vektor eines Punktes der Geraden

$$\rho = \gamma + x\delta$$

in die Gleichung der Ebene ein, so entsteht

$$xS\beta\delta = S(\alpha - \gamma)\beta$$

und der gesuchte Punkt ist daher

$$\rho = \gamma + \delta\frac{S(\alpha - \gamma)\beta}{S\delta\beta}.$$

Die Gerade ist somit der Ebene parallel, wenn

$$S\delta\beta = 0, \quad S(\alpha - \gamma)\beta \gtrless 0.$$

Sind jedoch die beiden Bedingungen

$$S\delta\beta = 0, \quad S(\alpha - \gamma)\beta = 0$$

zugleich erfüllt, so wird die gegebene Ebene die Gerade ganz enthalten. Aus diesen Relationen ergibt sich

$$\beta = xV\delta(\alpha - \gamma).$$

Die Ebene

$$S(\rho - \alpha)\delta(\alpha - \gamma) = 0 \text{ oder } S\rho\delta(\alpha - \gamma) = S\delta\alpha\gamma$$

wird somit bei willkürlichem Werte von α die Gerade

$$V(\rho - \gamma)\delta = 0$$

ganz enthalten. Setzt man $\alpha = \gamma + \mu$, so geht die Gleichung der Ebene über in

$$S(\rho - \gamma)\delta\mu = 0.$$

Im allgemeinen ist der Winkel zwischen der Geraden und der Normale zur Ebene gleich $\angle \beta : \delta$. Die Gerade ist somit senkrecht zur Ebene, wenn

$$V\beta\delta = 0.$$

39. Es wird die Gleichung der Ebene gesucht, welche den Punkt π und die Gerade

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0$$

enthält. Ist

$$S(\rho - \pi)\delta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B. 44)$$

diese Ebene, so muss ihrer Gleichung genügt werden durch

$$\rho = \alpha + u\beta$$

für alle Werte von u; daher muss

$$S(\pi - \alpha)\delta = 0\,, \; S\beta\delta = 0$$

somit

$$\delta = V\beta(\pi - \alpha),$$

wie man auch erhalten hätte durch die Betrachtung, dass die Normale δ zur Ebene senkrecht sein muss zu den beiden Vektoren β und $\pi - \alpha$.

Die Gleichung der gesuchten Ebene (B. 44) wird nun

$$S(\rho - \pi)\beta(\pi - \alpha) = 0 \quad \text{oder} \quad S\rho\beta(\pi - \alpha) = S\beta\pi\alpha$$

in Übereinstimmung mit dem vorhergehenden Artikel.

Wir suchen nun weiter das Lot aus dem Punkte π auf die Gerade

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B. 45)$$

Dieses Lot muss senkrecht zu β und zur Normale δ der den Punkt und die Gerade enthaltenden Ebene sein. Man kann somit für dessen Fusspunkt setzen

$$\begin{aligned} \rho &= \pi + x\,V.\beta\,V\beta(\pi - \alpha) \\ &= \pi + x[\beta^2(\pi - \alpha) - \beta S\beta(\pi - \alpha)]. \end{aligned}$$

Die Substitution in (B. 45) ergibt

$$1 + x\beta^2 = 0\,, \; x = -\beta^{-2},$$

sodass der Fusspunkt übergeht in

$$\rho = \alpha + \beta^{-1}S(\pi - \alpha)$$

und das Lot selbst ist

$$\lambda = \rho - \pi = \beta^{-1}\,V(\pi - \alpha)\beta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B. 46)$$

Seine Länge wird durch die Formel

$$TV(\pi - \alpha)U\beta$$

dargestellt, welche wieder leicht behalten werden kann.

Wir hätten zur Erreichung desselben Zweckes auch für den Fusspunkt einfach

$$\rho = \pi + \sigma$$

setzen können, wo σ den Bedingungen

$$V(\pi + \sigma - \alpha)\beta = 0, \quad S\sigma\beta = 0$$

unterworfen ist. Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$\sigma = \alpha - \pi + x\beta, \text{ sodann } S\beta(\alpha - \pi) + x\beta^2 = 0$$

daher weiter

$$\sigma = \alpha - \pi - \beta^{-1}S\beta(\alpha - \pi), \text{ u.s.w.}$$

Die Gleichung der Geraden, welche aus dem Punkte π senkrecht zur Geraden (B. 45) gezogen wird, kann nun unmittelbar hingeschrieben werden. Es ist dieselbe nämlich

$$V(\rho - \pi)\lambda = 0$$

oder nach (B. 46)

$$V.(\rho - \pi)\beta^{-1}V(\pi - \alpha)\beta = 0.$$

40. Wir können nun auch die Gleichung einer Ebene bestimmen, welche verschiedenen Bedingungen genügt.

Soll zum Beispiel die Ebene die Gerade

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0$$

enthalten, und senkrecht stehen zur Ebene

$$S(\rho - \gamma)\delta = 0,$$

so muss das Lot senkrecht zu β und δ sein und die Ebene muss den Punkt α enthalten; somit ist

$$S(\rho - \alpha)\beta\delta = 0,$$

die gesuchte Gleichung.

Soll die Ebene die erste der Geraden

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0, \quad V(\rho - \alpha_1)\beta_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(B. 47)}$$

enthalten und der zweiten parallel sein, so muss das Lot senkrecht zu β, β_1 sein; somit ist die gesuchte Gleichung

$$S(\rho - \alpha)\beta\beta_1 = 0.$$

Wenn die nämlichen Geraden (B. 46) gegeben sind, so wird die Bedingung gesucht, welche erfüllt sein muss, damit dieselben sich durchschneiden.

Es soll sodann der Wert

$$\rho = \alpha + x\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B. 48)}$$

auch der zweiten Gleichung genügen; demnach muss die Gleichung

$$V(\alpha - \alpha_1)\beta_1 + x V\beta\beta_1 = 0$$

bestehen. Wenn man nun an dieselbe mit $S.\beta$ operirt, so wird die Bedingung erhalten

$$S(\alpha - \alpha_1)\beta\beta_1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (B. 50)$$

Ist dieselbe erfüllt, so ist es leicht, die Gleichung der Ebene zu bestimmen, welche die beiden Geraden enthält. Die Normale zu jener Ebene soll nämlich senkrecht zu den Vektoren β, β_1 sein, und weil die Ebene den Punkt α enthält, so ist die gesuchte Gleichung

$$S(\rho - \alpha)\beta\beta_1 = 0.$$

Der Schnittpunkt der Geraden kann auch leicht bestimmt werden. Für denselben gelten nämlich die Gleichungen (B. 48) (B. 49). Aus der letzteren folgt

$$x = \frac{V(\alpha_1 - \alpha)\beta_1}{V\beta\beta_1},$$

somit nach (B. 47)

$$\rho = \frac{\beta V\alpha_1\beta_1 - \beta_1 V\alpha\beta + S\alpha\beta\beta_1}{V\beta\beta_1}.$$

41. Unter der Bedingung (B. 50) ist weiter

$$V(\rho - \alpha)\beta + x\, V(\rho - \alpha_1)\beta_1 = 0 \ldots\ldots \quad (B. 51)$$

die Gleichung einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden hindurchgeht und in der Ebene jener Geraden enthalten ist. Denn die Operation an (B. 50) mit $S.\beta_1$ ergibt

$$S(\rho - \alpha)\beta\beta_1 = 0,$$

d. h. der Punkt ρ genügt der Gleichung der durch die Geraden gelegten Ebene. Die Grösse

$$x = -\frac{V(\rho - \alpha)\beta}{V(\rho - \alpha_1)\beta_1} = -\frac{T\beta}{T\beta_1}\,\frac{TV(\rho - \alpha)U\beta}{TV(\rho - \alpha)U\beta_1}$$

ist wieder nach Art. 39 dem Produkte gleich aus der Constanten $-T\beta : T\beta_1$ mit dem Verhältnis der Längen der Perpendikel aus einem Punkte der Geraden (B. 51) auf die gegebenen Geraden gefällt.

Wenn die Geraden (B. 47) sich nicht schneiden, so folgt aus (B. 51) durch Operation mit $S.\beta$ und auch mit $S.\beta_1$

$$S(\rho - \alpha)\beta\beta_1 = 0\,, \quad S(\rho - \alpha_1)\beta\beta_1 = 0.$$

Diese Gleichungen sind aber nach dem im Anfange des Artikels 40 Erörterten diejenigen der Ebenen durch je eine Gerade parallel zur andern gelegt. Es folgt hieraus somit $T\rho = \infty$ und die Gleichung (B. 51) wird nun

$$V.\rho(\beta + x\beta_1) = 0\,,$$

d. h. sie stellt die unendlich fernen Punkte in einer den beiden gegebenen Geraden parallelen Ebene dar.

42. Eine letzte Aufgabe die beiden Geraden betreffend ist, wenn die Bedingung (B. 49) nicht erfüllt ist, die kürzeste Entfernung der Geraden zu bestimmen.

Dieses für spätere Anwendungen wichtige Problem wollen wir auf zwei ganz verschiedene Weisen lösen. Es seien erstens

$$\sigma = \alpha + u\beta\,, \quad \sigma_1 + v\beta_1$$

die Fusspunkte der kürzesten Entfernung auf den beiden Geraden, so ist

$$S(\sigma - \sigma_1)\beta = S(\sigma - \sigma_1)\,\beta_1 = 0$$

oder

$$S(\alpha - \alpha_1)\beta + u\beta^2 - vS\beta\beta_1 = 0,$$
$$S(\alpha - \alpha_1)\beta_1 + uS\beta\beta_1 - v\beta_1{}^2 = 0,$$

woraus u, v bestimmt werden können. Man findet zunächst

$$u = -\frac{S(\alpha - \alpha_1)\beta_1\, V\beta\beta_1}{V^2\beta\beta_1}\,, \quad v = -\frac{S(\alpha - \alpha_1)\beta\, V\beta\beta_1}{V^2\beta\beta_1}$$

sodass die Fusspunkte werden

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \alpha - \beta\;\; S.(\alpha - \alpha_1)\beta_1(V\beta\beta_1)^{-1} \\ \sigma_1 &= \alpha_1 - \beta_1\, S.(\alpha - \alpha_1)\beta\,(V\beta\beta_1)^{-1} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad \text{(B. 52)}$$

Das Lot selbst ist $\sigma - \sigma_1$; den Ausdruck dafür zu vereinfachen schreiben wir nach (*c*. 45)

$$(\alpha - \alpha_1)S.\beta\beta_1\, V\beta\beta_1 = \beta S.(\alpha - \alpha_1)\beta_1\, V\beta\beta_1 - \beta_1 S.(\alpha - \alpha_1)\beta\, V\beta\beta_1 +$$
$$+ V\beta\beta_1 S(\alpha - \alpha_1)\beta\beta_1$$

somit

$$\alpha - \alpha_1 = \beta S.(\alpha - \alpha_1)\beta_1(V\beta\beta_1)^{-1} - \beta_1 S.(\alpha - \alpha_1)\beta(V\beta\beta_1)^{-1} +$$
$$+ (V\beta\beta_1)^{-1}S(\alpha - \alpha_1)\beta\beta_1$$

und jetzt wird

$$\lambda = \sigma - \sigma_1 = (V\beta\beta_1)^{-1}S.(\alpha - \alpha_1)\beta\beta_1 \;.\;.\;.\;. \quad \text{(B. 53)}$$

Es erhellt hieraus, dass λ parallel ist zum Vektor $V\beta\beta_1$, wie evident ist.

Der zweite Weg, die kürzeste Entfernung zu bestimmen, besteht darin, dass man berechnet, unter welchen Bedingungen $T(\sigma-\sigma_1)$ einen Minimumwert erreicht. Nach (e. 22) muss sodann

$$d(\sigma-\sigma_1)^2 = 2S(\sigma-\sigma_1)(d\sigma - d\sigma_1) = 0 \quad . \; . \; . \quad (B. 54)$$

Weil aber

$$V(\sigma-\alpha)\beta = 0, \quad V(\sigma_1-\alpha_1)\beta_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (B. 55)$$

so ist

$$V\beta d\sigma = 0, \text{ mithin } d\sigma = x\beta \text{ und } d\sigma_1 = y\beta_1.$$

Hierin können x, y beliebig gewählt werden; bei Einführung dieser Werte in (B. 54) ergibt sich somit

$$S(\sigma-\sigma_1)\beta = 0, \quad S(\sigma-\sigma_1)\beta_1 = 0$$

oder

$$\sigma-\sigma_1 = u V\beta\beta_1$$

und durch Operation mit $S.V\beta\beta_1$ zur Bestimmung des Wertes von u

$$\sigma-\sigma_1 = (V\beta\beta_1)^{-1} S(\sigma-\sigma_1)\beta\beta_1.$$

Wenn man nun noch an die Gleichungen (B. 53) mit $S.\beta_1$ und $S.\beta$ operirt, so entsteht

$$S(\sigma-\alpha)\beta\beta_1 = 0, \quad S(\sigma_1-\alpha_1)\beta\beta_1 = 0$$

daher durch Subtraktion

$$S(\sigma-\sigma_1)\beta\beta_1 = S(\alpha-\alpha_1)\beta\beta_1$$

und schliesslich

$$\sigma-\sigma_1 = (V\beta\beta_1)^{-1} S(\alpha-\alpha_1)\beta\beta_1.$$

43. Drei Geraden

$$V(\rho-\alpha)\beta = 0, \quad V(\rho-\alpha_1)\beta_1 = 0, \quad V(\rho-\alpha_2)\beta_2 = 0. \quad (B. 56)$$

gehen durch einen einzigen Punkt, wenn drei Skalare x, y, z gefunden werden können, derart dass die Summe

$$xV(\rho-\alpha)\beta + yV(\rho-\alpha_1)\beta_1 + zV(\rho-\alpha_2)\beta_2$$

identisch verschwindet. Dies erfordert aber

$$x\beta + y\beta_1 + z\beta_2 = 0,$$

somit müssen die Vektoren β, β_1, β_2 und sodann auch die Geraden complanar sein. Das genannte Kriterium kann daher nur bei complanaren Geraden Anwendung finden.

Findet die Voraussetzung der Complanarität nicht statt, so wird die Bedingung, dass die drei Geraden in einem Punkte zusammenstossen, durch die gleichseitige Erfüllung der Gleichungen von der Form (B. 50)

$S(\alpha-\alpha_1)\beta\beta_1=0\,,\ S(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\beta_2=0,\ S(\alpha_2-\alpha)\beta_2\beta=0$ (B. 57)

ausgesprochen. Trifft dies zu, so kann der Schnittpunkt der Geraden leicht symmetrisch in die Grössen α, α_1, α_2, β, β_1, β_2 ausgedrückt werden. Aus (B. 56) ergibt sich nämlich bei Multiplikation jener Gleichungen durch $V\beta_1\beta_2$, $V\beta_2\beta$, $V\beta\beta_1$ bzhw., Addition der Resultate und nachherige Operation mit V.

$$2(\beta S\beta_1\beta_2\rho+\beta_1 S\beta_2\beta\rho+\beta_2 S\beta\beta_1\rho)=$$
$$=V(V\alpha\beta\, V\beta_1\beta_2+V\alpha_1\beta_1\, V\beta_2\beta+V\alpha_2\beta_2\, V\beta\beta_1)$$

somit nach (*c*. 45) (*c*. 44)

$$2\rho S\beta\beta_1\beta_2=\beta S(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1\beta_2+\beta_1 S(\alpha_2+\alpha)\beta_2\beta+\beta_2 S(\alpha+\alpha_1)\beta\beta_1$$

und nach (B. 57)

$$\rho S\beta\beta_1\beta_2=\beta S\alpha_1\beta_1\beta_2+\beta_1 S\alpha_2\beta_2\beta+\beta_2 S\alpha\beta\beta_1\ \ .\ .\ \text{(B. 58)}$$

Diese Lösung bleibt natürlich nur gültig, so lange die Geraden nicht complanar sind.

44. Wir wollen nun einige Sätze aus der Stereometrie mit Hülfe der vorangegangenen Erörterungen beweisen

1°. Wenn zwei Geraden und eine Ebene gegeben sind, so sei der geometrische Ort zu finden des Punktes, welcher eine zwischen jenen Geraden der gegebenen Ebene parallel gezogene Strecke in einem bestimmten Verhältnis teilt.

Es seien

$$V(\rho-\alpha)\beta=0\,,\ V(\rho-\alpha_1)\beta_1=0\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(B. 59)}$$

die gegebenen Geraden und

$$S(\rho-\gamma)\delta=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(B. 60)}$$

die gegebene Ebene. Wenn nun die Strecke zwischen den Punkten der Geraden

$$\sigma=\alpha+x\beta\,,\ \sigma_1=\alpha_1+y\beta_1$$

jener Ebene parallel sein soll, so muss

$$S(\sigma-\sigma_1)\delta=0$$

somit

$$S(\alpha-\alpha_1+x\beta-y\beta_1)\delta=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(B. 61)}$$

Nun ist aber weiter

$$\rho=\frac{m\sigma+n\sigma_1}{m+n}$$

der Vektor eines Punktes, welcher die Strecke zwischen den Punkten σ, σ_1 in dem Verhältnis $m:n$ teilt; somit ist

$$\rho = \frac{m\alpha + n\alpha_1 + xm\beta + yn\beta_1}{m+n},$$

und wenn nun zwischen dieser Gleichung und (B. 61) x eliminirt wird, so entsteht

$$\rho = \frac{(m\alpha + n\alpha_1)S\beta\delta + m\beta S(\alpha_1 - \alpha)\delta}{m+n} + y\,\frac{m\beta S\beta_1\delta + n\beta_1 S\beta\delta}{m+n}.$$

Der gesuchte Ort ist daher eine Gerade.

2⁰. In einer körperlichen Ecke haben die nachfolgenden Systeme von Ebenen eine gemeinsame Durchschnittsgerade:

a. die Ebenen, welche durch die Kanten gehen und die gegenüberliegenden Seiten halbiren;

b. die Ebenen, welche die Flächenwinkel halbiren:

c. die Ebenen, welche durch die Kanten senkrecht zu den gegenüberliegenden Seiten gelegt werden;

d. die Ebenen, welche durch die Halbirungslinien der Seiten senkrecht zu denselben gebracht werden.

Wir wollen im Folgenden nur die Gleichungen der genannten Ebenen aufstellen. Jeder Teil des Satzes ist sodann bewiesen, wenn nur noch gezeigt wird, dass die Addition von je drei analog gebildeten Gleichungen eine Identität ergibt.

Es seien nun α, β, γ Einheitsvektoren in den Richtungen der Kanten der Ecke. Eine Ebene durch die Vektoren α und $\beta + \gamma$ gelegt hat die Gleichung

$$S\rho\alpha(\beta + \gamma) = 0,$$

und die analogen Gleichungen werden leicht hingeschreiben.

Die Ebene, welche den an der Kante α liegenden Flächenwinkel halbirt, ist

$$S\rho(UV\alpha\beta + UV\alpha\gamma) = 0.$$

Bei der Addition zu den analog gebildeten Gleichungen beachte man, dass

$$UV\alpha\beta = -\,UV\beta\alpha.$$

Die Ebene durch die Kante α senkrecht zur Ebene der beiden anderen Kanten gelegt, hat die Gleichung

$$S.\rho\alpha\, V\beta\gamma = 0 \quad\text{oder}\quad S.\rho(\gamma S\alpha\beta - \beta S\alpha\gamma) = 0.$$

Schliesslich ist noch

$$S\rho(\beta+\gamma)V\beta\gamma=0 \text{ oder } S\rho(\beta-\dot{\gamma})=0,$$

weil

$$V.(\beta+\gamma)V\beta\gamma=(\gamma-\beta)(S\beta\gamma-1) \text{ nach } (c.\ 40),$$

die Gleichung einer der sub d genannten Ebenen.

3°. Wenn eine willkürliche Anzahl von Punkten α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ gegeben ist, so wird die Ebene gefragt, welche den Ursprung der Vektoren enthält und für welche die Summe der Quadrate der Perpendikel, aus den gegebenen Punkten auf dieselbe gefällt, ein Maximum oder ein Minimum wird.

Es sei, wenn π ein Einheitsvektor ist,

$$S\pi\rho=0$$

die gesuchte Ebene, so ist die Länge des Perpendikels, aus dem Punkte α_1 auf dieselbe gefällt, nach (B. 33) $S\alpha_1\pi$; somit muss

$$S^2\alpha_1\pi+S^2\alpha_2\pi+\ldots.S^2\alpha_n\pi$$

ein Maximum oder Minimum sein, d. h.

$$S\alpha_1\pi S\alpha_1 d\pi+\ldots.+S\alpha_n\pi S\alpha_n d\pi=0.$$

Setzt man

$$\alpha_1 S\alpha_1\pi+\alpha_2 S\alpha_2\pi+\ldots.+\alpha_n S\alpha_n\pi=\Phi\pi,$$

so ist Φ eine selbstconjugirte lineare Vektorfunktion, und es wird

$$S.\Phi\pi d\pi=0.$$

Es ist aber unsrer Voraussetzung gemäss $\pi^2=-1$, somit

$$S\pi d\pi=0$$

und weil $d\pi$ keinen anderen Bedingungen genügt, so können die beiden Gleichungen nur zusammen bestehen, wenn

$$\Phi\pi=x\pi \text{ oder } V\pi\Phi\pi=0.$$

Dieser Gleichung sind wir jedoch schon in den Artikeln 155—157 der Theorie begegnet. Dort ergab sich, dass stets drei zu einander senkrechte Richtungen derselben genügen. Das vorgelegte Problem gestattet somit auch drei Lösungen mittelst unter sich rechtwinkliger Ebenen.

4°. Wenn von einem Punkte drei unter sich rechtwinklige Vektoren nach einer Ebene gezogen werden, so ist die Summe der reciproken Werte der Quadrate ihrer Längen constant.

Es sei nämlich jener Punkt der Vektorenursprung und

$$S(\rho-\alpha)\beta=0$$

die Ebene. Die Länge des Vektors in der Richtung ρ_1, wo ρ_1 ein Einheitsvektor ist, nach der Ebene gezogen, beträgt

$$\pm \frac{S\alpha\beta}{S\rho_1\beta}$$

und es ist daher zu beweisen

$$(S\rho_1\beta)^2 + (S\rho_2\beta)^2 + S(\rho_3\beta)^2 = \text{constant},$$

wenn ρ_1, ρ_2, ρ_3 ein System unter sich rechtwinkliger Einheitsvektoren darstellt. Nach (*c.* 56) ist jedoch die erste Seite dieser Gleichung $= N\beta$; somit ist der Satz bewiesen.

5°. Es wird die Bedingung gesucht, welcher genügt werden muss, damit die vier Höhenlinien eines Tetraeders in einem Punkt zusammentreffen. Die eine Ecke sei der Vektorenursprung, die Vektoren der andern seien α, β, γ. Es muss sodann den vier Gleichungen jener Höhenlinien

$$V.(\rho - \alpha) V\beta\gamma = 0, \quad V.(\rho - \beta) V\gamma\alpha = 0,$$
$$V.(\rho - \gamma) V\alpha\beta = 0, \quad V.\rho V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0$$

ein einziger Wert von ρ genügen. Setzt man den Wert von ρ aus der vierten Gleichung

$$\rho = x V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta),$$

in die drei andern, so ergeben sich nur zwei Bedingungen

$$S\beta\gamma = S\gamma\alpha = S\alpha\beta,$$

welche sich in mehrfacher Weise deuten lassen. Zuerst nämlich ist

$$S(\beta - \alpha)\gamma = 0, \text{ u.s.w.}$$

d. h. die Kanten OA, OB, OC müssen zu den gegenüberliegenden senkrecht sein; je zwei Kanten haben somit diese Eigenschaft.

Weil aber

$$(\beta - \alpha)^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2 S\alpha\beta$$

daher

$$2S\alpha\beta = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2,$$

so ergibt sich aus den Bedingungsgleichungen, dass die Summe der Quadrate von je zwei Paaren Gegenkanten dieselbe ist.

45. Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir der **Kugel** noch einige Artikel widmen.

Im Art. 96 der Theorie sahen wir schon, dass die einfachste Gestalt der Gleichung dieser Fläche ist

$$T(\rho - \alpha) = r \text{ somit } (\rho - \alpha)^2 = -r^2 \quad \dots \dots (B. 62)$$

Differentiirt man, so ergibt sich

$$S(\rho - \alpha)d\rho = 0 \quad \dots \dots (B. 63)$$

Nun ist jedoch $d\rho$ ein Vektor in der Richtung einer Tangente an die Fläche. Die Gleichung (B. 62) enthält daher den Satz, dass eine Tangente senkrecht ist zum Radius nach dem Berührungspunkte. Wenn ω ein willkürlicher Punkt jener Tangente ist, so ist

$$\omega - \rho = x d\rho,$$

somit auch

$$S(\rho - \alpha)(\omega - \rho) = 0 \quad \dots \dots (B. 64)$$

Addirt man diese Gleichung zu (B. 62), so ist

$$S(\omega - \alpha)(\rho - \alpha) = -r^2 \quad \dots \dots (B. 65)$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass der Punkt ω in einer durch den Punkt ρ gehenden Ebene enthalten ist. Demnach ist (B. 64) oder (B. 65) die Gleichung der Tangentenebene im Punkte ρ der Fläche.

Der Durchschnitt der beiden Kugeln

$$(\rho - \alpha)^2 = -r^2, \quad (\rho - \alpha_1)^2 = -r_1^2$$

ist auch in der Ebene

$$2 S\rho(\alpha - \alpha_1) = \alpha^2 - \alpha_1^2 + r^2 - r_1^2$$

enthalten, deren Gleichung sich durch Subtraktion ergibt.

Diese Ebene ist senkrecht zu $\alpha - \alpha_1$ d. h. zur Geraden, welche die Mittelpunkte der Kugeln verbindet.

Die Kugeln berühren sich, wenn

$$T(\alpha - \alpha_1) = r \pm r_1.$$

Wenn durch einen Punkt P (σ) eine Gerade $\sigma + x\tau$ gezogen wird, so können die Schnittpunkte derselben mit der Kugel

$$(\rho - \alpha)^2 = -r^2$$

leicht bestimmt werden. Setzt man nämlich in diese Gleichung

$$\rho = \sigma + x\tau,$$

so entsteht

$$(\sigma - \alpha)^2 + r^2 + 2 x S\tau(\sigma - \alpha) + x^2\tau^2 = 0.$$

Man findet für x zwei Werte x_1 und x_2 derart, dass

$$x_1 + x_2 = -2S\tau^{-1}(\sigma - \alpha), \quad x_1 x_2 = \tau^{-2}[(\sigma - \alpha)^2 + r^2].$$

Das Produkt der zwischen dem Punkte σ und den Schnittpunkten enthaltenen Segmente ist

$$x_1 x_2 \tau^2 = (\sigma - \alpha)^2 + r^2 \quad \text{. . . . . (B. 66)}$$

Die Summe ist

$$(x_1 + x_2)\,\tau = -\,2\tau^{-1} S\tau(\sigma - \alpha) \quad \text{. . . . . (B. 67)}$$

und die Summe der Reciproken jener Segmente

$$\frac{1}{x_1 \tau} + \frac{1}{x_2 \tau} = \frac{-\,2\,S\tau(\sigma - \alpha)}{\tau\,[(\sigma - \alpha)^2 + r^2]} \quad \text{. . . . . (B. 68)}$$

Aus (B. 66) folgt der bekannte Satz von der Unabhängigkeit des Produktes der Segmente von der Richtung der Sekante.

Nimmt man auf dieser Geraden einen Punkt Q, sodass PQ der halben Summe der Segmente gleich ist, so ist für Q

$$\rho - \sigma = -\,\tau^{-1}\,S\tau(\sigma - \alpha) \quad \text{. . . . . . . (B. 69)}$$

und bei veränderlicher Richtung von τ kann nun der geometrische Ort des Punktes Q bestimmt werden. Statt (B. 69) kann geschrieben werden

$$\rho - \sigma = U\tau S.(\sigma - \alpha)U\tau,$$

und weil $U(\rho - \sigma) = \pm\, U\tau$, so folgt hieraus

$$T(\rho - \sigma) = S.(\sigma - \alpha)\,U(\rho - \sigma) \quad \text{oder} \quad (\rho - \sigma)^2 + S(\sigma - \alpha)\,(\rho - \sigma) = 0$$

und schliesslich

$$\left(\rho - \frac{\sigma + \alpha}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\,(\sigma - \alpha)^2.$$

Der Ort des Punktes Q ist somit eine Kugel, welche die Gerade, die den Punkt P mit dem Mittelpunkte der gegebenen Kugel verbindet, zum Durchmesser hat.

Ist der Punkt Q so gewählt, dass PQ der Summe der Reciproken der Segmente gleich ist, so ist

$$\rho - \sigma = -\,2\tau^{-1}\,\frac{S\tau(\sigma - \alpha)}{(\sigma - \alpha)^2 + r^2} = 2\,U\tau\,\frac{S.(\sigma - \alpha)\,U\tau}{(\sigma - \alpha)^2 + r^2}$$

und hieraus

$$\left[\rho - \sigma + \frac{\sigma - \alpha}{(\sigma - \alpha)^2 + r^2}\right]^2 = \frac{(\sigma - \alpha)^2}{(\sigma - \alpha)^2 + r^2}.$$

Der Punkt Q beschreibt somit wieder eine Kugel, welche P enthält.

Wir wollen nun den Ort bestimmen des Punktes σ, dessen Potenzen bezüglich zweier Kugeln

$$(\rho - \alpha)^2 = -\,r^2, \quad (\rho - \alpha_1)^2 = -\,r_1^{\,2} \quad \text{. . . . (B. 70)}$$

das gegebene Verhältnis $m:n$ zu einander haben. Nach (B. 66) ist dieser Punkt der Bedingung unterworfen

$$[(\sigma-\alpha)^2+r^2]:[(\sigma-\alpha_1)^2+r_1^2]=m:n \quad . \; . \quad (B. 71)$$

oder

$$\left(\sigma-\frac{n\alpha-m\alpha_1}{n-m}\right)^2=$$

$$=\frac{-n^2r^2-m^2r_1^2+mn(\alpha^2+\alpha_1^2-2S\alpha\alpha_1+r^2+r_1^2)}{(n-m)^2} \quad (B. 72)$$

Der Ort ist somit eine Kugel, deren Mittelpunkt M_0 auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte M, M_1 der gegebenen Kugeln liegt, sodass

$$M_0M:M_0M_1=m:n.$$

Man ersieht unmittelbar, dass die Vektoren aller Punkte, welche den beiden Kreisen angehören, auch der Gleichung (B. 71) des Ortes genügen.

Der geometrische Ort enthält daher stets den Schnittkreis der gegebenen Kugeln und kann nun leicht construirt werden.

46. Noch wollen wir einige geometrischen Örter bestimmen.

1⁰. Den Ort des Punktes ρ, dessen Entfernungen zu zwei gegebenen Punkten α, β constantes Längenverhältnis haben.

Die Gleichung des Ortes ist

$$(\rho-\alpha)^2:(\rho-\gamma)^2=m^2:n^2$$

oder

$$\left(\rho-\frac{n^2\alpha-m^2\beta}{n^2-m^2}\right)^2=\frac{m^2n^2(\alpha-\beta)^2}{(n^2-m^2)^2},$$

somit eine Kugel, deren Mittelpunkt M auf AB liegt derart, dass

$$M_0A:M_0B=m^2:n^2.$$

Für die Schnittpunkte derselben mit der Geraden AB findet man

$$\rho=\frac{n\alpha\pm m\beta}{n\pm m}.$$

Dieselben sind daher conjugirt harmonisch zu A, B.

2⁰. Den Ort des Punktes P, welcher die Eigenschaft hat

$$m.AP^2+n.BP^2=C.$$

Die Gleichung des Ortes ist

$$m(\rho-\alpha)^2+n(\rho-\beta)^2=C$$

oder

$$\left(\rho - \frac{m\alpha + n\beta}{m+n}\right)^2 = \frac{C(m+n) - mn(\alpha-\beta)^2}{(m+n)^2}.$$

Derselbe ist daher eine Kugel, deren Mittelpunkt die Gerade AB im Verhältnis $m:n$ teilt. Ein analoges Resultat wäre erhalten, wenn man mehrere Punkte A, B, C.... gewählt hätte.

3°. Wenn eine Ebene von einer gegebenen körperlichen Ecke eine Vierseite von constantem Volum abschneidet, so wird der Ort des Fusspunktes des Perpendikels, aus dem Scheitel auf die veränderliche Ebene gefällt, gefragt. Es seien α, β, γ die Vektoren in den Richtungen der Kanten der körperlichen Ecke, welche die veränderliche Ebene auf dieselben bestimmt, so ist

$$S\alpha\beta\gamma = \text{constant} = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B. 73)}$$

und der Fusspunkt des Lotes aus dem Scheitel auf jene Ebene gefällt, ist

$$\rho = \frac{S\alpha\beta\gamma}{V(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)} = \frac{C}{V(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)}.$$

Daher

$$V(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) = C\rho^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(B. 74)}$$

Durch Operation mit $S.\alpha$, $S.\beta$, $S.\gamma$ wird erhalten

$$T\alpha = \frac{1}{S.\rho^{-1}U\alpha},\quad T\beta = \frac{1}{S.\rho^{-1}U\beta},\quad T\gamma = \frac{1}{S.\rho^{-1}U\gamma}.$$

Setzen wir noch

$$U\alpha = \alpha_0,\quad U\beta = \beta_0,\quad U\gamma = \gamma_0,$$

so ergibt (B. 74)

$$C\rho^{-1}\, S\rho^{-1}\,\alpha_0 . S\rho^{-1}\,\beta_0 . S\rho^{-1}\,\gamma_0 =$$
$$= V(\beta_0\gamma_0 S\rho^{-1}\alpha_0 + \gamma_0\alpha_0 S\rho^{-1}\beta_0 + \alpha_0\beta_0 S\rho^{-1}\gamma_0)$$

und schliesslich durch Operation mit $S.\alpha_0$, oder $S.\beta_0$, oder $S.\gamma_0$

$$CS\rho^{-1}\alpha_0 . S\rho^{-1}\beta_0 . S\rho^{-1}\gamma_0 = S\alpha_0\beta_0\gamma_0,$$

eine Fläche sechsten Grades, wie man durch Multiplikation mit ρ^6 ersieht.

4°. Die Gleichung

$$(\alpha-\beta)^2 = [(\alpha-\sigma)+(\sigma-\beta)]^2$$
$$= (\alpha-\sigma)^2 + (\sigma-\beta)^2 - 2S(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)$$

wollen wir anwenden auf den Fall, wo α, β die Mittelpunkte zweier Kugeln, σ ein Punkt ihres Durchschnittes ist. Es ist sodann

$$(\sigma - \alpha)^2 = -r^2, \ (\sigma - \beta)^2 = -r_1^2$$

zu setzen, wo r, r_1 die Radien der Kugeln sind. Somit wird

$$(\alpha - \beta)^2 + r^2 + r_1^2 = 2\,rr_1 \cos \mathrm{A}$$

sein, wenn A der Winkel ist, unter welchem die Kugeln sich schneiden.

Wenn nun

$$(\rho - \alpha)^2 = -r^2, \ (\rho - \alpha_1)^2 = -r_1^2$$

zwei gegebene Kugeln sind, so wird der Ort des Mittelpunktes einer Kugel gefragt, welche die beiden vorigen unter gegebenen Winkeln A, A_1 schneidet. Es sei σ der Mittelpunkt, R der Radius einer solchen Kugel. Man erhält sodann

$$\left.\begin{aligned}(\sigma - \alpha)^2 + r^2 + \mathrm{R}^2 &= 2\,r\,\mathrm{R} \cos \mathrm{A} \\ (\sigma - \alpha_1)^2 + r_1^2 + \mathrm{R}^2 &= 2\,r_1\,\mathrm{R} \cos \mathrm{A}_1\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(B. 75)}$$

woraus nun R eliminirt werden muss. Dies ergibt eine Skalargleichung zweiten Grades in σ; somit ist der gesuchte Ort eine Fläche zweiten Grades, welche wir nicht näher betrachten wollen.

Es lässt sich jedoch zeigen, dass alle Kugeln, welche die gegebenen unter gegebenen Winkeln schneiden, eine dritte Kugel ebenfalls unter einem gegebenen Winkel schneiden. Denn wenn man die Gleichungen (B. 75) mit m, n bezhw. multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt, so kann die Summe in die Form geschrieben werden

$$(\sigma - \alpha_2)^2 + r_2^2 + \mathrm{R}^2 = 2\,r_2\,\mathrm{R} \cos \mathrm{A}_2,$$

worein gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 = \frac{m\alpha + n\alpha_1}{m+n}, \ r_2^2 = \frac{m(\alpha^2 + r^2) + n(\alpha_1^2 + r_1^2)}{m+n} - \frac{(m\alpha + n\alpha_1)^2}{(m+n)^2} \\ r_2 \cos \mathrm{A}_2 = \frac{m\,r \cos \mathrm{A} + n\,r_1 \cos \mathrm{A}_1}{m+n}.\end{aligned}\right\} \text{(B. 76)}$$

Hieraus schliesst man nun aber unmittelbar, dass jede Kugel, welche die beiden gegebenen unter Winkeln A, A_1 schneiden, die dritte feste Kugel mit dem Mittelpunkte α_2 und dem Radius r_2 unter dem Winkel A_2 schneiden wird, wenn die Gleichungen (B. 76) erfüllt werden können, und dies ist stets der Fall. Wählt man nämlich $m : n$ willkürlich, so können α_2, r_2 unmittelbar bestimmt werden, sodann aber auch A_2.

Der Mittelpunkt ist stets in der Verbindungsgeraden der gegebenen Mittelpunkte enthalten.

Der Winkel A_2 ist ein rechter, wenn

$$m\,r\cos A + n\,r_1 \cos A_1 = 0,$$

somit

$$m : n = -r_1 \cos A_1 : r \cos A,$$

was stets möglich ist. A_2 verschwindet oder ist zwei rechten Winkeln gleich, d. h. sämmtliche Kugeln berühren eine dritte Kugel, wenn

$$\pm r_2 (m + n) = m\,r\cos A + n\,r_1 \cos A_1$$

oder

$$[m(\alpha^2 + r^2) + n(\alpha_1{}^2 + r_1{}^2)](m + n) - (m\alpha + n\alpha_1)^2 =$$
$$= (m\,r\cos A + n_1\,r\cos A_1)^2,$$

woraus zwei Werte für $m : n$ sich ergeben.

47. Auch seien einige Aufgaben anderer Art gelöst, welche einiges Interesse beanspruchen können.

1⁰. Es wird gefragt eine körperliche Ecke durch eine Ebene so zu schneiden, dass die Schnittpunkte mit den Kanten ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.

Wenn α, β, γ Einheitsvektoren in den Richtungen der Kanten sind, und

$$S(\rho - \varepsilon)\delta = 0$$

die Ebene darstellt, so sind

$$\alpha \frac{S\varepsilon\delta}{S\alpha\delta},\ \beta \frac{S\varepsilon\delta}{S\beta\delta},\ \gamma \frac{S\varepsilon\delta}{S\gamma\delta}$$

die Schnittpunkte mit den Kanten. Nun muss eine Gleichung stattfinden von der Form

$$S\left(\frac{\alpha}{S\alpha\delta} - \frac{\beta}{S\beta\delta}\right)\left(\frac{\gamma}{S\gamma\delta} - \frac{\beta}{S\beta\delta}\right) = 0,$$

damit der Winkel an der Kante β recht sei. Somit

$$S(\alpha S\beta\delta - \beta S\alpha\delta)(\gamma S\beta\delta - \beta S\gamma\delta) = 0$$
$$S.\,V(\delta\,V\alpha\beta)\,V(\delta\,V\beta\gamma) = 0$$

und schliesslich

$$S\delta\beta\gamma\,S\delta\alpha\beta - \delta^2 S.\,V\alpha\beta\,V\beta\gamma = 0.$$

Weil dieser Gleichung allgemein durch $x\delta$ genügt wird, wenn δ derselben genügt, so wird dadurch ein Kegel dargestellt und zwar ein solcher zweiten Grades. Die Ebene

$$S\delta\beta\gamma = \text{const.} = C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B. 77)$$

schneidet die Fläche in ihrem Durchschnitt mit der Kugel

$$\delta^2 S . V\alpha\beta V\beta\gamma - CS\delta\alpha\beta = 0,$$

deren Mittelpunkt liegt in der Mitte des von der Schnittebene (B. 77) auf den Vektor $V\alpha\beta$ bestimmten Segmentes und welche den Scheitel der körperlichen Ecke enthält.

Die Ebenen senkrecht zu den Vektoren $V\beta\gamma$, $V\alpha\beta$ schneiden den Kegel somit in Kreisen. Die Vektoren

$$\delta = V\beta\gamma, \; \delta = V\alpha\beta$$

genügen der Gleichung und sind daher Kanten des Kegels.

Den Kegel zu construiren bringen wir demnach durch den Punkt P der Kante α der körperlichen Ecke OABC eine Ebene U parallel zur Ebene OBC und bestimmen den Schnittpunkt C′ derselben mit dem Perpendikel zu OAB. Auf OC′ als Durchmesser beschreibe man eine Kugel, welche die Ebene U in einem Kreise schneide; derselbe kann sodann als Directrix des Kegels betrachtet werden.

Die gesuchte Ebene ist nun senkrecht zu einer beliebigen Kante dieses Kegels.

2⁰. In einer gegebenen Kugel soll ein Vieleck beschrieben werden, dessen Seiten gegebenen nicht complanaren Vektoren α_1, α_2, α_3 parallel sind.

Wenn σ diejenige Ecke des Vielecks ist, von der die Seite, welche parallel zu α_1 ist, ausgeht und

$$\rho^2 = - r^2$$

die Kugel, so wird die Gerade $\sigma + x\alpha_1$ diese Fläche noch schneiden in dem Punkt

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma - 2\alpha_1^{-1} S\alpha_1\sigma \\ &= - V.\alpha_1^{-1}\sigma\alpha_1 \text{ nach } (c. 41) \\ &= - \alpha_1^{-1}\sigma\alpha_1, \text{ weil } S.\alpha_1^{-1}\sigma\alpha_1 = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ seien Einheitsvektoren, — eine Annahme, welche offenbar gestattet ist — so ist

$$\alpha_1^{-1} = - \alpha_1,$$

somit

$$\sigma_1 = \alpha_1 \sigma \alpha_1 .$$

Die folgenden Ecken $\sigma_2 \ldots . \sigma_n$ werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\sigma_2 = \alpha_2 \sigma_1 \alpha_2, \ldots . \sigma = \alpha_n \sigma_{n-1} \alpha_n.$$

Indem der Wert von σ_1 in die Formel für σ_2 eingetragen wird, der so erhaltene Wert für σ_2 wieder in die Formel für σ_3 u. s. w., erhält man zuletzt eine Gleichung zur Bestimmung von σ.

Wir wollen dies nur weiter verfolgen bei den Voraussetzungen, das Vieleck sei ein Dreieck oder ein Viereck. Im ersten Falle ist die Gleichung, aus der σ bestimmt wird,

$$\sigma = \alpha_3\alpha_2\alpha_1 \sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Setzen wir

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = q$$

so ist

$$q^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_3}\,\frac{1}{\alpha_2}\,\frac{1}{\alpha_1} = \alpha_3^{-1}\,\alpha_2^{-1}\,\alpha_1^{-1} =$$
$$= (-\alpha_3)(-\alpha_2)(-\alpha_1) = -\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_1.$$

Daher wird die Gleichung für σ

$$q\sigma + \sigma q = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B. 78)}$$

Wenn man nun mit V operirt und auf (b. 149) achtet, so ergibt sich

$$Sq = 0 \text{ oder } S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Die Vektoren α_1, α_2, α_3 können daher nicht willkürlich gewählt werden, sondern müssen complanar sein. Dieses Resultat ist evident; dieselbe Gleichung für Sq findet man aber stets, wenn die Anzahl der Seiten des Vielecks ungerade ist.

Nun ist weiter, wenn an (B. 78) mit S operirt wird,

$$S.\sigma Vq = 0,$$

σ kann somit jeder Punkt sein des grössten Kreises senkrecht zum Vektor $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Bei einem Viereck erhält man in derselben Weise, wenn

$$q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

gesetzt wird,

$$q\sigma - \sigma q = 0,$$

und diese Gleichung ist im Artikel 174 der Theorie ausführlich diskutirt. Es ergab sich dort (f. 199)

$$\sigma = x(Vq)^{-1}.$$

Weil x positiv oder negativ sein kann, erhält man somit zwei diametral einander gegenüber liegende Punkte. Dasselbe ergibt sich bei jedem Vieleck mit gerader Seitenzahl.

Wenn gefordert wird in einer gegebenen Kugel ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch n willkürlich gegebene Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ hindurchgehen, so findet man in gleicher Weise, indem die erste Ecke mit σ bezeichnet wird, für die folgende

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma - 2(\alpha_1 - \sigma)^{-1} S\sigma(\alpha_1 - \sigma)\\ &= -(\alpha_1 - \sigma)^{-1}\sigma(\alpha_1 - \sigma).\end{aligned}$$

Die dritte ist somit

$$\sigma_2 = -(\alpha_2 - \sigma_1)^{-1}\sigma_1(\alpha_2 - \sigma_1),$$

woraus unmittelbar erhellt, dass die Lösung dieses bekannten Problems mittelst Quaternionen ungleich schwieriger als diejenige des vorhergehenden ist.

DIE FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

48. Wenn die Gleichung

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

zusammen mit

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2\,a_2yz + 2\,b_2zx + 2\,c_2xy + \\ + 2\,a_3x + 2\,b_3y + 2c_3z + a = 0 \quad . \; . \quad \text{(C. 1)}$$

gegeben ist, und man die durch (B. 13) (B. 15) definirte Substitution ausführt, so ergibt sich die Gleichung

$$S\rho[(a_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + b_2\gamma_1)\,S\alpha_1\rho + (c_2\alpha_1 + b_1\beta_1 + a_2\gamma_1)\,S\beta_1\rho + \\ + (b_2\alpha_1 + a_2\beta_1 + c_1\gamma_1)\,S\gamma_1\rho + 2(a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)] + a = 0.$$

Wird nun

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= a_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + b_2\gamma_1 \\ \mu &= c_2\alpha_1 + b_1\beta_1 + a_2\gamma_1 \\ \nu &= b_2\alpha_1 + a_2\beta_1 + c_1\gamma_1 \\ \varepsilon &= a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 \\ \Phi\rho &= \lambda S\alpha_1\rho + \mu S\beta_1\rho + \nu S\gamma_1\rho \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C. 2)}$$

gesetzt, so ist Φ, wie leicht ersichtlich, eine selbstconjugirte lineare Vektorfunktion, und die Skalargleichung für ρ nimmt die sehr einfache Gestalt an

$$S\rho(\Phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C. 3)}$$

Dieselbe enthält demnach sämtliche Flächen zweiten Grades.

Bei speciellen Voraussetzungen kann die Gleichung noch beträchtlich vereinfacht werden; doch wollen wir vorläufig solche nicht machen und ganz allgemein die Theorie der Pole und Polarebenen für die Flächen zweiten Grades entwickeln.

49. Es sei σ ein willkürlich angenommener Punkt P, $\sigma + x\tau$ eine denselben enthaltende Gerade, so handelt es sich zunächst darum, die Schnittpunkte S, S′ dieser Geraden mit der Fläche zu finden. Ist für ein Schnittpunkt

$$\rho = \sigma + x\tau,$$

so ergibt die Substitution dieses Wertes in die Gleichung (C. 3)

$$x^2 S\tau\Phi\tau + xS(\tau\Phi\sigma + \sigma\Phi\tau + 2\tau\varepsilon) + S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + \alpha = 0.$$

Nun ist jedoch

$$S\sigma\Phi\tau = S\tau\Phi\sigma,$$

daher

$$x^2 S\tau\Phi\tau + 2xS\tau(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a = 0. \quad . \quad (\mathrm{C.}\ 4)$$

Wir bezeichnen mit x_1, x_2 die dieser Gleichung genügenden Werte von x, sodass

$$x_1 + x_2 = -2\frac{S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon)}{S\tau\Phi\tau}, \quad x_1 x_2 = \frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a}{S\tau\Phi\tau}$$

und setzen für die Punkte S, S′

$$\sigma_1 = \sigma + x_1\tau, \quad \sigma_2 = \sigma + x_2\tau.$$

Nun wollen wir auf der Geraden PS einen Punkt Q bestimmen, derart dass P, Q durch S, S′ harmonisch getrennt werden. Ist der Vektor des Punktes Q

$$\omega = \sigma + y\tau,$$

so ist die Bedingung der harmonischen Lage nach (B. 20)

$$\frac{\omega - \sigma_1}{\omega - \sigma_2} = -\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma - \sigma_2}$$

oder

$$\frac{y - x_1}{y - x_2} = -\frac{x_1}{x_2}$$

somit

$$y = 2\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = -\frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a}{S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon)}$$

und schliesslich ist für Q

$$\omega = \sigma - \tau\frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a}{S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\mathrm{C.}\ 5)$$

ein Ausdruck, welcher von $T\tau$ unabhängig ist. Wenn $U\tau$ verändert, so kann nun nach dem Orte des Punktes Q gefragt werden; es muss zu diesem Zwecke τ aus (C. 5) eliminirt werden. Aus dieser Gleichung folgt

$$U(\omega - \sigma) = \pm U\tau$$

somit

$$T(\omega - \sigma) = -\frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a}{S.(\Phi\sigma + \varepsilon)\, U(\omega - \sigma)}$$

und schliesslich nach einiger Rechnung

$$S\omega(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma\varepsilon + a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\,6)$$

Der Punkt Q beschreibt somit eine Ebene, die Polarebene des Punktes P.

Diese wichtige Gleichung wollen wir noch auf eine einfachere Weise begründen. Es sei σ der Vektor des Punktes P, τ derjenige von Q; es wird gefragt, unter welcher Bedingung die Punkte P, Q durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit der Fläche harmonisch getrennt werden. Zu diesem Zwecke genügt, wenn die beiden Schnittpunkte der Geraden PQ mit der Oberfläche durch

$$\rho_1 = \frac{\sigma + u\tau}{1 + u}, \quad \rho_2 = \frac{\sigma - u\tau}{1 - u}$$

dargestellt werden. Tragen wir den ersten Wert in die Gleichung (C. 3) ein, so entsteht

$$u^2[S\tau(\Phi\tau + 2\varepsilon) + a] + 2u[S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma\varepsilon + a] + S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a = 0$$

und dieser Gleichung genügen die Werte $\pm u$, falls

$$S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma\varepsilon + a = 0.$$

Der Punkt τ ist somit in einer Ebene enthalten, nämlich in der durch (C. 6) dargestellten Ebene.

50. Die Polarebene eines Punktes ω der Ebene (C. 6) hat die Gleichung

$$S\rho(\Phi\omega + \varepsilon) + S\omega\varepsilon + a = 0.$$

Derselben genügt nach (C. 6) der Punkt σ, wodurch der Satz bewiesen ist: die Polarebenen aller Punkte einer Ebene enthalten den Pol dieser letzteren.

Man kann nun auch leicht mittelst Quaternionen beweisen, was geometrisch evident ist, dass die Polarebene eines Punktes die Berührungspunkte enthält sämtlicher aus diesem Punkte an die Fläche gelegten Tangenten. Die Gleichung (C. 4) ergibt nämlich zwei gleiche Werte für x, wenn τ der Relation genügt

$$S^2\tau(\Phi\sigma + \varepsilon) - S\tau\Phi\tau[S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a] = 0 \quad \ldots \quad (C.\,7)$$

und der Berührungspunkt ist sodann

$$\sigma - \tau \frac{S.\tau(\Phi\sigma + \epsilon)}{S.\tau\Phi\tau}.$$

Dieser Wert genügt aber der Gleichung (C. 6), wie aus (C. 7) hervorgeht.

Die Gleichung (C. 7), welcher die Richtungen τ genügen, in denen Tangenten aus dem Punkte P an die Fläche gelegt werden können, gestattet auch unmittelbar die Bestimmung der Gleichung des **Tangentenkegels**, dessen Scheitel in P liegt.

Wenn nämlich ω ein Punkt dieses Kegels ist, so ist

$$\omega - \sigma = x\tau,$$

und die Substitution in (C. 7) ergibt nun für ω die Gleichung

$$S^2(\omega - \sigma)(\Phi\sigma + \epsilon) - [S\sigma(\Phi\sigma + 2\epsilon) + a]\, S.(\omega - \sigma)\Phi(\omega - \sigma) = 0 \quad (C. 8)$$

Fällt der Punkt P in die Fläche, so geht die Polarebene in die Tangentenebene in P über. Es ist somit (C. 6) die Gleichung der **Tangentenebene**, wenn ausserdem

$$S\sigma(\Phi\sigma + 2\epsilon) + a = 0 \; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (C. 9)$$

gegeben ist.

Dieses wichtige Ergebnis kann noch auf ganz andere Weise hergeleitet werden. Wenn wir nämlich die Gleichung (C. 9) differentiiren, so wird der dabei auftretende Vektor $d\sigma$ eine Tangente an die Oberfläche sein. Wir erhalten dadurch

$$S(\Phi\sigma + \epsilon)d\sigma = 0 \; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (C. 10)$$

Sämtliche Tangenten im Punkte σ siud somit senkrecht zum Vektor

$$\nu = \Phi\sigma + \epsilon \; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; .\; . \quad (C. 11)$$

und werden daher eine Tangentenebene bilden. Ist ω ein Punkt derselben, so ist

$$\omega - \sigma = x d\sigma,$$

und die Substitution in (C. 10) ergibt nun für ω

$$S(\omega - \sigma)(\Phi\sigma + \epsilon) = 0$$

oder

$$S\omega(\Phi\sigma + \epsilon) = S\sigma(\Phi\sigma + \epsilon) = - S\sigma\epsilon - a \text{ nach (C. 9)}$$

wodurch (C. 6) erhalten ist.

51. Aus dem Vorhergehenden folgt nun weiter, dass der Vektor ν, den wir in (C. 11) einführten, die Richtung der

N o r m a l e im Punkte σ an die Fläche gelegt, hat. Die Gleichung dieser Normale ist somit

$$V(\omega-\sigma)\nu = V(\omega-\sigma)(\Phi\sigma+\varepsilon)=0\;.\;.\;.\;.\;(C.\,12)$$

Wird nun gefordert aus einem gegebenen Punkte α die Normalen an die Fläche zu legen, so sei σ der Fusspunkt einer solchen Geraden. Es müssen sodann die beiden Gleichungen gelten (C. 9) und

$$V(\alpha-\sigma)(\Phi\sigma+\varepsilon)=0.$$

Nun folgt aber aus dieser letzteren

$$\Phi\sigma+\varepsilon=m(\alpha-\sigma),$$

daher

$$(\Phi+m)\sigma = m\alpha-\varepsilon \text{ oder } \sigma=(\Phi+m)^{-1}(m\alpha-\varepsilon)\;.\;(C.\,13)$$

Dieser Wert kann nun in (C. 9) eingetragen werden; es entsteht sodann eine Gleichung, welche m zu bestimmen gestattet, nämlich

$$S(m\alpha+\varepsilon)(\Phi+m)^{-1}(m\alpha+\varepsilon)-m[(\Phi+m)^{-1}(m\alpha+\varepsilon)]^2+a=0\;(C.14)$$

Im Art. 145 der Theorie ist aber gezeigt, wie $(\Phi+m)^{-1}$ in Φ ausgedrückt werden kann. Nach den Formeln (*f.* 38), (*f.* 42) ist

$$(\Phi+m)^{-1}=\frac{x\Phi^{-1}+m\psi+m^2}{x+m\,x_1+m^2x_2+m^3}.$$

Bei Einführung dieses Wertes in (C. 14) ergibt sich eine Gleichung sechsten Grades zur Bestimmung von m, und (C. 13) ergibt sodann auch sechs Normalenfusspunkte. Wir haben somit den Satz erhalten:

Aus jedem Punkte des Raumes können sechs Normalen an eine Fläche zweiter Ordnung gezogen werden.

52. Bestimmen wir nun die Polarebene eines Punktes $\alpha+x\beta$. Die Gleichung derselben ist nach (C. 6)

$$S\omega(\Phi\alpha+\varepsilon)+S\varepsilon\alpha+a+x\,S(\omega\Phi\beta+\varepsilon\beta)=0,$$

somit nach Art. 35 eine Ebene, welche die Durchschnittsgeraden der Ebenen

$$S\omega(\Phi\alpha+\varepsilon)+S\varepsilon\alpha+a=0\,,\;S(\omega\Phi\beta+\varepsilon\beta)=0\;.\;.\;(C.\,15)$$

enthält. Die zweite Gleichung ist, wie aus (C. 6) hervorgeht, einfach die Polarebene des unendlich fernen Punktes der Geraden $\alpha+x\beta$.

Wenn daher ein Punkt die Gerade

$$\rho=\alpha+x\beta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(C.\,16)$$

beschreibt, so beschreibt seine Polarebene die Gerade (C. 15), oder nach Art. 179 der Theorie

$$\rho = \frac{(\Phi\alpha + \epsilon)\,S\epsilon\beta - \Phi\beta(S\epsilon\alpha + a)}{V.(\Phi\alpha + \epsilon)\Phi\beta} + y\,V.(\Phi\alpha + \epsilon)\Phi\beta\,.\;.\quad (C.\,17)$$

Diese beiden Geraden werden senkrecht zu einander sein wenn

$$S.\beta\Phi\beta(\Phi\alpha + \epsilon) = 0.$$

Der Vektor β gehört somit in diesem Falle einem Kegel zweiten Grades an, dessen Gleichung ist

$$S.(\omega - \alpha)\Phi(\omega - \alpha)\,(\Phi\alpha + \epsilon) = 0,$$

wodurch der Satz bewiesen ist: Zu jedem Punkte des Raumes gehört ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Kanten die Eigenschaft haben, dass dieselben zu ihren conjugirten Polargeraden senkrecht sind.

Die Gerade (C. 16) und die zu derselben conjugirte Polargerade (C. 17) werden sich nach Art. 40 durchschneiden, wenn der Gleichung genügt wird

$$S\left[\alpha - \frac{(\Phi\alpha + \epsilon)S\epsilon\beta - \Phi\beta(S\epsilon\alpha + a)}{V.(\Phi\alpha + \epsilon)\Phi\beta}\right]\beta\,V(\Phi\alpha + \epsilon)\Phi\beta = 0$$

oder

$$S.\alpha\beta\,V(\Phi\alpha + \epsilon)\Phi\beta + S\epsilon\beta S\beta(\Phi\alpha + \epsilon) - (S\epsilon\alpha + a)S\beta\Phi\beta = 0$$

und schliesslich

$$S^2\beta(\Phi\alpha + \epsilon) - S\beta\Phi\beta[S\alpha(\Phi\alpha + 2\epsilon) + a] = 0,$$

d. h. nach (C. 7) die Gerade (C. 16) muss die Fläche berühren. In diesem Falle ist nämlich die Polargerade dieser Tangente einfach der Durchschnitt der Tangentenebene in dem Berührungspunkte mit der Polarebene des Punktes α, welche diesen Berührungspunkt enthält.

53. Wir wollen nun die Tangentenebenen der Fläche bestimmen, welche die gegebene Gerade (C. 16) enthalten.

Zu diesem Zwecke könnte man die Kegelschnitte bestimmen, in denen die Polarebenen zweier Punkte P, Q der Geraden (C. 16) die Fläche schneiden.

Sind S, S′ die Schnittpunkte jener Kegelschnitte, so sind SP, SQ Tangenten der Fläche und dasselbe gilt von S′P, S′Q. Die Ebenen SPQ, S′PQ werden daher die gesuchten Ebenen sein. Nun sind aber S, S′ in den Polarebenen von P, Q somit in der zu PQ conjugirten Polargeraden (C. 17) enthalten. S und S′ sind daher einfach die Punkte, wo die Gerade (C. 17) die Fläche schneidet.

Wir wollen jedoch zur Auffindung jener Tangentenebenen dem analytischen Weg folgen. Ist σ ein Berührungspunkt einer solchen Ebene, so gilt (C. 9) und nach Art. 39 ist die Gleichung der Ebene

$$S.\rho\beta(\sigma - \alpha) = S\beta\sigma\alpha \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(C. 18)}$$

Die Gleichung der Tangentenebene im Punkte σ ist aber

$$S\rho(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma\varepsilon + a = 0.$$

Damit diese mit (C. 18) identisch sei, muss somit

$$\frac{\Phi\sigma + \varepsilon}{V\beta(\sigma - \alpha)} = \frac{S\sigma\varepsilon + a}{S\sigma\beta\alpha} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(C. 19)}$$

Der Punkt σ wird demnach bestimmt durch

$$S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a = 0$$

$$(\Phi\sigma + \varepsilon)S\sigma\beta\alpha = (S\sigma\varepsilon + a)\,V\beta(\sigma - \alpha).$$

Die Operation mit $S.\alpha$ und mit $S.\beta$ an die letzte Gleichung ergibt, dass σ den Gleichungen (C. 15) genügt, wie vorhin schon geometrisch erörtert ist, nämlich

$$S\alpha(\Phi\sigma + \varepsilon) = -(S\varepsilon\sigma + a),\quad S\beta(\Phi\sigma + \varepsilon) = 0,$$

somit nach (f. 212)

$$\Phi\sigma + \varepsilon = -\frac{\beta}{V\alpha\beta}(S\sigma\varepsilon + a) + y\,V\alpha\beta.$$

Hieraus kann nun durch Operation mit $S.\Phi^{-1}\varepsilon$ der Wert von $S\sigma\varepsilon$ bestimmt werden; wird derselbe in die vorhergehende Gleichung eingetragen, so ist dadurch σ mit Hülfe der Skalargrösse y bestimmt, deren Wert sich schliesslich ergibt, wenn man den erhaltenen Ausdruck für σ in die Gleichung der Fläche einsetzt. Die Resultate sind zu weitläufig um hier Platz finden zu können.

54. Bisher haben wir angenommen, dass der Punkt σ, dessen Polarebene bestimmt werden sollte, nicht in unendlicher Entfernung lag.

Rückt derselbe in der durch $U\sigma$ gegebenen Richtung ins Unendliche, so habe wir um seine Polarebene zu erhalten, nur in (C. 6) $Lim.T\sigma = \infty$ zu setzen und erhalten dadurch

$$S(\omega\Phi U\sigma + \varepsilon U\sigma) = 0 \text{ oder } S(\omega\Phi\sigma + \varepsilon\sigma) = 0 \,.\,. \quad \text{(C. 20)}$$

Diese Ebene enthält stets den Vektor $-\Phi^{-1}\varepsilon$, wie sich unmittelbar durch Substitution ergibt. Setzen wir

$$\mu = -\Phi^{-1}\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C.\ 21)$$

so wird die Polarebene eines unendlich fernen Punktes um den Punkt μ drehen, wenn der erste in verschiedenen Richtungen sich entfernt. Nun haben wir in den Artikeln 147—151 der Theorie gesehen, dass die Operation Φ^{-1} nicht stets einen bestimmten Vektor ergibt. Diese Ausnahmefälle wollen wir ausschliessen. Es wird sodann der Punkt μ der Mittelpunkt der Fläche sein. Denn, ziehen wir durch denselben eine Gerade $\mu + x\tau$, so werden die Schnittpunkte mit der Fläche mittelst (C. 4) bestimmt werden können, wenn man darin σ durch μ ersetzt. Diese Gleichung ergibt in diesem Falle jedoch nach (C. 21) stets zwei gleiche und entgegengesetzte Werte für x. Der Punkt μ hat somit die Eigenschaft, dass jede denselben enthaltende Gerade, welche zwei Punkte der Fläche verbindet, in ihm halbirt wird.

Die Ebene (C. 20), welche nun eine Diametralebene der Fläche genannt werden kann, kann auch als der Ort der Mitten der dem Vektor σ parallel gezogenen Sehnen der Fläche zweiter Ordnung betrachtet werden.

Wenn nämlich die Gerade $\sigma + x\tau$ die Fläche schneidet, so ist bei der im Art. 49 angewandten Bezeichnung

$$\omega = \sigma + \frac{x_1 + x_2}{2}\tau$$

die Mitte der dadurch bestimmten Sehne. Man erhält daher nach (C. 4)

$$\omega = \sigma - \tau\frac{S\tau(\Phi\sigma + \varepsilon)}{S\tau\Phi\tau}$$

und hieraus kann nun σ eliminirt werden durch Operation mit $S.\tau\Phi$. Es wird dadurch erhalten

$$S\tau(\Phi\omega + \varepsilon) = 0 = S(\omega\Phi\tau + \varepsilon\tau)$$

in Übereinstimmung mit (C. 20).

Wenn der Punkt σ ins Unendliche rückt, so geht der ihm zugehörige Tangentenkegel in einen Cylinder über, dessen Gleichung mit Leichtigkeit erhalten werden kann. Denn um jenen Cylinder zu erhalten, haben wir durch die Punkte in denen die Polarebene des unendlich fernen Punktes die Fläche schneidet, Geraden parallel der Richtung dieses letzteren Punktes zu ziehen. Man hat somit den Vektor ω zu eliminiren aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} S\omega(\Phi\omega + 2\epsilon) + a = 0 \\ S(\omega\Phi\sigma + \epsilon\sigma) = 0 \\ V(\rho - \omega)\sigma = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (C.\,22)$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\omega = \rho + x\sigma.$$

Die Substitution dieses Wertes in die zweite Gleichung ergibt den Wert der Skalargrösse x und hiermit

$$\omega = \rho - \sigma\,\frac{S\sigma(\Phi\rho + \epsilon)}{S\sigma\Phi\sigma}.$$

Wenn nun noch dieser Wert in die erste der Gleichungen (C. 21) eingetragen wird, so entsteht die Gleichung des Cylinders

$$S^2.\sigma(\Phi\rho + \epsilon) - S\sigma\Phi\sigma\,[S\rho(\Phi\rho + 2\epsilon) + a] = 0 \quad . \; . \; (C.\,23)$$

55. Die Gleichung (C. 4) kann noch dazu benutzt werden einen Satz zu beweisen, dem wir später noch in allgemeinerer Form begegnen werden.

Wenn wir nämlich das Produkt der Segmente der durch den Punkt σ in der Richtung des Vektors τ an die Fläche gezogenen Secante bestimmen, so ergibt sich hierfür $x_1\, x_2\, \tau^2$, somit nach (C. 4)

$$\mathrm{P} = -\,\frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\epsilon) + a}{S.\,U\tau\Phi\,U\tau} \quad \ldots\ldots\ldots (C.\,24)$$

Hätte man in derselben Richtung aus einem andern Punkte σ' eine Secante gezogen, so wäre erhalten

$$\mathrm{P}' = -\,\frac{S\sigma'(\Phi\sigma' + 2\epsilon) + a}{S.\,U\tau\Phi\,U\tau},$$

somit

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} = \frac{S\sigma(\Phi\sigma + 2\epsilon) + a}{S\sigma'(\Phi\sigma + 2\epsilon) + a},$$

d. h. das Verhältnis der Produkte der Segmente zweier in der nämlichen Richtung aus festen Punkten an die Fläche gezogenen Secanten ist unabhängig von jener Richtung.

56. Es möge nun die Theorie von Pol und Polarebene weiter verfolgt werden.

Wenn α_1 die Richtung eines unendlich fernen Punktes darstellt, so ist die Gleichung der Polarebene nach (C. 20)

$$S(\rho\Phi\alpha_1 + \varepsilon\alpha_1) = 0.$$

Sind nun α_2, α_3 die Richtungen zweier unendlich fernen Punkte in dieser Ebene, so ist

$$S\alpha_2\Phi\alpha_1 = 0, \; S\alpha_3\Phi\alpha_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 25)$$

und wenn ausserdem α_3 parallel der Polarebene des unendlich fernen Punktes in der Richtung α_2 sein soll, so ist noch

$$S\alpha_3\Phi\alpha_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 26)$$

Die Gleichungen (C. 24) (C. 25) bestimmen somit drei conjugirte Richtungen in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung.

Eine jede dieser Richtungen kann aus den beiden anderen leicht bestimmt werden. Aus (C. 24) zum Beispiel folgt

$$S.\alpha_1\Phi\alpha_2 = 0, \; S.\alpha_1\Phi\alpha_3 = 0,$$

somit

$$\alpha_1 = a_1 V\Phi\alpha_2\Phi\alpha_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 27)$$

wo a_1 eine Skalargrösse ist. Die zweite Seite dieser Gleichung kann nach den Artikeln 143—149 der Theorie leicht umgestaltet werden. Es sind dabei jedoch besondere Fälle zu unterscheiden.

Ist die Funktion Φ nämlich derart, dass dieselbe der Gleichung

$$S.\Phi\lambda\Phi\mu\Phi\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 28)$$

wo λ, μ, ν willkürliche Vektoren sind, nicht genügt, so gilt (*f.* 32) und weil Φ selbstconjugirt ist, ergibt (C. 27) für diesen Fall

$$\alpha_1 = a_1 x\Phi^{-1} V\alpha_2\alpha_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 29)$$

Wenn Φ jedoch der Gleichung (C. 27) genügt, so erhält man nach (*f.* 52)

$$\alpha_1 = U\pi = U\Phi^{-1}0.$$

Genügt der Gleichung

$$\Phi\pi = 0$$

nur eine bestimmte Richtung, so kommt dieselbe somit unter drei conjugirten Richtungen stets vor.

57. Wir wollen jedoch den ersten Fall für jetzt nur weiter verfolgen. Es kann nämlich leicht gezeigt werden, dass hierbei die Funktion Φ stets in die Form

$$\Phi\rho = n_1\alpha'_1 S\alpha'_1\rho + n_2\alpha'_2 S\alpha'_2\rho + n_3\alpha'_3 S\alpha'_3\rho$$

geschrieben werden kann.

Denn allgemein ist nach (c. 45)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\rho + \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1\rho + \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2\rho,$$

somit

$$\Phi\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \Phi\alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\rho + \Phi\alpha_2 S\alpha_3\alpha_1\rho + \Phi\alpha_3 S\alpha_1\alpha_2\rho$$
$$= x[a_1 V\alpha_2\alpha_3 S\alpha_2\alpha_3\rho + a_2 V\alpha_3\alpha_1 S\alpha_3\alpha_1\rho + a_3 V\alpha_1\alpha_2 S\alpha_1\alpha_2\rho]$$

und schliesslich [nach (C. 29)

$$\Phi\rho = n_1\alpha_1' S\alpha_1'\rho + n_2\alpha_2' S\alpha_2'\rho + n_3\alpha_3' S\alpha_3'\rho,$$

wenn gesetzt wird

$$V\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1', \quad V\alpha_3\alpha_1 = \alpha_2', \quad V\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3'$$
$$a_1 x = n_1 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad a_2 x = n_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \text{ u. s. w.}$$

Die Funktion $\Phi^{-1}\rho$ erhält sodann dieselbe Form; denn, weil nach (c. 46)

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = V\alpha_2\alpha_3 S\alpha_1\rho + V\alpha_3\alpha_1 S\alpha_2\rho + V\alpha_1\alpha_2 S\alpha_3\rho,$$

so ist

$$x\Phi^{-1}\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{\alpha_1}{a_1} S\alpha_1\rho + \frac{\alpha_2}{a_2} S\alpha_2\rho + \frac{\alpha_3}{a_3} S\alpha_3\rho.$$

58. Wir bestimmen nun die Systeme conjugirter Richtungen, welche unter sich rechtwinklig sind. Es treten in diesem Falle zu den Gleichungen (C. 25) (C. 26) noch die Bedingungen

$$S\alpha_2\alpha_3 = S\alpha_3\alpha_1 = S\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

somit wenn wir α_1, α_2, α_3 als Einheitsvektoren betrachten

$$\alpha_1 = V\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_2 = V\alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_3 = V\alpha_1\alpha_2.$$

Nach (C. 29) ist daher in dem Falle, wo Φ nicht der Gleichung (C. 28) genügt

$$\alpha_1 = a_1 x\Phi^{-1}\alpha_1 \quad \text{oder} \quad V.\alpha_1\Phi\alpha_1 = 0,$$

und dieselbe Gleichung wird auch für α_2, α_3 gelten.

Nun ist aber im Art. 155 der Theorie ausführlich erörtert, dass jener Gleichung stets für den Fall der Selbstconjugation der Funktion Φ drei reelle Vektoren genügen; es ist somit der Satz bewiesen: Jede Fläche zweiter Ordnung hat im allgemeinen nur ein einziges System unter sich rechtwinkliger conjugirter Richtungen.

In dem anderen Falle, wo Φ der Gleichung (C. 28) Genüge leistet, fällt die eine dieser Richtungen mit dem Vektor $\varkappa$ zusammen.

59. Es gibt ein einziges System von drei Richtungen, welche in Bezug auf zwei Flächen zweiter Ordnung zu einander conjugirt sind.

Denn sind die Vektorfunktionen, welche in den Gleichungen jener Flächen enthalten sind, Φ, ψ, so müssen die Gleichungen stattfinden

$$\left.\begin{array}{l} S.\alpha_1\Phi\alpha_2 = 0\,,\ S\,\alpha_2\Phi\alpha_3 = 0\,,\ S.\alpha_3\Phi\alpha_1 = 0 \\ S.\alpha_1\psi\alpha_2 = 0\,,\ S.\alpha_2\psi\alpha_3 = 0\,,\ S.\alpha_3\psi\alpha_1 = 0 \end{array}\right\} \,.\,.\,(C.\,31)$$

somit

$$\Phi\alpha_2 = x\,V\alpha_1\alpha_3 \text{ und } \psi\alpha_2 = y\,V\alpha_1\alpha_3\,,$$

daher auch

$$\Phi\alpha_2 // \psi\alpha_2 \text{ oder } V.\Phi\alpha_2\psi\alpha_2 = 0.$$

Derselben Gleichung müssen aber auch α_1, α_3 genügen. Somit sind α_1, α_2, α_3 Lösungen der Gleichung

$$V.\Phi\rho\psi\rho = 0.$$

Dieselbe hat stets drei Wurzeln; denn, setzt man $\Phi\rho = \sigma$, so geht dieselbe über in

$$V.\sigma\psi\Phi^{-1}\sigma = 0\,,$$

sodass σ eine Hauptrichtung für die Funktion $\psi\Phi^{-1}$ ist. Weil diese Funktion aber nicht selbstconjugirt ist, so sind die Wurzeln nicht stets reell.

Dass umgekehrt auch die so gefundenen Werte den Gleichungen (C. 31) Genüge leisten, kann leicht verificirt werden. Sind nämlich σ_1, σ_2, σ_3 die Wurzeln, so dass

$$\psi\Phi^{-1}\sigma_1 = m_1\sigma_1\,,\ \psi\Phi^{-1}\sigma_2 = m_2\sigma_2\,,\ \psi\Phi^{-1}\sigma_3 = m_3\sigma_3,$$

so sind die Werte der Grössen α_1, α_2, α_3

$$\alpha_1 = \Phi^{-1}\sigma_1\,,\ \alpha_2 = \Phi^{-1}\sigma_2\,,\ \alpha_3 = \Phi^{-1}\sigma_3$$

und es muss nur gezeigt werden, dass z. B.

$$S.\sigma_2\Phi^{-1}\sigma_1 = 0.$$

Nun ist aber

$$\Phi^{-1}\sigma_1 = m_1\psi^{-1}\sigma_1\,,\ \Phi^{-1}\sigma_2 = m_2\psi^{-1}\sigma_2.$$

Operirt man an die erste Gleichung mit $S.\sigma_2$, an die zweite mit $S.\sigma_1$, so entstehen die Relationen

$$S\sigma_2\Phi^{-1}\sigma_1 = m_1 S.\sigma_2\psi^{-1}\sigma_1\,,\ S\sigma_2\Phi^{-1}\sigma_1 = m_2 S\sigma_2\psi^{-1}\sigma_1,$$

und dies erfordert

$$S\sigma_2\Phi^{-1}\sigma_1 = S.\sigma_2\psi^{-1}\sigma_1 = 0,$$

so lange m_1 und m_2 ungleich sind.

60. Bevor wir zu einer teilweisen Classification der Flächen zweiter Ordnung übergehen, wollen wir noch die Bedingung aufsuchen, welche erfüllt sein muss, damit eine Ebene

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 32)$$

die Fläche in einem Punkte berühre. Es sei σ der Berührungspunkt, so muss die Gleichung (C. 32) mit derjenigen der Tangentenebene im Punkte σ

$$S\rho(\Phi\sigma + \varepsilon) + S\sigma\varepsilon + a = 0$$

identisch sein. Somit muss

$$\frac{\Phi\sigma + \varepsilon}{\beta} = -\frac{S\sigma\varepsilon + a}{S\alpha\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 33)$$

Ausserdem genügt σ der Gleichung der Fläche. Wir können nun an (C. 33), nachdem diese Gleichung in die Form

$$\Phi\sigma + \varepsilon = -\frac{S\sigma\varepsilon + \alpha}{S\alpha\beta}\beta$$

geschrieben ist, mit $S.\Phi^{-1}\varepsilon$ operiren und dadurch $S\varepsilon\sigma + a$ bestimmen

$$S\varepsilon\sigma + a = \frac{(-S\varepsilon\Phi^{-1}\varepsilon + a)\,S\alpha\beta}{S\beta(\alpha + \Phi^{-1}\varepsilon)},$$

und jetzt ist auch unmittelbar σ bekannt, nämlich

$$\sigma = \frac{S\varepsilon\Phi^{-1}\varepsilon - a}{S\beta(\alpha + \Phi^{-1}\varepsilon)}\Phi^{-1}\beta - \Phi^{-1}\varepsilon.$$

Trägt man diesen Wert in die Gleichung der Fläche ein, so wird die verlangte Bedingung erhalten

$$S^2\beta(\alpha + \Phi^{-1}\varepsilon) - S\beta\Phi^{-1}\beta\,(S\varepsilon\Phi^{-1}\varepsilon - a) = 0.$$

Wir könnten hieraus nun aufs neue durch die Theorie der Enveloppen oder auch durch andere Betrachtungen die Gleichung des Tangentenkegels aus dem Punkte α an die Fläche gelegt erhalten, doch wollen wir nicht länger hierbei verweilen.

61. Suchen wir nun weiter die Bedingungen festzustellen, denen die Grössen Φ, ε, a der Gleichung der Fläche genügen müssen, damit die allgemeine Gleichung specielle Gebilde zweiter Ordnung darstelle.

Zuerst fragen wir nach der Bedingung für das Vorhandensein eines Mittelpunktes. Nach Art. 54 ist diese einfach, dass die Gleichung

$$\Phi\mu = -\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 35)$$

gelöst werden kann.

Genügt dieser Gleichung der Vektor eines in endlicher Entfernung liegenden Punktes, so kann die Gleichung der Fläche bedeutend vereinfacht werden. Wir verlegen sodann den Ursprung der Vektoren für die Punkte der Fläche nach dem Punkte μ, setzen daher

$$\rho = \omega + \mu = \omega - \Phi^{-1}\varepsilon.$$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung der Fläche ergibt

$$S\omega\Phi\omega = S\varepsilon\Phi^{-1}\varepsilon - a = b \ldots\ldots\ldots \quad (C. 36)$$

Wenn die Grösse b verschwindet, d. h. wenn

$$S\varepsilon\Phi^{-1}\varepsilon - a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 37)$$

so wird der Gleichung (C. 35) durch $x\omega$ genügt, wenn dasselbe von ω gilt; die Fläche zweiter Ordnung ist in diesem Falle somit ein Kegel.

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass (C. 36) die allgemeinste Bedingung ist, der Φ, ε, a genügen müssen, damit die Gleichung einen Kegel darstelle. Denn in diesem Falle muss in der Gleichung (C. 4) σ sich so bestimmen lassen, dass derselben, bei bestimmter Wahl von τ, unabhängig von x, genügt wird. Somit muss

$$S\sigma(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a = 0, \quad \Phi\sigma + \varepsilon = 0$$

und die Elimination von σ ergibt (C. 37).

62. Vielleicht mag es hier der Ort sein zu bemerken, dass die Gleichung (C. 36) der Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte in eine sehr einfache Form geschrieben werden kann, welche bisweilen mit Vorteil angewandt wird. Denken wir nämlich eine neue lineare Vektorfunktion $\chi\omega$ eingeführt, welche durch die Gleichung

$$\Phi\omega = \mp \chi^2\omega$$

definirt wird, wo das obere oder das untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem b positiv oder negativ ist, so entsteht

$$S\omega\chi^2\omega = \mp b \text{ oder } (\chi\omega)^2 = \mp b$$

und schliesslich

$$T\chi\omega = \sqrt{\pm b} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 38)$$

Wenn demnach ω ein Punkt des Ellipsoids (C. 36) ist, so ist $\chi\omega$ ein Punkt einer Kugel. Die Operation χ^{-1} deformirt daher eine Kugelfläche zu einem Ellipsoid, oder es bringt dieselbe drei unter sich rechtwinklige Ausdehnungen oder Zusammendrückungen hervor, deren Grösse und Richtung unmittelbar der Funktion Φ oder $-\chi^2$ zu entnehmen sind.

Sind σ, τ zwei conjugirte Halbmesser der Ellipsoids, somit

$$S\sigma\Phi\tau = 0,$$

so ergibt sich

$$S\sigma\chi^2\tau = S\chi\sigma\chi\tau = 0,$$

d. h. die den conjugirten Halbmessern des Ellipsoids entsprechenden Radien der Kugel sind senkrecht zu einander.

Den Achsen des Ellipsoids wird daher auch ein rechtwinkliges System von Radien der Kugel entsprechen. Wir werden bald sehen, dass diese beiden Systeme unter sich rechtwinkliger Richtungen sogar zusammenfallen.

Die Funktion $\chi\omega$ ist bei den Annahmen, dass b positiv ist und die Wurzeln der symbolischen Gleichung (*f.* 48) für Φ sämtlich negativ sind, leicht anzugeben. Nach der Gleichung (*f.* 99) hat man mit der im Art. 162 der Theorie angewandten Bezeichnung

$$\Phi\rho = -m_1\rho_1 S\rho_1\rho - m_2\rho_2 S\rho_2\rho - m_3 S\rho_3\rho,$$

und es lässt sich nun leicht verificiren, dass

$$\chi\rho = \sqrt{-m_1}\rho_1 S\rho_1\rho + \sqrt{-m_2}\rho_2 S\rho_2\rho + \sqrt{-m_3}\rho_3 S\rho_3\rho$$

sein muss.

Hieraus erhellt sogleich, dass $\chi\rho$ in diesem Falle selbstconjugirt ist und dieselben Hauptrichtungen wie die Funktion $\Phi\rho$ hat. Man erkennt auch leicht, welche Änderungen angebracht werden müssen, falls die obigen Voraussetzungen nicht zutreffen.

63. Es fragt sich nun, wann der Mittelpunkt der Fläche im Unendlichen liegt. Wir nehmen zu diesem Zwecke die allgemeine Auflösung der Gleichung (C. 35) zu Hülfe, welche im Art. 180 der Theorie hergeleitet ist und schreiben somit

$$\mu = -\frac{S\lambda\varepsilon\, V\Phi\mu\Phi\nu + S\mu\varepsilon\, V\Phi\nu\Phi\lambda + S\nu\varepsilon\, V\Phi\lambda\Phi\mu}{S\Phi\lambda\Phi\mu\Phi\nu}. \quad \text{(C. 39)}$$

Wenn nun der Nenner verschwindet, d. h. wenn die Gleichung (C. 28) stattfindet, und λ, μ, ν ganz willkürlich gewählt sind, so haben nach (*f.* 52) die Vektoren $V\phi\mu\phi\nu$, $V\phi\nu\phi\lambda$, $V\phi\lambda\phi\mu$ dieselbe Richtung, nämlich die mit $U\pi$ bezeichnete, somit wird der Punkt μ in die Unendlichkeit rücken in der Richtung des Vektors π.

Die Gleichung (C. 28) oder

$$S.\phi\lambda\phi\mu\phi\nu = 0$$

ist somit die Bedingung dafür, dass die Fläche einen unendlich fernen Mittelpunkt habe. Aus Art. 56 geht noch hervor, dass die Richtung nach diesem Mittelpunkte in jedem Systeme conjugirter Richtungen in Bezug auf die Fläche vorhanden ist.

64. Wenn aber in diesem Falle auch der Zähler der Gleichung (C. 39) verschwindet, so wird der Wert von μ nicht unendlich gross, sondern unbestimmt, nämlich nach (*f* 220)

$$\mu = yU\pi + \frac{\phi\lambda S\mu\varepsilon - \phi\mu S\lambda\varepsilon}{V.\phi\lambda\phi\mu}.$$

Wir haben es in diesem Falle mit einem Cylinder zweiter Ordnung zu tun. Die Bedingung für diesen Fall

$$S\lambda\varepsilon\, V\phi\mu\phi\nu + S\mu\varepsilon\, V\phi\nu\phi\lambda + S\nu\varepsilon\, V\phi\lambda\phi\mu = 0$$

(mit (C. 28) verbunden) hat die Gestalt einer Vektorgleichung. Weil die darin enthaltenen Vektoren

$$V\phi\mu\phi\nu, \quad V\phi\nu\phi\lambda, \quad V\phi\lambda\phi\mu$$

sämtlich der Richtung nach mit $U\pi$ zusammenfallen, so ist dieselbe doch eine Skalarbedingung, nämlich

$$S\varepsilon(\lambda TV\phi\mu\phi\nu + \mu TV\phi\nu\phi\lambda + \nu TV\phi\lambda\phi\mu) = 0.$$

Als Beispiel wollen wir wählen die in der Theorie schon erwähnte Funktion

$$\phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho$$

mit der Bedingung der Selbstconjugation

$$V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) = 0.$$

Nun ist

$$V\phi\mu\phi\nu = -\, V\gamma_1\gamma_2 S.\mu\nu\, V\alpha_1\alpha_2,$$

somit wird die Bedingung für die Cylinderfläche

$$S\varepsilon(\lambda S.\mu\nu\, V\alpha_1\alpha_2 + \mu S.\nu\lambda\, V\alpha_1\alpha_2 + \nu S.\lambda\mu\, V\alpha_1\alpha_2) = 0$$

oder nach (*c.* 45)

$$S\varepsilon\alpha_1\alpha_2 S\lambda\mu\nu = 0\,, \text{ somit } S\varepsilon\alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Daher wird

$$S\rho(\gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + 2\varepsilon) + a = 0$$

eine Cylinderfläche sein, falls ε, α_1, α_2 complanar gegeben sind, dagegen in dem anderen Falle eine Fläche mit unendlich fernem Mittelpunkt. Die Achse der Cylinderfläche ist parallel zu $V\alpha_1\alpha_2$, wie aus Art. 183 der Theorie hervorgeht.

65. Zum Abschluss dieser Betrachtungen seien dieselben weiter geführt für den Fall, wo die Vektorfunktion in die dreigliedrige Grundform gebracht ist nach Art. 158 der Theorie

$$\Phi\rho = \gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho + \gamma_3 S\alpha_3\rho$$

mit der Bedingung der Selbstconjugation (Art. 161 der Theorie)

$$V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) = 0.$$

Es ist sodann nach (*f.* 223)

$$\mu = -\frac{S\gamma_2\gamma_3\varepsilon\, V\alpha_2\alpha_3 + S\gamma_3\gamma_1\varepsilon\, V\alpha_3\alpha_1 + S\gamma_1\gamma_2\varepsilon\, V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3}.$$

Verlegen wir nun den Vektorenursprung nach diesem Mittelpunkte, so wird die Gleichung der Fläche nach (C. 35)

$$S\omega\Phi\omega = -S\varepsilon\mu - a = b$$

und wir haben es mit einem Kegel zu tun, wenn

$$S\gamma_2\gamma_3\varepsilon S\alpha_2\alpha_3\varepsilon + S\gamma_3\gamma_1\varepsilon S\alpha_3\alpha_1\varepsilon + S\gamma_1\gamma_2\varepsilon S\alpha_1\alpha_2\varepsilon - aS\alpha_1\alpha_2\alpha_3 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0$$

Die Hauprichtungen für die Funktion Φ können leicht bestimmt werden. Die symbolische Gleichung, der Φ genügt, ist nämlich

$$S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 S\alpha_3\alpha_2\alpha_1 + \Phi S(V\alpha_2\alpha_3 V\gamma_2\gamma_3 + V\alpha_3\alpha_1 V\gamma_3\gamma_1 + V\alpha_1\alpha_2 V\gamma_1\gamma_2)$$
$$+ \Phi^2 S(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) - \Phi^3 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (C. 40)$$

Wenn man nun hierin Φ durch m ersetzt und die drei Wurzeln dieser Gleichung m_1, m_2, m_3 bestimmt, so findet man die Richtungen der Achsen nach Art. 58 aus

$$(\Phi - m_1)\rho_1 = 0, \; (\Phi - m_2)\rho_2 = 0, \; (\Phi - m_3)\rho_3 = 0 \,. \quad (C. 41)$$

welche nach Art. 182 der Theorie gelöst werden können.

Sind ρ_1, ρ_2, ρ_3 Einheitsvektoren, so ist die Länge der Halbachsen leicht zu finden. Denn damit der Punkt $x\sigma$ der Fläche angehöre, muss

$$x^2 S\sigma\Phi\sigma = b \text{ somit } x = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S\sigma\Phi\sigma}}$$

und die Länge des Radiusvektors in der Richtnng σ ist somit allgemein

$$l = \frac{\sqrt{b}\,T\sigma}{\sqrt{\sigma\Phi\sigma}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S.U\sigma\Phi U\sigma}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(C. 42)}$$

Demnach sind die Längen der Halbachsen gleich

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S.\rho_1\Phi\rho_1}},\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S.\rho_2\Phi\rho_2}},\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S.\rho_3\Phi\rho_3}},$$

somit nach (C. 41)

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-m_1}},\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-m_2}},\quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-m_3}}.$$

Nach Art. 162 der Theorie nimmt $\Phi\omega$ nun die Gestalt an

$$\Phi\omega = -m_1\rho_1 S\rho_1\omega - m_2\rho_2 S\rho_2\omega - m_3\rho_3 S\rho_3\omega,$$

womit die Gleichung in die möglichst einfache Gestalt übergeführt ist.

Von der Übereinstimmung der Zeichen der Wurzeln der Gleichung (C. 40) hängt somit ab, ob man es mit einem Ellipsoid, mit einem einschaligen oder zweischaligen Hyperboloid zu tun hat.

Der Kegel

$$S\omega\Phi\omega = 0$$

ist der Asymptotenkegel der Fläche

$$S\omega\Phi\omega = b,$$

weil die unendlich fernen Punkte der letzten Gleichung auch der ersteren Genüge leisten.

66. Die Bedingung für einen unendlich fernen Mittelpunkt ist

$$S\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0,$$

wenn nicht zugleich eine der Gleichungen

$$S\gamma_2\gamma_3\varepsilon = 0,\quad S\gamma_3\gamma_1\varepsilon = 0,\quad S\gamma_1\gamma_2\varepsilon = 0$$

erfüllt ist. Die Richtung des Mittelpunktes wird durch den Zähler des Ausdrucks für μ gegeben, welcher leicht in den mit (*f.* 221) bezeichneten Wert π übergeht, wenn man beachtet dass in diesem Falle

$$V\gamma_2\gamma_3 = \delta T V\gamma_2\gamma_3,\quad V\gamma_3\gamma_1 = \delta T V\gamma_3\gamma_1,\quad V\gamma_1\gamma_2 = \delta T V\gamma_1\gamma_2$$

gesetzt werden kann.

Die Bedingung der Selbstconjugation führt aber mit sich, dass der Vektor π mit $x\delta$ identisch wird, denn es ist allgemein $\pi = x\,V.\Phi'\lambda\Phi'\mu$, somit hier

$$\pi = x\,V.\Phi\lambda\Phi\mu = y\,V\gamma_1\gamma_2.$$

Somit ist schliesslich zu setzen

$$U\mu = UV\gamma_1\gamma_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (C. 43)$$

Verlegt man nun den Ursprung der Vektoren nach einem Punkte σ der Fläche, so erhält die Gleichung derselben die Form

$$S\omega\Phi\omega + 2S\omega\nu = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (C. 44)$$

wenn wie in (C. 11)

$$\nu = \Phi\sigma + \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \quad (C. 45)$$

gesetzt ist. Nach unsren Annahmen kann ν nicht verschwinden, so lange σ nicht ins Unendliche rückt, was offenbar unmöglich ist.

Die Gleichung (C. 44) kann nun weiter dadurch vereinfacht werden, dass wir, wie im Art. 183 der Theorie schon erörtert ist, die Vektoren α_1, α_2, α_3 derart wählen, dass

$$V\alpha_1\alpha_2 = \pi,$$

wodurch $\Phi\rho$ in $\gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho$ übergeht.

Wir könnten aber auch auf die Funktion Φ wieder die rechtwinklige Transformation anwenden. Nach der Gleichung (*f.* 56), woran wir mit Φ operiren, genügt die Funktion Φ der symbolischen Gleichung

$$x_1\Phi - x_2\Phi^2 + \Phi^3 = 0.$$

Setzt man hierin wieder m statt Φ, so ergeben sich drei Werte für m, von denen der eine verschwindet. Die anderen nennen wir m_1, m_2, so werden die Hauptrichtungen gefunden aus

$$\Phi\rho_3 = 0, \; (\Phi - m_1)\rho_1 = 0, \; (\Phi - m_2)\rho_2 = 0.$$

Die erste derselben ist in diesem Falle die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt μ. Es nimmt nun die Funktion Φ die Gestalt an

$$\Phi\rho = -m_1\rho_1 S\rho_1\rho - m_2\rho_2 S\rho_2\rho,$$

weil $\Phi\mu$ verschwindet, und hiermit ist wieder für die Gleichung der Fläche die einfachste Form erhalten. Wir geraten in dieser Weise zum elliptischen oder hyperbolischen Paraboloid, je nachdem die Zeichen der Wurzeln m_1, m_2 übereinstimmen oder nicht.

Der Vektor ν kann specieller in μ übergeführt werden; denn nach (C. 45), (C. 11) haben wir sodann nur den Punkt der Fläche zu bestimmen, wo die Normale der Richtung μ parallel ist. Setzen wir daher

$$\Phi\sigma + \varepsilon = x\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 46)$$

so gilt es aus dieser Gleichung und derjenigen der Fläche σ zu bestimmen. Dadurch erhalten wir sodann den Scheitel der Fläche. Nun folgt aus (C. 46)

$$\sigma = \Phi^{-1}(x\mu - \varepsilon) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 47)$$

und dieser Vektor wird nach dem Vorhergehenden unendlich gross sein, es sei denn, dass $x\mu - \varepsilon$ in der Ebene der Vektoren γ_1, γ_2, γ_3 enthalten ist. Somit muss

$$S\gamma_2\gamma_3(x\mu - \varepsilon) = 0$$

sein, oder nach (C. 43)

$$S\mu(x\mu - \varepsilon) = 0\,, \quad x = S\varepsilon\mu^{-1}$$

und hiermit wird nun

$$\sigma = \Phi^{-1}(\mu\, V\varepsilon\mu^{-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 48)$$

Dieser Ausdruck stellt allgemein für den betrachteten Fall den Scheitel der Fläche dar. Ihr Wert ergibt sich leicht aus (f. 220), wenn man darin für λ, μ die Vektoren $V\alpha_2\alpha_3$, $V\alpha_3\alpha_1$ wählt und für δ $\mu\, V\varepsilon\mu^{-1}$ setzt; somit ist

$$\sigma = y\mu + \frac{\gamma_2 S.\alpha_2\alpha_3\mu\, V\varepsilon\mu^{-1} - \gamma_1 S.\alpha_3\alpha_1\mu\, V\varepsilon\mu^{-1}}{V\gamma_1\gamma_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad . . \quad (C. 49)$$

wobei auf (f. 87), (f. 85) zu achten ist. Schliesslich erhält man den Wert von y durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung der Fläche. Setzt man statt (C. 49)

$$\sigma = y\mu + \varkappa,$$

so ergibt sich die Gleichung ersten Grades

$$2yS\varepsilon\mu = - S\varkappa(\Phi\varkappa + 2\varepsilon) - a\,,$$

sodass die Fläche nur einen Scheitel hat.

Der Fall eines unendlich fernen Mittelpunktes tritt stets ein, wenn die Vektorfunktion in die Form

$$\gamma_1 S\alpha_1\rho + \gamma_2 S\alpha_2\rho$$

sich bringen lässt und gleichzeitig $S\gamma_1\gamma_2\varepsilon$ nicht verschwindet.

67. Wir wollen nun nicht bei diesen specielleren Fragen länger stehen bleiben; nur sei bemerkt, dass die Transformationen, welche wir in der Theorie ausführlich erörtert haben, und denen wir die Namen rechtwinklige, cyclische, focale Transformation beilegten, die Gleichungen der Flächen zweiter

Ordnung in specielle Formen zu bringen gestatten, deren wir gelegentlich bedürfen werden.

In diesem Artikel wollen wir eine Eigenschaft zeigen, welche stattfindet, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist.

Ist α ein Punkt der Rotationsachse, deren Richtung mit β zusammenfällt, so muss jede Ebene

$$S(\rho - \alpha + x\beta)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 50)$$

die Oberfläche

$$S\rho(\Phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 51)$$

in einem Kreise schneiden, dessen Mittelpunkt der Punkt $\alpha - x\beta$ ist. Somit muss für alle Werte von ρ, welche den Gleichungen (C. 50) (C. 51) Genüge leisten

$$(\rho - \alpha + x\beta)^2 = f(x).$$

Indem man bei bestimmtem x differentiirt, entsteht

$$S(\rho - \alpha + x\beta)d\rho = 0, \; S\beta d\rho = 0,$$
$$S(\Phi\rho + \varepsilon)d\rho = 0,$$

somit

$$S\beta(\rho - \alpha + x\beta)(\Phi\rho + \varepsilon) = 0$$

oder

$$S\beta(\rho - \alpha)(\Phi\rho + \varepsilon) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 52)$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Normale zur Fläche in einem Meridianschnitt enthalten ist.

Aus den vorhergehenden Artikeln erhellt, das die Bedingung, der die allgemeine Gleichung zweiten Grades genügen muss, damit dieselbe eine Rotationsfläche darstellt, ist, dass die symbolische Gleichung, welcher die Funktion Φ genügt, zwei gleiche Wurzeln hat. Dabei kann der Mittelpunkt in endlicher Entfernung oder im Unendlichen liegen.

68. Wir werden im Folgenden mehrere bekannten Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpunkte in endlicher Entfernung zeigen. Dabei sei stets die Gleichung (C. 35), oder

$$S\rho\Phi\rho = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 53)$$

der Ausgangspunkt unsrer Darstellung. In diesem Falle ist, wie schon bemerkt, der Mittelpunkt der Fläche als Vektorenursprung gewählt.

Im Art. 65 haben wir gezeigt, dass die Länge des Vektors, welcher den Mittelpunkt mit einem Punkte der Fläche verbindet, durch

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{S.U\sigma\Phi U\sigma}}$$

dargestellt wird, wenn die Richtung des Vektors mit $U\sigma$ zusammenfällt.

Mit Benutzung dieser Formel wollen wir nun zuerst den Satz beweisen: die Summe der Quadrate der reciproken Längen dreier unter sich rechtwinkligen Halbmesser ist constant.

Sind α_1, α_2, α_3 Einheitsvektoren in den Richtungen jener Halbmesser, so ist nach (C. 44) zu beweisen

$$S\alpha_1\Phi\alpha_1 + S\alpha_2\Phi\alpha_2 + S\alpha_3\Phi\alpha_3 = C. \;.\;.\;.\;.\; (C. 54)$$

wenn

$$S\alpha_1\alpha_2 = S\alpha_2\alpha_3 = S\alpha_3\alpha_1 = 0. \;.\;.\;.\;.\;.\;. (C. 55)$$

Setzen wir nun in (C. 54) statt α_1, α_2, α_3, so weit diese Grössen nicht unter dem Funktionszeichen Φ vorkommen, die aus (C. 55) sich ergebenden Werte $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, so entsteht der Ausdruck

$$S(\alpha_2\alpha_3\Phi\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1\Phi\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\Phi\alpha_3)$$

und dieser ist, weil Φ selbst conjugirt ist, nach (*f.* 41) gleich

$$x_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = - x_2,$$

wodurch die Gleichung (C. 51) bewiesen ist.

Hiermit ist nun aber zugleich eine Deutung der Invariante x_2, welche in der Theorie der linearen Vektorfunktion (Art. 145 der Theorie) auftritt, gefunden.

Die Invariante x_1 kann ebenfalls leicht gedeutet werden, wenn man nur beachtet, dass dieselbe bei Benutzung von α_1, α_2, α_3 übergeht in

$$\begin{aligned} x_1 &= - S(\alpha_1\Phi\alpha_2\Phi\alpha_3 + \alpha_2\Phi\alpha_3\Phi\alpha_1 + \alpha_3\Phi\alpha_1\Phi\alpha_2) \\ &= - x(S\alpha_1\Phi^{-1}\alpha_1 + S\alpha_2\Phi^{-1}\alpha_2 + S\alpha_3\Phi^{-1}\alpha_3) \end{aligned}$$

sodass $\frac{x_1}{x}$ der Form (C. 54) gleich kommt, nachdem Φ darin durch Φ^{-1} ersetzt ist. Wir werden aber im Art. 70 noch zu einer anderen Deutung geraten.

Der erwähnte Satz ist aber nur ein Specialfall eines weit allgemeineren Satzes, welcher leicht hergeleitet wird. Nach (C. 24) ist nämlich das Produkt der Segmente einer Sekante aus einem beliebigen Punkte σ in der Richtung des Vektors τ an die Fläche gezogen

$$P = -\frac{S\sigma(\varphi\sigma + 2\epsilon) + a}{S.U\tau\varphi U\tau}.$$

Ziehen wir daher aus diesem Punkte drei Sekanten in unter sich rechtwinkligen Richtungen, so wird der Gleichung (C. 54) zufolge die Summe der reciproken Werte der Produkte der Segmente einer jeden Secante constant sein.

Wählen wir speciell für jenen Punkt den Mittelpunkt der Fläche, so erhalten wir den ursprünglichen Satz.

69. Wenn man aus dem Centrum der Fläche ein Perpendikel auf eine Tangentenebene fallen lässt, so ist die Länge desselben leicht zu finden. Die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte α der Fläche ist nämlich nach (C. 6)

$$S\rho\varphi\alpha = b,$$

und die Länge des Lotes, aus dem Vektorenursprung darauf gefällt, ist daher

$$\pm\frac{b}{T\varphi\alpha}.$$

Es seien nun drei unter sich rechtwinklige Tangentenebenen an die Fläche gelegt, so kann gezeigt werden, dass die Summe der Quadrate der Perpendikel, aus dem Mittelpunkte auf diese Ebenen gefällt, für alle derartigen Systeme constant ist. Es ist daher zu beweisen, dass

$$\frac{1}{N\varphi\alpha_1} + \frac{1}{N\varphi\alpha_2} + \frac{1}{N\varphi\alpha_3} = C \quad \ldots\ldots\ldots (C. 56)$$

wenn

$$S\varphi\alpha_1\varphi\alpha_2 = S\varphi\alpha_2\varphi\alpha_3 = S\varphi\alpha_3\varphi\alpha_1 = 0 \quad \ldots\ldots (C. 57)$$

und

$$S\alpha_1\varphi\alpha_1 = S\alpha_2\varphi\alpha_2 = S\alpha_3\varphi\alpha_3 = b \quad \ldots\ldots\ldots (C. 58)$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht umgestalten. Setzt man nämlich

$$\varphi\alpha_1 = \beta_1, \quad \varphi\alpha_2 = \beta_2, \quad \varphi\alpha_3 = \beta_3,$$

so gehen dieselben über in die nachstehende

$$\beta_1^{-2} + \beta_2^{-2} + \beta_3^{-2} = C \quad \ldots\ldots\ldots (C. 59)$$

wenn

$$\left.\begin{array}{l} S\beta_1\beta_2 = S\beta_2\beta_3 = S\beta_3\beta_1 = 0 \\ \text{und} \\ S\beta_1\Phi^{-1}\beta_1 = S\beta_2\Phi^{-1}\beta_2 = S\beta_3\Phi^{-1}\beta_3 = b \end{array}\right\} \ldots \text{(C. 60)}$$

Aus den letzteren Gleichungen folgt nun

$$T\beta_1{}^2 = \frac{b}{S.U\beta_1\Phi^{-1}U\beta_1} = -\beta_1{}^2, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichung (C. 59) erfordert somit nur, dass

$$\Sigma S.U\beta_1\Phi^{-1}U\beta_1 = C$$

sei, wenn die ersteren Gleichungen des Systems (C. 60) stattfinden. Dies ist aber schon im vorhergehenden Artikel bewiesen.

Wir wollen noch einige Betrachtungen über jene Perpendikel, aus dem Centrum auf die Tangentenebenen gefällt, anstellen. Suchen wir nämlich den Ort des Fusspunktes des Perpendikels. Für die Tangentenebene im Punkte α ist der Fusspunkt

$$\omega = b(\Phi\alpha)^{-1}.$$

Nun beschreibt α die Fläche

$$S\alpha\Phi\alpha = b \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C. 61)}$$

Es ergibt sich daher

$$\Phi\alpha = b\omega^{-1}, \quad \alpha = b\Phi^{-1}\omega^{-1}$$

und durch Substitution in (C. 61)

$$bS.\omega\Phi^{-1}\omega = \omega^4.$$

Der Fusspunkt beschreibt daher eine Fläche vierter Ordnung, der wir später noch begegnen werden. (S. 114)

70. Wir kommen jetzt zu den bekannten **Sätzen über die conjugirten Halbmesser** der Flächen zweiter Ordnung. Allgemein seien drei solche der Richtung und Länge nach mit α_1, α_2, α_3 bezeichnet. Es bestehen sodann die Systeme der Gleichungen

$$S\alpha_1\Phi\alpha_2 = S\alpha_2\Phi\alpha_3 = S\alpha_3\Phi\alpha_1 = 0 \ldots\ldots \text{(C. 62)}$$

$$S\alpha_1\Phi\alpha_1 = S\alpha_2\Phi\alpha_2 = S\alpha_3\Phi\alpha_3 = b \ldots\ldots \text{(C. 63)}$$

Ohne eine specielle Form für Φ vorauszusetzen, können nun leicht eine Reihe von Sätzen bewiesen werden. Aus (C. 62) folgt nämlich

$$\Phi\alpha_3 = aV\alpha_1\alpha_2 \quad (a \text{ skalar}).$$

Indem nun mit $S.\alpha_3$ an diese Gleichung operirt und die dritte der Gleichungen (C. 63) beachtet wird, entsteht

$$S\alpha_3\Phi\alpha_3 = aS\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = b.$$

Hieraus lässt sich a bestimmen und es wird sodann weiter gefunden

$$\Phi\alpha_3 = \frac{b\,V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 64)$$

oder mit Rücksicht auf (f. 32)

$$\alpha_3 = b\,\frac{\Phi^{-1}V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{b}{x}\,\frac{V\Phi\alpha_1\Phi\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\alpha_1 = \frac{b}{x}\,\frac{V\Phi\alpha_2\Phi\alpha_3}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad \alpha_2 = \frac{b}{x}\,\frac{V\Phi\alpha_3\Phi\alpha_1}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

Operirt man nun hieran mit $S.\alpha_3$, $S.\alpha_1$, u.s.w. und addirt die Resultate, so entsteht

$$\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 = \frac{bx_1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 65)$$

oder in Worten: die Summe der Quadrate der Längen dreier conjugirten Durchmesser ist constant.

Durch Multiplikation der Gleichungen von der Form (C. 64) und Operation mit S an das Produkt entsteht

$$S\Phi\alpha_1\Phi\alpha_2\Phi\alpha_3 = \frac{b^3}{S^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\,S(V\alpha_2\alpha_3)(V\alpha_3\alpha_1)(V\alpha_1\alpha_2)$$

$$= -\frac{b^3}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\text{ nach Art. 169 der Theorie.}$$

Berücksichtigt man die Gleichung (f. 37), so kann dieses Resultat in die nachstehende Gleichung umgeformt werden

$$xS\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{b^3}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

somit

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = b\sqrt{-\frac{b}{x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 66)$$

oder in Worten: Das Parallelepiped auf drei conjugirten Durchmessern ist constant.

Wenn man an (C. 64) mit $S.\Phi\alpha_3$ und auch mit $S.\alpha_1\alpha_2$ operirt, so entstehen die beiden Relationen

$$(\Phi\alpha_3)^2 = \frac{bS\alpha_1\alpha_2\Phi\alpha_3}{S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 67)$$

$$S\alpha_1\alpha_2\Phi\alpha_3 = \frac{b(V\alpha_1\alpha_2)^2}{S.\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 68)$$

deren jede zu neuen Beziehungen führt. Denn wenn die beiden der Gleichung (C. 67)' analog gebildeten Gleichungen zu derselben addirt werden, erhält man

$$(\Phi\alpha_1)^2 + (\Phi\alpha_2)^2 + (\Phi\alpha_3)^2 = bx_2 \ldots\ldots \quad (C. 69)$$

wobei auf (*f.* 41) Rücksicht zu nehmen ist. In derselben Weise ergibt die Relation (C. 68) mit den analog gebildeten

$$(V\alpha_2\alpha_3)^2 + (V\alpha_3\alpha_1)^2 + (V\alpha_1\alpha_2)^2 = \frac{S^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{b} x_2 = -\frac{b^2x_2}{x} \ . \quad (C. 70)$$

sodass wir nun zwei neue Sätze gewonnen haben, deren erster lautet: Die Summe der Quadrate der reciproken Längen der Perpendikel aus dem Centrum auf drei Tangentenebenen in den Endpunkten dreier conjugirten Halbmesser gefällt, ist constant; und der zweite ist in Worten: Die Summe der Quadrate der von drei conjugirten Halbmessern in Paaren gebildeten Parallelogramme ist constant.

Aus den hier bewiesenen Eigenschaften lassen sich nun aber noch ganz leicht mehrere andere folgern. Denn, weil die Funktion Φ der symbolischen Gleichung (*f.* 48) oder

$$x - x_1\Phi + x_2\Phi^2 - \Phi^3 = 0 \ldots\ldots \quad (C. 71)$$

genügt, so erhält man, wenn man diese Gleichung nach einander auf die Vektoren α_1, α_2, α_3 anwendet, nachher mit $S.\alpha_1$, $S.\alpha_2$, $S.\alpha_3$ an die erhaltenen Resultate operirt und schliesslich addirt

$$x\Sigma\alpha^2 - x_1\Sigma S\alpha\Phi\alpha + x_2\Sigma S\alpha\Phi^2\alpha - \Sigma S\alpha\Phi^3\alpha = 0$$

oder

$$x\Sigma\alpha^2 - x_1\Sigma S\alpha\Phi\alpha + x_2\Sigma(\Phi\alpha)^2 - \Sigma S\alpha\Phi^2\alpha = 0,$$

und weil die ersteren drei Glieder nach (C. 65) (C. 63) (C. 69) bekannt sind, so gilt dasselbe von $\Sigma S\alpha\Phi^3\alpha$ oder $\Sigma S\Phi\alpha\Phi^2\alpha$.

In ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn man zuerst an (C. 71) mit Φ^n operirt hat, wo n jede ganze Zahl sein kann.

Jedem der so erhaltenen Resultate kömmt natürlich eine bestimmte geometrische Deutung zu; wir wollen uns nur noch damit beschäftigen die Gleichung

$$\Sigma S\alpha\Phi^3\alpha = \Sigma S\Phi\alpha\Phi(\Phi\alpha) = C$$

zu interpretiren. Die Länge l_1 des Radiusvektor der Fläche, welche der Normale zur Tangentenebene im Punkte α_1 parallel ist, ist nach (C. 42)

$$\sqrt{b} : \sqrt{S. U\Phi\alpha_1 \Phi(U\Phi\alpha_1)}.$$

Daher ist

$$S\Phi\alpha_1 \Phi^2\alpha_1 = \frac{bN\Phi\alpha_1}{l_1^2} = \frac{b^3}{l_1^2 L_1^2},$$

wenn L_1 die Länge des Lotes ist aus dem Centrum auf jene Tangentenebene gefällt. Die vorige Gleichung enthält daher den Satz: Wenn man aus dem Mittelpunkte einer Fläche zweiter Ordnung Senkrechten zu den Tangentenebenen in den Endpunkten dreier conjugirten Halbmesser zieht und die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der Fläche und mit den Tangentenebenen bestimmt, so ist die Summe der reciproken Werte der Quadrate von den Produkten aus den erhaltenen Segmenten einer jeden Senkrechten constant.

Wir beweisen nun weiter den Satz: die Summe der Quadrate der Projectionen von drei conjugirten Halbmessern auf eine beliebige Gerade ist constant. Die Länge der Projection des Halbmessers α_1 auf den Einheitsvektor ρ ist nämlich $TS\alpha_1\rho$; somit ist zu beweisen

$$(S\alpha_1\rho)^2 + (S\alpha_2\rho)^2 + (S\alpha_3\rho)^2 = \text{constant}.$$

Nun ist

$$(S\alpha_1\rho)^2 = S(\Phi^{-1}\rho\Phi\alpha_1)S\alpha_1\rho = \frac{b}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} S(\Phi^{-1}\rho . V\alpha_2\alpha_3)S\alpha_1\rho \text{ nach (C.67)}$$

somit ist

$$\Sigma(S\alpha_1\rho)^2 = \frac{b}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} S\Phi^{-1}\rho(V\alpha_2\alpha_3S\alpha_1\rho + V\alpha_3\alpha_1S\alpha_2\rho + V\alpha_1\alpha_2S\alpha_3\rho)$$

$$= \frac{b}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} S.\Phi^{-1}\rho(\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \text{ nach (C. 46)}$$

oder schliesslich

$$\Sigma(S\alpha_1\rho)^2 = bS\rho\Phi^{-1}\rho = \text{constant.} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C. 72)}$$

Weil im allgemeinen

$$S^2 - V^2 = N$$

so ist

$$\Sigma(S\alpha_1\rho)^2 = \rho^2\Sigma\alpha_1^2 - \Sigma NV\alpha_1\rho$$

und hieraus in Verbindung mit (C. 72) (C. 65)

$$\Sigma N V\alpha_1\rho = b\left(\frac{x_1}{x}\rho^2 - S\rho\Phi^{-1}\rho\right) = \text{constant.} \quad . \; . \; (\text{C. } 73)$$

oder in Worten der Satz: die Summe der Quadrate der Projectionen dreier conjugirten Halbmesser auf eine beliebige Ebene ist constant.

71. Wenn in dem Punkte σ der Fläche eine Tangentenebene an die Fläche gelegt wird, so ist dieselbe der zur Richtung σ conjugirten Diametralebene parallel, wie aus den Gleichungen jener Ebenen hervorgeht

$$S\rho\Phi\sigma + b = 0 \text{ und } S\rho\Phi\sigma = 0.$$

Nehmen wir drei conjugirte Halbmesser und bringen in die Endpunkte derselben Tangentenebenen

$$S\rho\Phi\alpha_1 = b\,, \quad S\rho\Phi\alpha_2 = b\,, \quad S\rho\Phi\alpha_3 = b \quad . \; . \; . \; . \; (\text{C. } 74)$$

Es wird nun der Ort des Durchschnittpunktes dieser Ebenen gesucht.

Aus den Bedingungen (C. 62) (C. 63) folgt zunächst (C. 67) oder

$$\Phi\alpha_3 = \frac{b\,V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

Wenn man diesen Wert und die analogen in (C. 74) einträgt, so entsteht

$$S\rho\alpha_2\alpha_3 = S\rho\alpha_3\alpha_1 = S\rho\alpha_1\alpha_2 = S\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Nach (c. 45) ist aber

$$\rho S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1 S\alpha_2\alpha_3\rho + \alpha_2 S\alpha_3\alpha_1\rho + \alpha_3 S\alpha_1\alpha_2\rho,$$

somit

$$\rho = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Addirt man nun die Gleichungen (C. 74), so entsteht

$$S\rho\Phi(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 3b\,, \text{ somit } S\rho\Phi\rho = 3b$$

als Gleichung des Ortes. Nun sahen wir im Art. 65, dass die Halbachsen der gegebenen Fläche mittelst b, m_1, m_2, m_3 ausgedrückt werden. Augenscheinlich ist daher der gesuchte Ort eine Fläche zweiter Ordnung, welche concentrisch und coaxial mit der gegebenen, und derselben ähnlich ist mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\sqrt{3}$.

Auch wollen wir den Ort suchen des Schnittpunktes dreier unter sich rechtwinkligen Tangentenebenen der Fläche. Sind

α, β, γ die Berührungspunkte, so sind die Gleichungen der Tangentenebenen

$$S\rho\Phi\alpha = S\rho\Phi\beta = S\rho\Phi\gamma = b,$$

mit den Bedingungen

$$S\alpha\Phi\alpha = S\beta\Phi\beta = S\gamma\Phi\gamma = b$$
$$S\Phi\beta\Phi\gamma = S\Phi\gamma\Phi\alpha = S\Phi\alpha\Phi\beta = 0.$$

Setzt man

$$\Phi\alpha = \alpha_1,\ \Phi\beta = \beta_1,\ \Phi\gamma = \gamma_1,$$

so gehen die vorhergehenden Gleichungen über in

$$S\rho\alpha_1 = S\rho\beta_1 = S\rho\gamma_1 = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 75)$$
$$S\alpha_1\Phi^{-1}\alpha_1 = S\beta_1\Phi^{-1}\beta_1 = S\gamma_1\Phi^{-1}\gamma_1 = b \quad \ldots\ldots \quad (C. 76)$$
$$S\beta_1\gamma_1 = S\gamma_1\alpha_1 = S\alpha_1\beta_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 77)$$

Aus den Gleichungen (C. 75) erhält man leicht

$$V\beta_1\gamma_1 S\alpha_1\rho + V\gamma_1\alpha_1 S\beta_1\rho + V\alpha_1\beta_1 S\gamma_1\rho = b\,V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\alpha_1 + \alpha_1\beta_1)$$

somit nach (*c*. 46) (C. 77)

$$\rho S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = b\,V(\beta_1\gamma_1 + \gamma_1\alpha_1 + \alpha_1\beta_1) \quad \ldots\ldots \quad (C. 78)$$

Weil α_1, β_1, γ_1 unter sich rechtwinklig sind, ist

$$S\alpha_1\beta_1\gamma_1 = T\alpha_1\beta_1\gamma_1 S.U\alpha_1\,U\beta_1\,U\gamma_1 = -\,T\alpha_1\beta_1\gamma_1 \text{ nach } (b. 80)$$
$$\beta_1\gamma_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_1\beta_1\gamma_1 = -\,\alpha_1^{-1}T\alpha_1\beta_1\gamma_1 \text{ u. s. w.}$$

Somit kann aus der Gleichung (C. 78) geschlossen werden

$$\rho^2 = b^2(\alpha_1^{-2} + \beta_1^{-2} + \gamma_1^{-2}).$$

Die Grössen α_1, β_1, γ_1 genügen aber denselben Bedingungen wie β_1, β_2, β_3 im Art. 69, welche mit (C. 60) bezeichnet sind. Es ist daselbst nachgewiesen, dass sodann die Relation (C. 59) stattfindet. Somit erhalten wir in unsrem Falle

$$\rho^2 = \text{constant}.$$

Der gesuchte Ort ist daher eine Kugel.

72. Wenn durch einen festen Punkt σ der Fläche drei unter sich rechtwinklige Vektoren gezogen werden, so geht die Ebene, welche die Schnittpunkte derselben mit der Fläche enthält, durch einen festen Punkt, wenn das Vektorensystem sich bewegt. Sind α, β, γ Einheitsvektoren, welche zu einander rechtwinklig aus dem Punkte σ gezogen werden, so sind die Schnittpunkte derselben mit der Fläche nach (C. 4) zu bestimmen, nämlich

$$\sigma - 2\alpha\frac{S\sigma\Phi\alpha}{S\alpha\Phi\alpha},\quad \sigma - 2\beta\frac{S\sigma\Phi\beta}{S\beta\Phi\beta},\ \text{u. s. w.}$$

und die Gleichung der Ebene, welche diese drei Punkte enthält, ist nach (d. 7)

$$S(\rho - \sigma)\left(\beta\gamma\frac{S\alpha\Phi\alpha}{S\sigma\Phi\alpha} + \gamma\alpha\frac{S\beta\Phi\beta}{S\sigma\Phi\beta} + \alpha\beta\frac{S\gamma\Phi\gamma}{S\sigma\Phi\gamma}\right) + 2S\alpha\beta\gamma = 0.$$

Setzt man hierin

$$\rho - \sigma = 2\,\frac{\alpha S\sigma\Phi\alpha + \beta S\sigma\Phi\beta + \gamma S\sigma\Phi\gamma}{S\alpha\Phi\alpha + S\beta\Phi\beta + S\gamma\Phi\gamma}$$

so wird derselben genügt [1]. Der Wert von ρ, welcher hieraus sich ergibt, kann jedoch leicht umgestaltet werden. Es ist nämlich, weil α, β, γ ein rechtwinkliges System bilden,

$$\Phi\sigma = -\alpha S\alpha\Phi\sigma - \beta S\beta\Phi\sigma - \gamma S\gamma\Phi\sigma$$

und der Nenner jenes Bruches ist nach (C. 54) constant, nämlich $-x_2$ mit der Bezeichnung des Artikels 146 der Theorie. Somit wird der Wert von ρ

$$\rho = \sigma - 2\frac{\Phi\sigma}{x_2} \quad \text{. . . . . (C. 79)}$$

Es ist nun leicht den geometrischen Ort des Punktes ρ zu bestimmen, wenn σ die Fläche beschreibt. Es folgt nämlich aus (C. 79) unmittelbar

$$\frac{2}{x_2}\sigma = -\left(\Phi - \frac{x_2}{2}\right)^{-1}\rho$$

und bei Einführung in die Gleichung der Fläche entsteht

$$S.\left(\Phi - \frac{x_2}{2}\right)^{-1}\rho\,\Phi\left(\Phi - \frac{x_2}{2}\right)^{-1}\rho = \frac{x_2^{\,2}}{4}b.$$

Der Punkt ρ beschreibt somit eine der gegebenen Fläche concentrische Fläche zweiter Ordnung.

73. Andere Beispiele geometrischer Örter sind: 1°. der Ort des Punktes, aus dem drei unter sich rechtwinklige Tangenten an die Fläche gelegt werden können.

Ist ρ ein Punkt des Ortes und sind α_1, α_2, α_3 Einheitsvektoren in den Richtungen eines solchen Systems von Tangenten, so ist, wie aus (C. 4) leicht erkannt wird,

$$\left.\begin{aligned} S^2.\rho\Phi\alpha_1 - (S\rho\Phi\rho - b)S\alpha_1\Phi\alpha_1 &= 0\\ S^2.\rho\Phi\alpha_2 - (S\rho\Phi\rho - b)S\alpha_2\Phi\alpha_2 &= 0\\ S^2.\rho\Phi\alpha_3 - (S\rho\Phi\rho - b)S\alpha_3\Phi\alpha_3 &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . (C. 80)}$$

---

[1] Man vergleiche die sechste Aufgabe im Art. 89.

$$S\alpha_2\alpha_3 = S\alpha_3\alpha_1 = S\alpha_1\alpha_2 = 0$$

und es müssen nun aus diesen Gleichungen α_1, α_2, α_3 eliminirt werden.

Addition der Gleichungen (C. 80) ergibt mit Rücksicht auf Art. 68

$$S^2.\alpha_1\Phi\rho + S^2.\alpha_2\Phi\rho + S^2.\alpha_3\Phi\rho + x_2(S\rho\Phi\rho - b) = 0.$$

Weil aber α_1, α_2, α_3 ein rechtwinkliges System bilden, so kann hierfür unmittelbar nach (c. 56) geschrieben werden

$$-(\Phi\rho)^2 + x_2(S\rho\Phi\rho - b) = 0,$$

eine Fläche zweiter Ordnung, welche mit der gegebenen concentrisch ist.

2°. Es wird der Ort des Punktes gesucht, dessen Polarebene von dem Mittelpunkte in constanter Entfernung liegt.

Wenn σ ein Punkt des Ortes ist, so muss die Gleichung gelten

$$\frac{b}{T\Phi\sigma} = \text{constant oder } (\Phi\sigma)^2 = \text{constant},$$

oder schliesslich

$$S\sigma\Phi^2\sigma = \text{constant}.$$

Der gesuchte Ort ist somit eine Flache zweiter Ordnung, welche mit der gegebenen concentrisch und coaxial ist.

Soll das Lot, aus dem Punkte selbst auf seine Polarebene gefällt, constante Länge haben, so muss die Gleichung gelten

$$\frac{S\sigma\Phi\sigma - b}{T\Phi\sigma} = \text{constant},$$

oder

$$(S\sigma\Phi\sigma - b)^2 = C(\Phi\sigma)^2.$$

In diesem Falle wird daher eine Fläche vierter Ordnung erhalten, welche wie leicht ersichtlich die gegebene Fläche berührt in ihrem Durchschnitte mit dem Kegel

$$T\Phi\sigma = 0 \text{ oder } S\sigma\Phi^2\sigma = 0.$$

74. Wir wollen nun ein für die folgenden Abschnitte sehr wichtiges Problem erörtern. Es ist dies die Bestimmung des Durchschnittes der Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho\Phi\rho = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 81)$$

mit der Ebene

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C. 82)$$

Zuerst wollen wir den Mittelpunkt jenes Durchschnittes bestimmen. Es sei derselbe μ_1 genannt, sodass erstens die Gleichung gilt

$$S(\mu_1 - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\,83)$$

Wählen wir nun einen Vektor senkrecht zu β, den wir mit $V\beta\lambda$ bezeichnen, wo λ willkürlich ist, so muss die Gerade

$$\mu_1 + xV\beta\lambda$$

die Fläche stets in solchen Punkten schneiden, denen gleiche doch entgegengesetzte Werte von x entsprechen; somit muss

$$S\mu_1\Phi\mu_1 - b + 2xS\beta\lambda\Phi\mu_1 + x^2S\beta\lambda\Phi V\beta\lambda = 0$$

für alle Werte von λ zwei solche Werte von x ergeben; d. h. es verschwindet $S.\beta\lambda\Phi\mu_1$ für jedes λ, oder es ist

$$V\beta\Phi\mu_1 = 0\,, \quad \Phi\mu_1 = a\beta$$

wo a näher bestimmt werden muss. Dies geschieht nun leicht mittelst der Gleichung (C. 83); setzt man in derselben nämlich

$$\mu_1 = a\Phi^{-1}\beta\,,$$

so wird gefunden

$$a = \frac{S\alpha\beta}{S\beta\Phi^{-1}\beta} \text{ und } \mu_1 = \Phi^{-1}\beta\,\frac{S\alpha\beta}{S\beta\Phi^{-1}\beta} \quad \ldots \quad (C.\,84)$$

wodurch die Frage gelöst ist.

Die vorhergehenden Gleichungen lassen jedoch noch eine Eigenschaft erkennen. Denn, weil die Gleichung der Ebene (C. 82) der Relation (C. 84) zufolge auch

$$S(\rho - \alpha)\Phi\mu_1 = 0$$

geschrieben werden kann, so zeigt sich, dass diese Ebene der Tangentenebene parallel ist, welche in dem Schnittpunkte des Vektors μ mit der Fläche an dieselbe gelegt wird. Die Gleichung dieser Tangentenebene ist nämlich

$$S\rho\Phi\mu_1 = \sqrt{bS\mu_1\Phi\mu_1}\,,$$

wie leicht gefunden werden kann.

Man zeigt weiter ohne Mühe, dass die Ebene (C. 82) der Diametralebene parallel geht, welche zur Richtung μ_1 conjugirt ist.

Wenn die Ebene (C. 82) sich selbst parallel verlegt wird, so bleibt nach (C. 84) die Richtung des Mittelpunktsvektors ungeändert; daher der Satz: der Ort der Mittelpunkte paralleler ebener Durchschnitte der Fläche ist der Durchmesser, dessen

Richtung conjugirt ist zur Diametralebene, welche jenen Schnitten parallel ist.

Wir müssen nun auch weiter die Richtung und die Grösse der Achsen des Durchschnittes bestimmen. Am einfachsten geschieht dies wohl, wenn wir diejenigen Durchmesser der Schnittcurve bestimmen, deren Länge $T(\rho - \mu_1)$ einen Maximum- oder Minimumwert hat.

Es müssen deshalb die Gleichungen stattfinden

$$dT(\rho - \mu_1) = 0 \text{ oder } S(\rho - \mu_1)d\rho = 0,$$
$$S\beta d\rho = 0 \text{ und } S\Phi\rho d\rho = 0,$$

woraus unmittelbar sich ergibt

$$S\beta(\rho - \mu_1)\Phi\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 85)$$

In dem speciellen Falle, wo die Schnittebene den Mittelpunkt der Fläche enthält, geht diese Gleichung über in

$$S\beta\rho\Phi\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 86)$$

und diesen Fall wollen wir zuerst weiter verfolgen. Es ist nun ρ zu bestimmen aus (C. 81), (C. 86) und

$$S\beta\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 87)$$

Aus (C. 86) folgt zunächst

$$\Phi\rho = z\beta + y\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 88)$$

und durch Operation mit $S.\rho$

$$y\rho^2 = b;$$

somit geht (C. 88) über in

$$(\Phi - b\rho^{-2})\,\rho = z\beta$$
$$\rho = z(\Phi - b\rho^{-2})^{-1}\beta$$

und in Verbindung mit (C. 87)

$$S.\beta(\Phi - b\rho^{-2})^{-1}\beta = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 89)$$

Nun kann nach (*f.* 38), (*f.* 43) jedoch gesetzt werden

$$x_m(\Phi - b\rho^{-2})^{-1}\beta = x\Phi^{-1}\beta - b\rho^{-2}(x_2\beta - \Phi\beta) + b^2\rho^{-4}\beta,$$

daher durch Operation mit $S.\beta$ und mit Rücksicht auf (C. 89)

$$xS\beta\Phi^{-1}\beta T\rho^4 + b(x_2\beta^2 - S\beta\Phi\beta)T\rho^2 + b^2\beta^2 = 0. \quad . \quad (C. 90)$$

woraus $T\rho^2 = -\rho^2$ gefunden werden kann. Weiter sind nun auch die Richtungen der Achsen bekannt, weil die Gleichung gilt

$$U\rho = U(\Phi - b\rho^{-2})^{-1}\beta. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 91)$$

Im allgemeinen Falle ist ρ zu bestimmen aus

$$\left.\begin{array}{c} S(\rho-\mu_1)\beta=0\,,\ S\rho\Phi\rho=b \\ S\beta(\rho-\mu_1)\Phi\rho=0 \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (\text{C. }92)$$

Setzen wir nun

$$\rho-\mu_1=\sigma,$$

so gehen die vorhergehenden Gleichungen über in

$$S\sigma\beta=0\,,\ S\sigma\Phi\sigma+2S\sigma\Phi\mu_1+S\mu_1\Phi\mu_1=b$$
$$S\beta\sigma(\Phi\sigma+\Phi\mu_1)=0.$$

Nun führen wir hierein den Wert von μ_1 aus (C. 84) ein und erhalten sodann

$$S\sigma\beta=0\,,\ S\sigma\Phi\sigma=b-\frac{(S\alpha\beta)^2}{S\beta\Phi^{-1}\beta}$$
$$S\beta\sigma\Phi\sigma=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\text{C. }93)$$

und dies sind gerade die Gleichuugen für den vorigen Fall, nur ist b durch

$$b-\frac{(S\alpha\beta)^2}{S\beta\Phi^{-1}\beta}\ \text{oder nach (C. 83) durch}\ b-\frac{(S\mu_1\beta)^2}{S.\beta\Phi^{-1}\beta}$$

ersetzt. Die Gleichung, welche $T(\rho-\mu_1)$ bestimmt, wird deshalb auch aus (C. 89) oder (C. 90) hervorgehen, wenn man einfach dieselbe Substitution ausführt, somit

$$xS\beta\Phi^{-1}\beta.T(\rho-\mu_1)^4+\left\{b-\frac{(S\mu_1\beta)^2}{S.\beta\Phi^{-1}\beta}\right\}(x_2\beta^2-S\beta\Phi\beta)T(\rho-\mu_1)^2+$$
$$+\beta^2\left\{b-\frac{(S\mu_1\beta)^2}{S.\beta\Phi^{-1}\beta}\right\}^2=0.$$

Bezeichnet man mit t_1 und t_2 die Werte von $T(\rho-\mu_1)^2$, welche sich hieraus ergeben, so ist

$$\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}=\frac{(x_2\beta^2-S\beta\Phi\beta)^2}{x\beta^2S\beta\Phi^{-1}\beta}=\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}+2.$$

Somit ist das Verhältnis $t_1:t_2$ unabhängig von μ_1, wodurch der Satz bewiesen ist:

Die Durchschnitte einer Fläche zweiter Ordnung mit parallelen Ebenen sind ähnliche Kegelschnitte.

Die Richtungen der Achsen des Durchschnittes sind schliesslich durch die Gleichung

$$U\sigma=U\left[\Phi-\left(b-\frac{(S\alpha\beta)^2}{S\beta\Phi^{-1}\beta}\right)\sigma^{-2}\right]^{-1}\beta\ \ldots\ (\text{C. }94)$$

bestimmt.

Wir können nun leicht zeigen, dass die so bestimmten Achsen des Kegelschnittes zu einander senkrecht und conjugirt in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung sein müssen. Denn nach (C. 93) kann gesetzt werden, wenn die beiden Werte von σ mit σ_1, σ_2 bezeichnet werden

$$\Phi\sigma_1 = z_1\beta + y_1\sigma_1, \quad \Phi\sigma_2 = z_2\beta + y_2\sigma_2$$

und die Operation mit $S.\sigma_2$, $S.\sigma_1$ ergibt nun

$$S\sigma_2\Phi\sigma_1 = y_1 S\sigma_1\sigma_2, \quad S\sigma_1\Phi\sigma_2 = y_2 S\sigma_1\sigma_2.$$

So lange aber y_1, y_2 verschieden sind, können diese Gleichungen nur stattfinden, wenn

$$S\sigma_1\Phi\sigma_2 = 0 \text{ und } S\sigma_1\sigma_2 = 0,$$

wie zu beweisen war.

75. Wir sind in dieser Weise zum Begriffe der ähnlichen Kegelschnitte gekommen und wollen im Anschluss hieran die Frage erörtern, wann ganz allgemein die Flächen zweiter Ordnung, deren auf den Mittelpunkt bezogene Gleichungen

$$S\rho\Phi\rho = b, \quad S\rho\psi\rho = c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 95)$$

sind, einander ähnlich sind.

Im Art. 65 fanden wir für die Halbachsen der ersten Fläche

$$\frac{b}{\sqrt{-m_1}}, \quad \frac{b}{\sqrt{-m_2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{-m_3}},$$

wo m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der Gleichung (*f.* 98) bedeuten. Bezeichnen wir mit n_1, n_2, n_3 die analogen Grössen für die Funktion ψ und die Coefficienten der Gleichung, welche m bestimmt und die analog zu (*f.* 98) ist, mit y, y_1, y_2, so muss, damit Ähnlichkeit der Flächen bestehe

$$m_1 : m_2 : m_3 = n_1 : n_2 : n_3.$$

Setzen wir

$$\frac{m_1}{n_1} = k$$

so ist

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{n_1 + n_2 + n_3} = k, \quad \frac{m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2}{n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2} = k^2, \quad \frac{m_1m_2m_3}{n_1n_2n_3} = k^3.$$

Somit wird

$$\frac{x_2}{y_2} = k, \quad \frac{x_1}{y_1} = k^2, \quad \frac{x}{y} = k^3$$

und zweimalige Elimination von k ergibt die gesuchten Bedingungen

$$\frac{x_2^2}{x_1} = \frac{y_2^2}{y_1},\ \frac{x_2^3}{x} = \frac{y_2^3}{y} \ldots\ldots\ldots \text{(C. 96)}$$

76. Die Auseinandersetzungen des Art. 74 erlauben uns weiter die Frage zu beantworten, wie eine Ebene gefunden werden kann, welche die Fläche zweiter Ordnung in einem Kreise schneidet. Wir haben zu diesem Zwecke offenbar nur die durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen zu betrachten. Die Schnittcurve wird ein Kreis sein, wenn die Gleichung (C. 90) zwei gleiche Wurzeln $T\rho^2$ ergibt, somit wenn die Gleichung stattfindet

$$(x_2 + S.U\beta\phi U\beta)^2 + 4xS.U\beta\phi^{-1}U\beta = 0.$$

Aus dieser Gleichung muss $U\beta$ gelöst werden, doch ist diese Lösung des Problems wenig elegant.

Nun haben wir jedoch in der Theorie die lineare Vektorfunktion in eine Form gebracht, welche eine äusserst einfache Behandlung des Problems gestattet. Wir wollen deshalb die Frage wieder vom Anfang an aufnehmen, und dabei die cyklische Form für $\phi\rho$ in Anwendung bringen, welche nach (f. 100) ist

$$\phi\rho = g\rho + hV\lambda\rho\mu;$$

g, h, λ, μ werden durch (f. 116) (f. 115) (f. 113) bestimmt. Die Gleichung der Fläche erhält nun die Gestalt

$$g\rho^2 + hS\rho\lambda\rho\mu = b,$$

oder

$$(g - hS\lambda\mu)\rho^2 + 2hS\rho\lambda S\rho\mu = b,$$

oder schliesslich nach (f. 104) (f. 115)

$$m_1\rho^2 + (m_2 - m_3)\, S\rho\lambda S\rho\mu = b \ldots\ldots \text{(C. 97)}$$

Schneidet man die Fläche durch eine der Ebenen

$$S\rho\lambda = 0,\ S\rho\mu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C. 98)}$$

so ist der Durchschnitt offenbar ein Kreis, und weil im Art. 163 der Theorie gezeigt ist, dass die Vektorfunktion nur auf eine einzige Weise in die cyclische Form gebracht werden kann, so sind nur zwei Kreisschnittebenen zu finden, deren Normalen λ, μ sind. Dieselben liegen in der Ebene der Hauptrichtungen ρ_2,

ρ_3, während die Hauptrichtung ρ_1 der mittleren Achse der Fläche angehört.

Jede der Ebenen

$$S\rho\lambda = k, \quad S\rho\mu = l,$$

wo k, l beliebige skalare Grössen bedeuten, schneidet die Fläche ebenfalls in einem Kreise. Legt man k, l alle Werte bei, so werden zwei Systeme von parallelen Kreisen erhalten, und es gilt nun der Satz, dass zwei Kreise, welche nicht dem nämlichen System angehören, auf einer Kugel liegen, und zwar ist die Gleichung dieser Kugel

$$m_1\rho^2 + (m_2 - m_3)\,S\rho\lambda S\rho\mu - (m_2 - m_3)(S\rho\lambda - k)(S\rho\mu - l) = b$$

oder

$$m_1\rho^2 + (m_2 - m_3)(kS\rho\mu + lS\rho\lambda) = b + (m_2 - m_3)kl.$$

Die Punkte der Fläche, wo die Tangentenebenen senkrecht zu den Vektoren λ, μ sind, heissen bekanntlich die Umbilici der Fläche, welche mit Hülfe der vorangegangenen Formeln leicht bestimmt werden können.

77. Wenn gefordert wird die Geraden zu bestimmen, welche ganz auf der Fläche liegen, so gilt es Werte von α, β zu finden, so dass jeder Punkt $\alpha + x\beta$ unabhängig von x der Fläche angehört.

Dies führt unmittelbar nach (C. 4) zu den Gleichungen

$$S\alpha\Phi\alpha = b, \quad S\beta\Phi\alpha = 0, \quad S\beta\Phi\beta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (C.\,99)$$

Die erste Gleichung sagt nur aus, dass der Punkt α der Fläche angehören muss; durch die zweite wird ausgedrückt, dass die Richtung β enthalten sein muss in der Diametralebene welche zum Radiusvektor des Punktes α conjugirt ist, somit auch in der Tangentenebene welche im Punkte α an die Fläche gelegt wird; nach der dritten Gleichung ist β eine Seitenlinie des asymptotischen Kegels der Fläche. Es ist somit leicht hieraus eine einfache Construktion für β zu entnehmen; β ist nämlich eine der beiden Seitenlinien des Asymptotenkegels, welche in der zum Radiusvektor α conjugirten Diametralebene liegen.

Die Auflösung der Gleichungen, welche β bestimmen, kann leicht geschehen. Man findet zunächst

$$\Phi\beta = y\,V\alpha\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\,100)$$

wo y einen bestimmten Skalarwert hat, weil $T\beta$ aus der Gleichung gehoben werden kann. Dies ist eine lineare Vektorgleichung für β, welche nach der allgemeinen Methode des Artikels 180 der Theorie gelöst werden kann. Operirt man an dieselbe mit drei nicht complanaren Vektoren α, λ, μ, so entstehen die Gleichungen

$$S\beta\Phi\alpha = 0\,,\quad S\beta(\Phi\lambda - y\,V\lambda\alpha) = 0\,,\quad S\beta(\Phi\mu - y\,V\mu\alpha) = 0,$$

welche nur zusammen bestehen können, wenn

$$S\Phi\alpha(\Phi\lambda - y\,V\lambda\alpha)(\Phi\mu - y\,V\mu\alpha) = 0 \quad . \; . \; . \; (\mathrm{C.}\,101)$$

Hieraus ergibt sich y; sodann ist

$$\beta = z\,V(\Phi\lambda - y\,V\lambda\alpha)\,(\Phi\mu - y\,V\mu\alpha) \quad . \; . \; . \; (\mathrm{C.}\,102)$$

wo z willkürlich aber skalar ist. Diese Gleichungen können einfacher geschrieben werden, wenn eine specielle Wahl für λ, μ getroffen wird. (C. 101) lautet nämlich

$$S\Phi\alpha\Phi\lambda\Phi\mu + yS\Phi\alpha(\Phi\mu\,V\lambda\alpha - \Phi\lambda\,V\mu\alpha) + y^2 S\alpha\mu\lambda S\alpha\Phi\alpha = 0.$$

Nach (*f.* 32) sind die beiden ersteren Glieder umzuformen. Wählt man sodann λ, μ derart, dass $V\lambda\mu = \alpha$, so entsteht mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (C. 99)

$$by^2 = x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{C.}\,103)$$

Für β wird weiter gefunden

$$\beta = z\,[x\Phi^{-1}\alpha - y\,V(\Phi\lambda.\,V\mu\alpha + V\lambda\alpha.\Phi\mu) - \frac{x}{b}\,\alpha^3].$$

Der Coefficient von y zwischen Klammern ist nach (*c.* 40)

$$\begin{aligned}&\alpha(S\mu\Phi\lambda - S\lambda\Phi\mu) - (\mu S\lambda\Phi\alpha - \lambda S\mu\Phi\alpha)\\ &= -\,V.\Phi\alpha\,V\lambda\mu = V\alpha\Phi\alpha;\end{aligned}$$

sodass nun der Wert von β mit Rücksicht auf (C. 103) übergeht in

$$\beta = z\,[\sqrt{xb}\Big(\Phi^{-1}\alpha - \frac{\alpha^3}{b}\Big) \pm V\alpha\Phi\alpha]. \; . \; . \; . \; (\mathrm{C.}\,104)$$

und das Problem ist hiermit völlig gelöst.

78. Wir können nun auch den Ort des Punktes auf der Fläche bestimmen, wo die beiden Geraden senkrecht zu einander sind; denn die Bedingung, welche diese Eigenschaft ausdrückt, ist

$$xb\Big(\Phi^{-1}\alpha - \frac{\alpha^3}{b}\Big)^2 - V^2\alpha\Phi\alpha = 0 \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{C.}\,104^*)$$

Diese Gleichung kann jedoch sehr vereinfacht werden. Es entsteht nämlich, wenn man an die identische Gleichung

$$x\Phi^{-1}\alpha - x_1\alpha + x_2\Phi\alpha - \Phi^2\alpha = 0 \quad . \; . \; . \; (C. 104^{**})$$

mit $S.\Phi^{-1}\alpha$ operirt und dabei die erste der Relationen (C. 99) beachtet

$$x(\Phi^{-1}\alpha)^2 = x_1 Sx\Phi^{-1}\alpha - x_2\alpha^2 + b.$$

Weiter is nach (b. 134)

$$V^2\alpha\Phi\alpha = b^2 - \alpha^2(\Phi\alpha)^2,$$

und aus (C. 104**) erhält man durch Operation mit $S.\alpha$

$$(\Phi\alpha)^2 = xS.\alpha\Phi^{-1}\alpha - x_1\alpha^2 + x_2 b.$$

Die Werte von $(\Phi^{-1}\alpha)^2$ und $V\alpha\Phi\alpha$ können nun in (C. 104*) eingetragen werden. Das Resultat nimmt nach Multiplikation mit b die Gestalt an

$$(x_1 b - x\alpha^2)(bS\alpha\Phi^{-1}\alpha - \alpha^4) = 0.$$

Wir erhalten somit eine Kugel um den Mittelpunkt der Fläche beschrieben und die Fläche vierter Ordnung, der wir schon auf S. 99 begegneten. Diese Fläche ist der Ort des Fusspunktes des Lotes aus dem Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung auf ihre Tangentenebenen gefällt. In den Schnittpunkten dieses Ortes mit der gegebenen Fläche besteht aber, wie eine Operation mit $S.\alpha$ an (C. 104) zeigt, die Relation $S\alpha\beta = 0$, d. h. weil β die Richtungen der durch den Punkt α gehenden Geraden der Fläche bestimmt, so wird α die Normale zur Fläche zweiter Ordnung sein müssen, deren Ausdruck im allgemeinen $\Phi\alpha$ war. In jenen Schnittpunkten wird demnach die Beziehung $V\alpha\Phi\alpha = 0$ stattfinden und die beiden Geraden β können nicht senkrecht zu einander sein. In dieser Weise erkennt man, dass der Ort der Schnittpunkte der zu einander senkrechten Geraden der Fläche nur aus der Kugel

$$\alpha^2 = \frac{x_1}{x} b$$

besteht.

Die Richtungen, welche die Winkel zwischen den beiden auf der Fläche gelegenen Geraden halbiren, sind

$$U\left[\sqrt{xb}\left(\Phi^{-1}\alpha - \frac{\alpha^3}{b}\right) + V\alpha\Phi\alpha\right] \pm U\left[\sqrt{xb}\left(\Phi^{-1}\alpha - \frac{\alpha^3}{b}\right) - V\alpha\Phi\alpha\right].$$

Bekanntlich sind dieselben die Richtungen der K r ü m m u n g s-curven der Fläche zweiter Ordnung im Punkte α. Ist $d\alpha$ die Tangente einer der Krümmungscurven, so ist zu setzen

$$V.d\alpha\left[U\{V\overline{xb}\left(\Phi^{-1}\alpha-\frac{\alpha^3}{b}\right)+V\alpha\Phi\alpha\}\pm\right.$$

$$\left.\pm U\{V\overline{xb}\left(\Phi^{-1}\alpha-\frac{\alpha^3}{b}\right)-V\alpha\Phi\alpha\}\right]=0 \quad . \text{(C. 105)}$$

eine Gleichung, deren Integration die Krümmungscurven ergibt.

Es wird nicht unpassend sein zu bemerken, dass allen bisherigen Untersuchungen die *allgemeine* auf den Mittelpunkt als Vektorenursprung bezogene Gleichung zu Grunde gelegt ist. Bei der Beurteilung der Vorteile, welche der Quaternionencalcül darbietet, wird der Umstand, dass diese Allgemeinheit die Einfachheit der angewandten Rechnungen und der erhaltenen Resultate nicht beeinflusst hat, einen wesentlichen Unterschied mit der gewöhnlichen Rechnungsweise darstellen.

79. Die Gleichung

$$F\rho=F_1\rho+A(S\rho\alpha_1-1)^2+2B(S\rho\alpha_1-1)(S\rho\alpha_2-1)+$$
$$+C(S\rho\alpha_2-1)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(C. 106)}$$

wo $F\rho_1$ eine Skalarfunktion zweiten Grades in ρ ist, während A, B, C skalare Grössen sind, wird im allgemeinen eine Fläche zweiter Ordnung darstellen, welche die Fläche

$$F_1\rho=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C. 107)}$$

in ihren Schnittpunkten mit der Geraden

$$S\rho\alpha_1-1=0,\ S\rho\alpha_2-1=0 \quad \ldots\ldots \text{(C. 108)}$$

doppelt berührt. Denn aus der Form der Gleichung (C. 106) geht unmittelbar hervor, dass die Gerade (C. 108) die Flächen F und F_1 in den nämlichen Punkten schneidet. Ausserdem aber findet man für die Normale ν im Punkte ρ der Fläche F, wenn dieselbe bei der Fläche F_1 mit ν_1 bezeichnet wird

$$\nu=\nu_1+\alpha_1[A(S\rho\alpha_1-1)+B(S\rho\alpha_2-1)]+$$
$$+\alpha_2[B(S\rho\alpha_1-1)+C(S\rho\alpha_2-1)].$$

Wenn ρ den Gleichungen (C. 107) (C. 108) genügt, so ist demnach auch

$$\nu=\nu_1.$$

Statt $F\rho-F_1\rho$ kann jedenfalls geschrieben werden

$$\frac{1}{C}[\{B(S\rho\alpha_1 - 1) + C(S\rho\alpha_2 - 1)\}^2 - (B^2 - AC)(S\rho\alpha_1 - 1)^2].$$

Wenn nun $B^2 - AC$ positiv ist, so kann dieser Ausdruck in zwei reelle Faktoren zerlegt werden, und erhält daher die Form

$$(S\rho\beta_1 - b_1)(S\rho\beta_2 - b_2).$$

Ist dagegen $B^2 - AC$ negativ, so erhält $F - F_1$ die Form

$$\pm[(S\rho\gamma_1 - c_1)^2 + (S\rho\gamma_2 - c_2)^2].$$

Augenscheinlich können beide Fälle in die Form

$$k(S\rho\alpha - 1)^2 + l(S\rho\beta - 1)^2$$

zusammengefasst werden, indem man k und l gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen erteilen kann.

80. Wenn wir nun einen Fokalpunkt einer Fläche zweiter Ordnung als eine unendlich kleine Kugel definiren, welche mit derselben eine doppelte Berührung hat, so ist einleuchtend, dass die Bestimmung der Fokalpunkte einer Fläche zweiter Ordnung darauf hinaus kommen muss, die Werte von σ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$n[S\rho(\Phi\rho + 2\varepsilon) + a] \equiv (\rho - \sigma)^2 + k(S\rho\alpha - 1)^2 + l(S\rho\beta - 1)^2 \quad \text{(C. 109)}$$

Genüge leisten. Vergleicht man die Zahl der Skalarconstanten in den beiden Gliedern, so zeigt sich unmittelbar, dass eine unendliche Anzahl Werte für σ, k, l, α, β gefunden werden kann. In dieser Weise wird man daher die Fokalkegelschnitte der Fläche zweiter Ordnung erhalten.

Durch die Gleichsetzung der Glieder des nämlichen Grades zu beiden Seiten jener Gleichung ergibt sich

$$nS\rho\Phi\rho = \rho^2 + kS^2\rho\alpha + lS^2\rho\beta \;\ldots\ldots\; \text{(C. 110)}$$

$$\left.\begin{array}{r} n\varepsilon + \sigma + k\alpha + l\beta = 0 \\ na = \sigma^2 + k + l \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; \text{(C. 111)}$$

Die weitere Untersuchung wird nun wesentlich erleichtert, wenn wir uns der fokalen Transformation der linearen Vektorfunktion erinnern, welche im Art. 166 der Theorie ausführlich erörtert ist. Der Einfachheit wegen wollen wir aber im weiteren voraussetzen, die Fläche zweiter Ordnung habe einen Mittelpunkt, welcher als Vektorenursprung gewählt sei. Es ist sodann nur in den obigen Formeln ε gleich Null zu setzen.

Setzt man gemäss der Gleichung (C. 110)

$$n\Phi\rho = \rho + k\alpha S\alpha\rho + l\beta S\beta\rho$$

und wendet man das Verfahren des Artikels 166 der Theorie an, um die unbekannten Grössen zu bestimmen, so erhält man zunächst bei der dort benutzten Bezeichnung

$$n = \frac{1}{m_1},\ \rho_1 = UV\alpha\beta \ \ldots\ldots\ \text{(C. 112)}$$

$$\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right)\rho_2 = k\alpha S\alpha\rho_2 + l\beta S\beta\rho_2,$$

$$\left(\frac{m_3}{m_1} - 1\right)\rho_3 = k\alpha S\alpha\rho_3 + l\beta S\beta\rho_3.$$

Setzen wir nun nach (C. 112)

$$\alpha = x\rho_2 + y\rho_3,$$
$$\beta = x_1\rho_2 + y_1\rho_3,$$

so werden für x, y die Bedingungsgleichungen erhalten

$$kx^2 + lx_1{}^2 = 1 - \frac{m_2}{m_1},\ ky^2 + ly_1{}^2 = 1 - \frac{m_3}{m_1}$$
$$kxy + lx_1y_1 = 0,$$

denen nur genügt wird durch

$$x\sqrt{k} = \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}\cos h,\ x_1\sqrt{l} = \sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}\sin h,$$

$$y\sqrt{k} = -\sqrt{1 - \frac{m_3}{m_1}}\sin h,\ y_1\sqrt{l} = \sqrt{1 - \frac{m_3}{m_1}}\cos h,$$

wo h willkürlich ist. Die erste der Gleichungen (C. 111) geht nun aber über in

$$\sigma = u\rho_2 + v\rho_3,\ \ldots\ldots\ldots\ \text{(C. 113)}$$

wenn der Kürze halber

$$u = -\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}\,(\sqrt{k}\cos h + \sqrt{l}\sin h),$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{m_3}{m_1}}\,(\sqrt{k}\sin h - \sqrt{l}\cos h),$$

gesetzt wird. Hieraus ergibt sich nun weiter

$$\frac{u^2 m_1}{m_1 - m_2} + \frac{v^2 m_1}{m_1 - m_3} = k + l\ \ldots\ldots\ \text{(C. 114)}$$

Nach der zweiten der Gleichungen (C. 111) ist jedoch

$$k + l = na - \sigma^2 = \frac{a}{m_1} + u^2 + v^2,$$

somit durch Vergleichung mit (C. 114)

$$\frac{u^2 m_1 m_2}{m_1 - m_2} + \frac{v^2 m_1 m_3}{m_1 - m_2} = a \;\ldots\ldots \quad (\text{C. } 115)$$

Aus den Relationen (C. 113) (C. 115) erhellt sofort, dass die Fokalpunkte einen Kegelschnitt bilden, dessen Achsen mit ρ_2 und ρ_3 der Richtung nach zusammenfallen. Die Quadrate der Längen dieser Achsen sind nach (C. 115)

$$a\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right), \quad a\left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1}\right).$$

Dieselben sind demnach und nach Art. 65 den Differenzen der Achsen der Fläche zweiter Ordnung gleich.

In (C. 112) haben wir nur eine von drei möglichen Voraussetzungen gemacht. Es könnte nämlich auch gesetzt werden

$$n = \frac{1}{m_2}, \quad \rho_2 = UV\alpha\beta \text{ oder } n = \frac{1}{m_3}, \quad \rho_3 = UV\alpha\beta.$$

Diesen Annahmen entsprechen noch zwei andere Fokalkegelschnitte. Man ersieht unmittelbar, dass diese Curven in den Hauptebenen der Fläche enthalten sind und dass stets eine Ellipse, eine Hyperbel, und eine imaginäre Curve darunter vorkommen müssen.

81. Die allgemeinen Betrachtungen dieser Art mögen nun mit einigen über confokale Flächen zweiter Ordnung abgeschlossen werden.

Als Definition solcher Flächen sei gewählt, dass zwei derartige Flächen die Eigenschaft haben, dass die Differenzen der Quadrate der correspondirenden Halbachsen constant sind.

Weil für die Fläche $S\rho\Phi\rho = b$ nach Art. 65

$$-\frac{b}{m_1}, \quad -\frac{b}{m_2}, \quad -\frac{b}{m_3}$$

die Quadrate der Halbachsen sind, so sind dieselben für eine confocale Fläche

$$-\left(\frac{1}{m_1} + g\right)b, \quad -\left(\frac{1}{m_2} + g\right)b, \quad -\left(\frac{1}{m_3} + g\right)b,$$

wo g willkürlich positiv oder negativ ist. Nun sind aber die reciproken Werte von m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der symbolischen Gleichung, welcher die Funktion Φ^{-1} genügt, weil die Funktion Φ der symbolischen Gleichung

$$(\Phi - m_1)(\Phi - m_2)(\Phi - m_3) = 0.$$

Genüge leistet. Ist

$$S\rho\psi\rho = b$$

die confokale Fläche, so wird die symbolische Gleichung für die Funktion ψ^{-1} sein

$$\left[\psi^{-1} - \left(\frac{1}{m_1} + g\right)\right]\left[\psi^{-1} - \left(\frac{1}{m_2} + g\right)\right]\left[\psi^{-1} - \left(\frac{1}{m_3} + g\right)\right] = 0,$$

oder

$$\left(\psi^{-1} - g - \frac{1}{m_1}\right)\left(\psi^{-1} - g - \frac{1}{m_2}\right)\left(\psi^{-1} - g - \frac{1}{m_3}\right) = 0,$$

sodass die Funktion $\psi^{-1} - g$ identisch sein muss mit Φ^{-1}, oder

$$\psi^{-1} - g = \Phi^{-1}.$$

Setzen wir nun

$$\Phi^{-1} = \Phi_1 \text{ daher auch } \Phi = \Phi_1^{-1},$$

so ist

$$\psi^{-1} = \Phi_1 + g \text{ oder } \psi = (\Phi_1 + g)^{-1},$$

und die Gleichungen der ursprünglichen Fläche und der ihr confokalen werden

$$S\rho\Phi_1^{-1}\rho = b, \quad S\rho(\Phi_1 + g)^{-1}\rho = b.$$

Im Folgenden wollen wir nun den Index 1 bei der Funktion Φ_1 wieder weglassen, sodass wir für die beiden confokalen Flächen schreiben

$$S\rho\Phi^{-1}\rho = b, \quad S\rho(\Phi + g)^{-1}\rho = b \quad \ldots\ldots \quad (C.\,116)$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Flächen zweiter Ordnung, welche mit der gegebenen Fläche confokal sind. Ist nämlich σ der Punkt, so muss die Gleichung gelten

$$S\sigma(\Phi + g)^{-1}\sigma = b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C.\,117)$$

oder nach (*f.* 38) (*f.* 42) (*f.* 43)

$$g^3 b - g^2(\sigma^2 - bx_2) - g(x_2\sigma^2 - S\sigma\Phi\sigma - bx_1) - x(S\sigma\Phi^{-1}\sigma - b) = 0 \quad (C.118)$$

eine Gleichung, welche drei Werte von g ergibt, sodass auch drei confokale Oberflächen gefunden sind.

Wenn g_1, g_2, g_3 die drei Werte von g sind, so lässt sich zeigen, dass jedes Paar der drei Flächen

$$S.\rho(\phi + g_1)^{-1}\rho = b, \quad S\rho(\phi + g_2)^{-1}\rho = b, \quad S\rho(\phi + g_3)^{-1}\rho = b$$

sich im Punkte σ senkrecht durchschneidet. Zu dem Zwecke ist nur nachzuweisen, dass die drei Normalen

$$(\phi + g_1)^{-1}\sigma, \ (\phi + g_2)^{-1}\sigma, \ (\phi + g_3)^{-1}\sigma$$

unter sich rechtwinklig sind; zum Beispiel, dass

$$S.(\phi + g_2)^{-1}\sigma(\phi + g_3)^{-1}\sigma = 0.$$

Man setze

$$(\phi + g_2)^{-1}\sigma = \tau_2, \ (\phi + g_3)^{-1}\sigma = \tau_3,$$

somit

$$\sigma = (\phi + g_2)\tau_2 = (\phi + g_3)\tau_3. \quad \ldots\ldots \quad (C. 119)$$

Nach (C. 117) ist nun auch

$$S\tau_2(\phi + g_2)\tau_2 = S\tau_3(\phi + g_3)\tau_3 = b.$$

Aus (C. 119) erhält man jedoch durch Operation mit $S.\tau_2$ und mit $S.\tau_3$

$$b = S\tau_2(\phi + g_2)\tau_2 = S\tau_2(\phi + g_3)\tau_3$$

und

$$S\tau_3(\phi + g_2)\tau_2 = S\tau_3(\phi + g_3)\tau_3 = b.$$

Daher ist auch

$$S\tau_2(\phi + g_3)\tau_3 = S\tau_3(\phi + g_2)\tau_2,$$

oder

$$(g_3 - g_2)S\tau_2\tau_3 = 0 \ \text{ d. h. } \ S\tau_2\tau_3 = 0,$$

solange $g_3 - g_2$ nicht verschwindet.

Der Beweis kann auch leicht auf andere Weise geführt werden, wenn man beachtet, dass die Operationen $(\phi + g_2)^{-1}$, $(\phi + g_3)^{-1}$ nach den Gleichungen ($f.$ 38) ($f.$ 43) commutativ sind. Denn sodann ist

$$\begin{aligned} S.(\phi+g_2)^{-1}\sigma(\phi+g_3)^{-1}\sigma &= S\sigma(\phi+g_3)^{-1}(\phi+g_2)^{-1}\sigma \\ &= \frac{1}{g_2-g_3}\, S.\sigma(\phi+g_3)^{-1}(\phi+g_2)^{-1} \\ &\qquad [(\phi+g_2)-(\phi+g_3)]\sigma \\ &= \frac{1}{g_2-g_3}[S\sigma(\phi+g_3)^{-1}\sigma - S\sigma(\phi+g_2)^{-1}\sigma] \end{aligned}$$

und die Grösse zwischen den eckigen Klammern verschwindet, weil die Grössen g_2, g_3 Wurzeln der Gleichung (C. 117) sind.

Liegt der Punkt σ in der gegebenen Fläche, so geht die Gleichung (C. 118), welche g bestimmt, über in

$$g = 0\,,\quad g^2 b - g(\sigma^2 - b x_2) - x_2 \sigma^2 + S\sigma\Phi\sigma + b x_1 = 0 \quad . \quad (C. 120)$$

Wenn g_1, g_2 die Wurzeln dieser Gleichung sind, so kann gezeigt werden, dass die Normalen

$$(\Phi + g_1)^{-1}\sigma\,,\quad (\Phi + g_2)^{-1}\sigma$$

zu den beiden durch den Punkt σ hindurchgehenden confokalen Flächen, den Achsen des Diametralschnittes der gegebenen Fläche parallel sind, welcher zum Halbmesser, nach dem Punkte σ gezogen, conjugirt ist.

Nach (C. 91) sind nämlich die Richtungen jener Achsen bestimmt durch

$$(\Phi^{-1} - b\rho^{-2})^{-1}\beta\,,$$

wenn β die Normale zur Schnittebene ist und ρ^{-2} der Gleichung (C. 89) oder

$$S\beta(\Phi^{-1} - b\rho^{-2})^{-1}\beta = 0$$

genügt. Ersetzen wir $b\rho^{-2}$ durch einen Skalar h, und beachten, dass in dem jetzigen Falle ausserdem

$$\beta = \Phi^{-1}\sigma$$

gesetzt werden muss, so werden die Achsen bestimmt durch

$$\tau = (\Phi^{-1} - h)^{-1}\Phi^{-1}\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C. 121)$$

und

$$S\tau\Phi^{-1}\sigma = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C. 122)$$

Nun ist aber

$$\tau = [\Phi(\Phi^{-1} - h)]^{-1}\sigma,$$

weil umgekehrt

$$\sigma = \Phi(\Phi^{-1} - h)\tau,$$

somit kann nun geschrieben werden

$$\tau = (1 - h\Phi)^{-1}\sigma = -\frac{1}{h}\left(\Phi - \frac{1}{h}\right)^{-1}\sigma \; . \; . \; . \quad (C. 123)$$

und die Gleichung (C. 122) geht sodann über in

$$\begin{aligned} 0 = S.(1 - h\Phi)^{-1}\sigma\Phi^{-1}\sigma &= S.\sigma\Phi^{-1}(1 - h\Phi)^{-1}\sigma \\ &= S.\sigma\Phi^{-1}(1 - h\Phi)^{-1}[(1 - h\Phi) + h\Phi]\sigma \\ &= S.\sigma\Phi^{-1}\sigma + hS\sigma(1 - h\Phi)^{-1}\sigma \\ &= b - S\sigma\left(\Phi - \frac{1}{h}\right)^{-1}\sigma\,, \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$S\sigma\left(\Phi - \frac{1}{h}\right)^{-1}\sigma = b \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (C. 124)$$

Die Gleichungen (C. 123) (C. 124), welche die Achsen des Durchschnittes bestimmen, stimmen nun vollkommen mit denjenigen überein, welche die Normalen der confokalen Flächen ergeben

$$\nu = (\Phi + g)^{-1}\sigma, \quad S\sigma(\Phi + g)^{-1}\sigma = b \text{ nach (C. 117)}$$

wenn nur $-\frac{1}{h}$ durch g ersetzt wird. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Der Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf ein System confokaler Flächen ist eine Gerade. Denn, wenn

$$S\alpha\rho = a \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (C. 125)$$

die gegebene Ebene ist, und σ der Pol in Bezug auf die Fläche des Systems

$$S\rho(\Phi + g)^{-1}\rho = b,$$

so muss die Gleichung (C. 125) identisch sein mit

$$S\rho(\Phi + g)^{-1}\sigma = b,$$

somit

$$\frac{(\Phi + g)^{-1}\sigma}{\alpha} = \frac{b}{a}, \quad \sigma = \frac{b}{a}(\Phi + g)\alpha.$$

Hieraus erhellt unmittelbar, dass der Ort des Poles, wenn g sich ändert, eine Gerade parallel zu α, somit senkrecht zur gegebenen Ebene ist.

82. Nachdem wir nun die wichtigsten Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen Falle erörtert haben, wollen wir uns weiter mit einer speciellen Fläche derselben, welche bei mehreren Untersuchungen von hervorragender Bedeutung ist, beschäftigen, nämlich mit der Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung, wie wir schon fanden, stets geschrieben werden kann

$$S\rho\Phi\rho = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (C. 126)$$

wenn der Scheitel des Kegels zum Ursprung der Vektoren gewählt wird. Schneiden wir die Fläche durch eine um den

Scheitel beschriebene Kugel, so entsteht als Durchschnitt der sphaerische Kegelschnitt, dessen Eigenschaften daher unmittelbar denen des Kegels zu entnehmen sind. Der sphaerische Kegelschnitt ist in (C. 126) enthalten, wenn wir nur die Voraussetzung machen, dass $T\rho$ constant ist. Am einfachsten ist

$$T\rho = 1 \dots\dots\dots\dots \text{(C. 127)}$$

zu setzen, wie wir gelegentlich tun werden.

Die Normale in einem Punkte des Kegels ist $\Phi\rho$; wenn $x\rho$ statt ρ gesetzt wird, so geht $\Phi\rho$ in $x\Phi\rho$ über, woraus der Satz erhellt:

Die Normalen in sämtlichen Punkten einer Seite des Kegels sind einander parallel oder die Tangentenebene in einem Punkte des Kegels berührt denselben längs der ganzen jenen Punkt enthaltenden Seite.

Die Polarebene eines jeden Punktes enthält den Scheitel des Kegels, wie aus seiner Gleichung

$$S\rho\Phi\alpha = 0$$

erhellt. Dieselbe schneidet den Kegel in zwei Geraden, welche leicht bestimmt werden können. Die beiden Gleichungen

$$S\alpha\Phi\rho = 0\,, \qquad S\rho\Phi\rho = 0$$

stimmen nämlich ganz mit den Gleichungen (C. 99) überein.

Bringt man die Funktion Φ in die cyklische Form, so wird die Gleichung des Kegels

$$(g - hS\lambda\mu)\rho^2 + 2hS\lambda\rho S\mu\rho = 0,$$

oder einfacher

$$S\lambda\rho S\mu\rho = C\rho^2 \dots\dots\dots \text{(C. 128)}$$

wo

$$\frac{hS\lambda\mu - g}{2h} = C$$

gesetzt ist. Auch kann man statt (C. 128) schreiben

$$S\lambda U\rho\, S\mu U\rho = - C \dots\dots\dots \text{(C. 129)}$$

und in dieser Form wird durch die Gleichung eine bekannte Eigenschaft der sphaerischen Kegelschnitte ausgesprochen, welche wir zunächst erörtern wollen.

Wie wir schon im Art. 76 sahen, sind λ, μ die Normalen zu den cyklischen Ebenen des Kegels oder die Punkte λ, μ auf der Einheitskugel sind die Pole der cyklischen Bogen. Somit ist

$$S\lambda U\rho = -\cos\angle\frac{\lambda}{U\rho}$$

der negative Wert des Sinus des Lotes aus dem Punkte $U\rho$ des Kegelschnittes auf den cyklischen Bogen gefällt. Die Gleichung (C. 129) enthält daher den Satz: Das Produkt der Sinus der senkrechten Bogen aus einem Punkte des Kegelschnittes auf die beiden cyklischen Bogen gefällt, ist constant.

83. Wenn man in dem Scheitel des Kegels sämtliche Normalen der Fläche zieht, so entsteht ein andrer Kegel, der Reciprokalkegel des ersteren. Die Gleichung dieses Reciprokalkegels ist leicht zu finden. Ist ω nämlich eine Seite desselben, so ist

$$\omega = x\Phi\rho, \text{ daher } S\omega\Phi^{-1}\omega = 0.$$

Die Vektoren λ, μ stehen zu diesem Kegel in einer eigentümlichen Beziehung; nach einem bekannten Satze sind dieselben nämlich die Fokallinien des Reciprokalkegels und auf der Einheitskugel sind die Punkte λ, μ die Brennpunkte des Reciprokalkegelschnittes. Wenn wir nämlich in die Gleichung (C. 115), welche die Fokalkegelschnitte der Fläche

$$S\rho\Phi\rho = a$$

bestimmt, a der Null gleich setzen, so ergibt sich

$$\frac{u^2}{m_2^{-1} - m_1^{-1}} + \frac{v^2}{m_3^{-1} - m_1^{-1}} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(C. 130)}$$

als die Gleichung eines Fokalkegelschnittes des Kegels $S\rho\Phi\rho = 0$, und man schreibt leicht die Gleichung der beiden anderen Curven hin. Führen wir nun die Voraussetzung ein

$$m_2 > m_1 > m_3,$$

so stellt (C. 130) zwei Geraden dar, welche die Fokallinien des Kegels genannt werden. Die beiden andren Fokalkegelschnitte sind imaginär; ihr einziger reeller Punkt ist der Scheitel des Kegels.

Die Fokallinien eines Kegels $S\rho\Phi\rho = 0$ fallen nach (C. 130) (C. 113) längs den Vektoren

$$\rho_2 \sqrt{m_1^{-1} - m_2^{-1}} \pm \rho_3 \sqrt{m_3^{-1} - m_1^{-1}}.$$

Diese Linien stimmen mit den Vektoren λ, λ_1 der bifokalen Transformation, welche wir im Art. 168 der Theorie auseinandersetzten, zusammen. Weil die Wurzeln der symbolischen Gleichung, der die Funktion Φ^{-1} genügt, die reciproken Werte von m_1, m_2, m_3 sind, so werden demnach die Fokallinien des Reciprokalkegels mit den Vektoren

$$\rho_2 \sqrt{m_2 - m_1} \pm \rho_3 \sqrt{m_1 - m_3}$$

der Richtung nach zusammenfallen. Vergleicht man diese Werte aber mit denjenigen von λ, μ, welche wir in der Formel (*f.* 113) geschrieben haben, so zeigt sich, dass in der Tat die Fokallinien des Reciprokalkegels mit den Vektoren λ, μ identisch sind.

84. Fällt man aus den beiden Brennpunkten eines sphaerischen Kegelschnittes Perpendikel auf eine Tangente desselben, so ist das Produkt der Sinus jener Perpendikel constant.

Wir sahen im vorigen Artikel, dass λ, μ die Brennpunkte des Kegelschnittes

$$S\sigma\Phi^{-1}\sigma = 0$$

sind. Die Tangente im Punkte σ dieses Kegelschnittes hat den Pol $U\Phi^{-1}\sigma$; somit bleibt der Wert der Grösse

$$S\lambda\, U\Phi^{-1}\sigma\, S\mu\, U\Phi^{-1}\sigma$$

zu untersuchen. Nun ist jedoch

$$U\Phi^{-1}\sigma = U\rho,$$

wenn ρ eine Seitenlinie des ursprünglichen Kegels ist. Nach der Gleichung (C. 129) ist somit das obige Produkt constant.

Wenn τ ein beliebiger Punkt T der Einheitskugel ist, so können aus demselben zwei Tangentenbogen an den Kegelschnitt gelegt werden und die Berührungspunkte P, Q oder ρ_1, ρ_2 derselben genügen den Gleichungen

$$S\rho_1\Phi\tau = S\rho_2\Phi\tau = 0 \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \quad (C. 131)$$

Fällt man nun aus einem beliebigen Punkte ρ des Kegelschnittes senkrechte Bogen PT, QT, so sind die Sinus dieser

Bogen L_1, L_2 leicht hinzuschreiben. Der Pol des Kreises PT ist nämlich $UV\tau\rho_1$ oder auch $U\Phi\rho_1$; somit

$$\sin L_1 = - SU\rho\Phi\rho_1 = - SU(\rho V\tau\rho_1) \quad \ldots \quad (C.\ 132)$$

In gleicher Weise

$$\sin L_2 = - SU\rho\Phi\rho_2 = - SU(\rho V\rho_2\tau) \quad \ldots \quad (C.\ 133)$$

Bezeichnen wir noch mit l das Lot aus dem Punkte ρ auf PQ gefällt, so ist

$$\sin l = - SU\rho V\rho_1\rho_2 = - SU\rho\Phi\tau \text{ nach (C. 131)} \quad . \quad (C.\ 134)$$

Allgemein kann gesetzt werden nach (*c*. 45)

$$\rho S\rho_1\rho_2\tau = \rho_1 S\rho_2\tau\rho + \rho_2 S\tau\rho_1\rho + \tau S\rho_1\rho_2\rho$$

und

$$\Phi\rho S\rho_1\rho_2\tau = \Phi\rho_1 S\rho_2\tau\rho + \rho_2 S\tau\rho_1\rho + \Phi\tau S\rho_1\rho_2\rho.$$

Die Operation mit $S.\rho$ an die letzte Gleichung ergibt, weil ρ dem Kegel angehört

$$S\rho\Phi\rho_1 S\rho_2\tau\rho + S\rho\Phi\rho_2 S\tau\rho_1\rho + S\rho\Phi\tau S\rho_1\rho_2\rho = 0 \quad . \quad . \quad (C.\ 135)$$

Nun ist jedoch

$$S.\rho\Phi\rho_1 = T\rho T\Phi\rho_1 SU\rho\Phi\rho_1 = - T\rho T\Phi\rho_1 \sin L_1 \text{ nach (C. 132)}$$

$$S.\rho_2\tau\rho = T\rho TV\rho_2\tau SU(\rho V\rho_2\tau) = - T\rho TV\rho_2\tau \sin L_2 \text{ nach (C. 133).}$$

In gleicher Weise können die übrigen Grössen, welche in der Gleichung (C. 135) vorkommen, umgeformt werden, wenn auch noch (C. 134) beachtet wird; es entsteht dadurch die Relation

$$(T\Phi\rho_1 TV\rho_2\tau + T\Phi\rho_2 TV\tau\rho_1) \sin L_1 \sin L_2 = - T\Phi\tau TV\rho_1\rho_2 \sin^2 l.$$

Wenn daher der Punkt ρ den sphaerischen Kegelschnitt beschreibt, so bleibt

$$\frac{\sin L_1 \sin L_2}{\sin^2 l} = \text{constant},$$

wodurch ein bekannter Satz erhalten ist: Das Produkt der Sinus der senkrechten Bogen aus irgend einem Punkte eines sphaerischen Kegelschnittes auf zwei beliebige Tangenten gefällt, steht zum Quadrat des Sinus des Perpendikels aus demselben Punkte auf die Berührungssehne gezogen, in einem constanten Verhältnis.

Die Bestimmung der Achsen des sphaerischen Kegelschnittes kommt hinaus auf die Bestimmung der Hauptebenen für die

Funktion $\Phi\rho$ und wir brauchen daher nicht länger dabei zu verweilen.

85. Wir wollen diese Betrachtungen damit schliessen, dass wir für zwei wichtige Fälle die Gleichung eines Kegels suchen.

1°. Ein Kreis und ein Punkt ausserhalb der Ebene desselben sind gegeben. Es wird der Kegel gesucht, dessen Scheitel in diesem Punkte liegt, während jener Kreis die Directrix ist.

Der Punkt sei α und der Kreis sei bestimmt durch die Gleichungen

$$(\rho-\mu)^2=-r^2,\quad S\beta\rho=a.$$

Wenn ω ein Punkt des Kegels ist, so muss die Gerade $\alpha+x(\omega-\alpha)$ den Kreis schneiden; somit muss

$$[\alpha-\mu+x(\omega-\alpha)]^2=-r^2,\quad S\beta[\alpha+x(\omega-\alpha)]=a.$$

Die Elimination von x ergibt

$$[(\alpha-\mu)S\beta(\omega-\alpha)+(a-S\alpha\beta)(\omega-\alpha)]^2+r^2S^2\beta(\omega-\alpha)=0,$$

die Gleichung eines Kegels mit dem Punkt α als Scheitel, weil dieselbe von $T(\omega-\alpha)$ unabhängig ist.

2°. Es sind fünf Vektoren α, β, γ, δ, ε gegeben; es wird die Gleichung des Kegels gefragt, welche dieselben als Seiten enthält.

Unser Ausgangspunkt bei der Beantwortung dieser Frage soll der PASCAL'sche Satz sein. Ist ρ eine willkürliche sechste Seite des Kegels, so müssen die Durchschnittsgeraden der Ebenen (α, β) und (δ, ε); (β, γ) und (ε, ρ); (γ, δ) und (ρ, α) complanar sein. Die erste Gerade ergibt sich leicht aus den beiden Gleichungen

$$S\alpha\beta\sigma=0,\quad S\delta\varepsilon\sigma=0,$$

daher

$$\sigma=x\,V.\,V\alpha\beta\,V\delta\varepsilon.$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die andren Durchschnittsgeraden. Es erhellt nun sofort, dass wenn wir die Gleichung

$$S.\,V(V\alpha\beta\,V\delta\varepsilon)\,V(V\beta\gamma\,V\varepsilon\rho)\,V(V\gamma\delta\,V\rho\alpha)=0\;.\;.\quad \text{(C. 136)}$$

hinschreiben, dieselbe den Kegel zweiten Grades darstellen muss. Umgekehrt ersieht man leicht, dass die Gleichung (C. 136) den gestellten Bedingungen Genüge leistet. Erstens gehört dieselbe einem Kegel zweiter Ordnung an, weil sie unabhängig von $T\rho$ ist, und überhaupt vom zweiten Grade in Bezug auf ρ. Setzen wir statt ρ die Vektoren α, ε, so ersieht man unmittelbar, dass dieselben der Gleichung Genüge leisten. Nehmen wir β statt ρ, so entsteht

$$S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon)\, V.\{V(V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta)\, V(V\gamma\delta\, V\beta\alpha)\} =$$
$$= S.V(V\alpha\beta\, V\delta\varepsilon)\{V\beta\alpha S.V\gamma\delta\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta - V\gamma\delta S.V\beta\alpha\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta\}$$
$$= -SV\alpha\beta\, V\delta\varepsilon\, V\gamma\delta . SV\beta\alpha\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta$$

und hierin verschwindet $S.V\beta\alpha\, V\beta\gamma\, V\varepsilon\beta$, weil die Vektoren, welche unter dem Zeichen S stehen, sämtlich senkrecht zu β, somit complanar sind.

In gleicher Weise kann bewiesen werden, dass die Vektoren γ, δ der Gleichung (C. 126) Genüge leisten.

86. Wir wollen nun allgemeiner einige Reciprokalflächen herleiten. Ist eine feste Kugel gewählt, so wird bekanntlich die Enveloppe der Polarebene eines Punktes in Bezug auf diese Kugel, wenn der Punkt eine Fläche beschreibt, die Reciprokalfläche dieser Fläche genannt in Bezug auf die feste Kugel. Es sei nun

$$\omega^2 = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 137)$$

die feste Kugel, und die Reciprokalfläche der Kugel

$$(\rho - \alpha)^2 = -a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 138)$$

wird gefragt. Die Gleichung der Polarebene eines Punktes ρ ist sodann nach (C. 6)

$$S\omega\rho = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C. 139)$$

Die Enveloppe dieser Ebene unter der Bedingung (C. 138) zu finden, differentiire man die beiden Gleichungen; das Resultat lautet

$$S(\rho - a)d\rho = 0, \; S\omega d\rho = 0$$

und diese Relationen können nur zusammen bestehen für jedes willkürliche $d\rho$, wenn

$$\rho - \alpha = x\omega.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(\rho - \alpha)^2 = x^2\omega^2 = -a^2, \; x = \pm\frac{a}{T\omega},$$

daher nun weiter

$$\rho = \alpha \pm aU\omega\ .$$

und die Substitution in (C. 139) ergibt für die gesuchte Enveloppe

$$(S\omega\alpha + r^2)^2 + a^2\omega^2 = 0,$$

eine Fläche zweiter Ordnung. Schneidet man die Fläche durch eine Ebene

$$S\omega\alpha = c,$$

wo c willkürlich ist, so ist die Durchschnittscurve ein Kreis, welcher auf einer um den Ursprung beschriebenen Kugel enthalten ist. Es ist daher augenscheinlich, dass wir es mit einer Umdrehungsfläche zu tun haben, deren Achse der Vektor α ist.

Die Reciprokalfläche einer willkürlichen Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho(\phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C. 140)$$

kann auch leicht bestimmt werden. Wir erhalten durch die Differentiation von (C. 139) (C. 140)

$$S(\phi\rho + \varepsilon)d\rho = 0, \quad S\omega d\rho = 0,$$

somit

$$\phi\rho + \varepsilon = x\omega, \quad \rho = x\phi^{-1}\omega - \phi^{-1}\varepsilon,$$

und durch Substitution dieser Werte in (C. 140)

$$x = \pm\sqrt{\frac{S\varepsilon\phi^{-1}\varepsilon - a}{S\omega\phi^{-1}\omega}},$$

$$\rho = -\phi^{-1}\varepsilon \pm \phi^{-1}\omega\sqrt{\frac{S\varepsilon\phi^{-1}\varepsilon - a}{S\omega\phi^{-1}\omega}}.$$

Trägt man nun diesen Wert in (C. 139) ein, so entsteht die gesuchte Gleichung

$$S\omega\phi^{-1}\omega(S\varepsilon\phi^{-1}\varepsilon - a) = (r^2 - S\omega\phi^{-1}\varepsilon)^2.$$

Diese Reciprokalfläche ist eine Fläche zweiter Ordnung.

87. Wenn

$$U = S\rho(\phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0, \quad V = S\rho(\phi_1\rho + 2\varepsilon_1) + a_1 = 0 \quad (C. 141)$$

zwei Flächen zweiter Ordnung sind, so ist wie in der analytischen Geometrie

$$U + kV = S\rho[(\phi + k\phi_1)\rho + 2(\varepsilon + k\varepsilon_1)] + a + ka_1 = 0 \quad (C. 142)$$

eine solche Fläche, welche die Durchschnittscurve der beiden vorhergehenden enthält, und bei veränderlichem k stellt (C. 142) ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung dar. Die bekannten Eigenschaften eines solchen Büschels lassen sich leicht herleiten.

Die Polarebene eines Punktes α in Bezug auf eine Fläche des Büschels ist nach (C. 6)

$$S\omega(\Phi\alpha + k\Phi_1\alpha + \varepsilon + k\varepsilon_1) + S\alpha(\varepsilon + k\varepsilon_1) + a + ka_1 = 0, \quad (\text{C. } 143)$$

somit eine Ebene, welche die feste Gerade

$$S\omega(\Phi\alpha + \varepsilon) + S\alpha\varepsilon + a = 0\,, \quad S\omega(\Phi\alpha + \varepsilon_1) + S\alpha\varepsilon_1 + a_1 = 0$$

enthält; daher der Satz: die Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf alle Flächen des Büschels enthalten eine feste Gerade.

Setzen wir

$$\alpha = \beta + x\gamma,$$

so ergibt (C. 143) für die Polarebene dieses Punktes

$$S\omega(\Phi\beta + k\Phi_1\beta + \varepsilon + k\varepsilon_1) + S\beta(\varepsilon + k\varepsilon_1) + a + ka_1 + \\ + x[S\omega(\Phi\gamma + k\Phi_1\gamma) + S\gamma(\varepsilon + k\varepsilon_1)] = 0$$

somit eine Ebene, welche unabhängig von x die feste Gerade

$$\left.\begin{aligned} S\omega(\Phi\beta + \varepsilon) + S\beta\varepsilon + a + k\,[S\omega(\Phi_1\beta + \varepsilon_1) + S\beta\varepsilon_1 + a_1] = 0 \\ S\omega\Phi\gamma + S\gamma\varepsilon + k\,[S\omega\Phi_1\gamma + S\gamma\varepsilon_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{C. } 144)$$

enthält. Wenn daher der Punkt eine Gerade durchläuft, so beschreibt seine Polarebene in Bezug auf irgend eine feste Fläche des Büschels eine Gerade. Die Geraden, welche in dieser Weise bei allen Flächen des Büschels erhalten werden, bilden zusammen eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung durch die Elimination von k zwischen den Gleichungen (C. 144) erhalten wird. Diese Gleichungen stellen, wie unmittelbar einleuchtet, zwei projectivische Ebenenbüschel dar.

Wenn eine Ebene

$$S\rho\alpha = c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{C. } 145)$$

gegeben ist, so kann deren Pol ω in Bezug auf eine Fläche des Büschels leicht gefunden werden. Denn weil die Polarebene des Punktes ω mit (C. 145) identisch sein muss, so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{\Phi\omega + \varepsilon + k(\Phi_1\omega + \varepsilon_1)}{\alpha} = \frac{S\omega\varepsilon + a + kS(\omega\varepsilon_1 + a_1)}{c} \; . \quad (\text{C. } 146)$$

Beschreibt nun die Fläche das Büschel, so beschreibt der Punkt ω eine Raumcurve dritten Grades. Denn wenn man an (C. 140) mit $S\lambda$, $S\mu$, $S\nu$, operirt, wo λ, μ, ν willkürliche Vektoren bedeuten, so erhält man drei projectivische Ebenenbüschel und zweimalige Elimination von k ergibt zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine Gerade gemeinsam enthalten; nämlich wenn man zwischen der ersten und zweiten und auch zwischen der ersten und dritten Gleichung k eliminirt, so enthalten die beiden entstehenden Flächen zweiter Ordnung die Gerade

$$cS(\omega\Phi\lambda + \varepsilon\lambda) - (S\omega\varepsilon + a)S\alpha\lambda = 0$$
$$cS(\omega\Phi_1\lambda + \varepsilon_1\lambda) - (S\omega\varepsilon_1 + a_1)S\alpha_1\lambda = 0.$$

Fragen wir schliesslich nach den Kegeln, welche im Büschel enthalten sind. Im Art. 61 fanden wir, dass die Bedingung, welche ausdrückt, dass eine Fläche des Büschels ein Kegel ist, wie nachstehend geschrieben werden kann

$$S(\varepsilon + k\varepsilon_1)(\Phi + k\Phi_1)^{-1}(\varepsilon + k\varepsilon_1) - (a + ka_1) = 0 \text{ . (C. 147)}$$

Nach (f. 45) kann geschrieben werden

$$x(\Phi + k\Phi_1)^{-1} = x_1 - x_2(\Phi + k\Phi_1) + (\Phi + k\Phi_1)^2,$$

wo x, x_1, x_2 durch (f. 34) (f. 41) bestimmt werden, wenn darin die Funktion Φ' durch $\Phi + k\Phi_1$ ersetzt wird. Es ist daher x vom dritten, x_1 vom zweiten, x_2 vom ersten Grade in Bezug auf k, sodass die Funktion $(\Phi + k\Phi_1)^{-1}$ das Quotient ist einer Form zweiten Grades durch eine solche dritten Grades in Bezug auf k. Demnach wird die Gleichung (C. 147) eine solche vierten Grades für k sein. In dem Büschel sind daher vier Kegel vorhanden, deren Mittelpunkte nachher durch (C. 35) oder

$$\mu = -(\Phi + k\Phi_1)^{-1}(\varepsilon + k\varepsilon_1) \text{ . . . . . (C. 148)}$$

gefunden werden können. Bekanntlich sind hiermit zugleich die Ecken der allen Flächen des Büschels gemeinsamen Polarvierseite gefunden.

Bei allen bisherigen Untersuchungen ist vorzugsweise die allgemeine Form der Gleichung zweiten Grades, sei es denn auch zum Teil in der auf den Mittelpunkt reducirten Form benutzt. Es wurde dies ermöglicht durch die äusserst eleganten Entwickelungen, welche Hamilton in Bezug auf die lineare Vektorfunktion gegeben hat. Wir brauchen aber kaum zu erwähnen, dass in manchen einzelnen Fällen eine Reduktion jener Gleichung in eine specielle Form wünschenswert sein kann, weshalb wir auch in der Theorie die vornehmsten jener Reduktionen erörtert haben. Wir wollen nun diesen Abschnitt nicht schliessen bevor wir ausser der Lösung einiger Aufgaben noch eine Anwendung der speciellen Formen der Gleichung zweiten Grades gezeigt haben.

Zu diesem Zwecke nehmen wir die Gleichung des Ellipsoids in der im Art. 109 der Theorie hergeleiteten Form

$$T(\iota\rho + \rho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\ 149)$$

und geben einige von Hamilton darüber angestellten Betrachtungen hier kurz wieder.

Es sei $OI = \iota$, $OK = \varkappa$, $OP = \rho$; wenn wir nun eine Kugel beschreiben um den Punkt O, welcher den Punkt K enthält, und wenn wir aus K einen Vektor parallel zu OP ziehen, welcher die Kugel in Q schneidet, so ist es leicht OQ zu berechnen; denn setzen wir

$$OQ = \varkappa + x\rho,$$

so ist

$$(\varkappa + x\rho)^2 = \varkappa^2, \quad x = -2S\rho^{-1}\varkappa,$$

daher

$$OQ = \varkappa - 2\rho S\rho^{-1}x = -\rho\varkappa\rho^{-1}.$$

Verbindet man Q mit I, so ist weiter

$$QI = \iota + \rho\varkappa\rho^{-1} = (\iota\rho + \rho\varkappa)\rho^{-1},$$

oder

$$QI.OP = \iota\rho + \rho\varkappa.$$

Schneidet IQ die Kugelfläche noch in Q', so ist nach einem bekannten Satze

$$IQ.IQ' = OI^2 - OK^2 = \iota^2 - \varkappa^2,$$

weil OK der Radius der Kugel ist. Somit ist nun

$$(T.QI)(T.OP) = T(\iota\rho + \rho\varkappa)$$
$$(T.QI)(T.IQ') = \varkappa^2 - \iota^2$$

Nach Gleichung (C. 149) ist daher

$$T.OP = T.IQ'.$$

Man erhält daher die nachstehende einfache Construction des Ellipsoids: Aus irgend einem Punkte K einer Kugelfläche und dem Mittelpunkte O ziehe man parallele Geraden, deren zweite wir mit OP bezeichnen, während die erste die Kugel in Q schneide. Aus einem festen Punkte I ziehe man die Gerade IQ, welche die Kugel in Q′ schneide. Nun bestimme man auf OP ein Segment, dessen Länge derjenigen von IQ′ gleich kommt. Der Ort des Punktes P ist ein Ellipsoid.

Die beiden Vektoren OI, OK sind Normalen zu den Kreisschnittebenen des Ellipsoids; dies folgt unmittelbar aus (C. 149) nämlich

$$N(\iota\rho + \rho\varkappa) = N\iota\rho + N\rho\varkappa + 2S\iota\rho\varkappa\rho = (\varkappa^2 - \iota^2)^2$$

oder

$$\rho^2(\iota - \varkappa)^2 + 4S\iota\rho S\varkappa\rho = (\varkappa^2 - \iota^2)^2.$$

Dies ist aber die aus der cyklischen Form der Vektorfunktion hergeleitete Form der Gleichung der Fläche.

Dasselbe folgt aber auch leicht aus der Construction. Ist OP senkrecht zu OK, so berührt KQ die Kugel und Q fällt in K; daher ist IQ′ gleich IK′, wenn K′ der Schnittpunkt der Geraden KI mit der Kugel ist. Ist weiter OP senkrecht zu OI, so ist Q ein Punkt des Durchschnittes der Kugel mit einer Ebene durch K senkrecht zu OI und hieraus erhellt sofort, dass IQ′ constant ist.

89. Wir gehen nun zu einigen vermischten Aufgaben über.

1°. Eine Gerade ruht auf drei gegebenen Geraden. Welche ist die Gleichung des Ortes?

Sind

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0\,, \quad V(\rho - \alpha_1)\beta_1 = 0\,, \quad V(\rho - \alpha_2)\beta_2 = 0$$

die gegebenen Geraden,

$$V(\rho - \sigma)\tau = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{C. } 150)$$

die veränderliche, so muss nach Art. 40

$$S(\sigma - \alpha)\beta\tau = 0\,, \quad S(\sigma - \alpha_1)\beta_1\tau = 0\,, \quad S(\sigma - \alpha_2)\beta_2\tau = 0 \quad . \ (\text{C. } 151)$$

Es gilt nun zwischen (C. 150), (C. 151) σ und τ zu eliminiren. Aus (C. 150) ergibt sich durch Operation mit $S.\beta$, $S.\beta_1$, $S.\beta_2$.

$$S\sigma\beta\tau = S\rho\beta\tau\,, \quad S\sigma\beta_1\tau = S\rho\beta_1\tau\,, \quad S\sigma\beta_2\tau = S\rho\beta_2\tau.$$

Demnach gehen die Gleichungen (C. 151) über in

$$S(\rho - \alpha)\beta\tau = 0\,, \quad S(\rho - \alpha_1)\beta_1\tau = 0\,, \quad S(\rho - \alpha_2)\beta_2\tau = 0.$$

Somit sind

$$V(\rho-\alpha)\beta\,,\quad V(\rho-\alpha_1)\beta_1\,,\quad V(\rho-\alpha_2)\beta_2$$

complanar, oder

$$S.\,V(\rho-\alpha)\beta\, V(\rho-\alpha_1)\beta_1\, V(\rho-\alpha_2)\beta_2=0,$$

eine Gleichung zweiten Grades in ρ, wie einleuchtet, wenn man dieselbe schreibt

$$\begin{aligned} 0 &= S.(\rho-\alpha)\beta\, V[\,V(\rho-\alpha_1)\beta_1\, V(\rho-\alpha_2)\beta_2] \\ &= S(\rho-\alpha)\beta_2\beta S[\rho(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2]\beta_1 \\ &\qquad - S(\rho-\alpha_1)\beta_1\beta_2 S[\rho(\alpha_2-\alpha)+\alpha_2\alpha]\beta. \end{aligned}$$

Die Summe der Glieder höchsten Grades gleich Null gesetzt, ergibt den Asymptotenkegel

$$S\rho\beta_2\beta S\rho(\alpha_1-\alpha_2)\,\beta_1 - S\rho\beta_1\beta_2 S\rho(\alpha_2-\alpha)\beta=0.$$

Dieser Gleichung genügen die reellen Vektoren β, β_1, β_2; der Ort ist somit eine einschaliges Hyperboloid.

2°. Es wird der Ort gefragt eines Punktes, dessen kürzeste Entfernungen von zwei gegebenen Geraden in einem constanten Verhältnis zu einander stehen.

Sind

$$V(\rho-\alpha)\beta=0\,,\quad V(\rho-\alpha_1)\beta_1=0$$

die Geraden, ω ein Punkt des Ortes, β, β_1 Einheitsvektoren, so ist nach (B. 46) die Gleichung des Ortes

$$T\,V(\omega-\alpha)\beta=kT\,V(\omega-\alpha_1)\beta_1,$$

oder mit zwei potenzirt und mit Anwendung von (*b*. 134)

$$S^2(\omega-\alpha)\beta+(\omega-\alpha)^2=k^2S^2(\omega-\alpha_1)\beta_1+k^2(\omega-\alpha_1)^2.$$

Für $k=1$ lässt sich diese Gleichung schreiben

$$S\omega(\Phi\omega+2\varepsilon)+a=0,$$

wenn

$$\Phi\omega=\beta S\omega\beta-\beta_1 S\omega\beta_1$$
$$\varepsilon=\beta_1 S\alpha_1\beta_1-\beta S\alpha\beta+\alpha_1-\alpha.$$

Nach einer Bemerkung im Art. 66 ist somit der Ort eine Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

3°. Eine Gerade dreht sich um eine feste andere Gerade. Welche Fläche wird dadurch erzeugt?

Ein Punkt der festen Geraden sei als Vektorenursprung gewählt; die Gerade falle mit dem Einheitsvektor α zusammen und

$$V(\rho - \beta)\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (C. 152)$$

sei die bewegende Gerade. Der Vektor ρ führt sodann eine konische Drehung um α als Achse aus, und in einem beliebigen Augenblik ist derselbe somit nach Art. 111 der Theorie

$$\omega = \alpha^t \rho \alpha^{-t}.$$

Umgekehrt ist

$$\rho = \alpha^{-t} \omega \alpha^t$$

und die Substitution dieses Wertes in (C. 152) ergibt

$$V(\alpha^{-t}\omega\alpha^t - \beta)\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (C. 153)$$

als Gleichung der durch die Umdrehung hervorgebrachten Fläche, aus der nun noch die Skalargrösse t eliminirt werden muss.

Aus (C. 153) folgt

$$\alpha^{-t}\omega\alpha t = \beta + x\gamma \ldots\ldots\ldots \quad (C. 154)$$

und eine Potenzirung ergibt

$$\omega^2 = (\beta + x\gamma)^2.$$

Wenn man jedoch die Gleichung (C. 154) mit α^t multiplicirt und an das Resultat mit S operirt, entsteht

$$S\omega\alpha = S(\beta + x\gamma)\alpha.$$

Zwischen den beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen kann nun x eliminirt werden. Das Resultat

$$\omega^2 S^2\gamma\alpha = [\gamma S\omega\alpha - V.\alpha V\beta\gamma]^2$$

ist die Gleichung der hervorgegangenen Umdrehungsfläche, ein einschaliges Rotationshyperboloid. Wenn man den Mittelpunkt nach (C. 35) aus der Gleichung

$$\omega S^2\gamma\alpha - \alpha\gamma^2 S\omega\alpha = -\alpha S.\gamma\alpha V\beta\gamma$$

bestimmt, so findet man

$$\omega = -\alpha S.\beta\gamma(V\gamma\alpha)^{-1}.$$

Der Gleichung (B. 52) zufolge erscheint dieser Punkt als der Fusspunkt der kürzesten Entfernung zwischen der rotirenden Geraden und der Achse.

4°. Wenn zwei durch den Anfangspunkt gehende Geraden sich in festen Ebenen derart bewegen, dass sie stets einen constanten Winkel einschliessen, so wird die von der Normale zur Ebene jener Geraden erzeugte Kegelfläche gefragt.

Es seien die Einheitsvektoren ρ und σ die Richtungen der beiden Geraden. Setzen wir

$$S\rho\alpha = 0, \quad S\sigma\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\,155)$$

so sind dieselben beständig in zwei Ebenen enthalten, welche durch den Anfangspunkt senkrecht zu den Vektoren α, β gelegt sind. Weiter ist

$$S\rho\sigma = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C.\,156)$$

Nun ist

$$\omega = u\,V\rho\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C.\,157)$$

eine Seite des gesuchten Kegels. Aus diesen Gleichungen sind ρ, σ zu eliminiren. Aus (C. 157) folgt

$$S\rho\omega = 0, \quad S\sigma\omega = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (C. 146)

$$\sigma = UV\beta\omega, \quad \rho = UV\alpha\omega,$$

und schliesslich durch Einsetzung in (C. 156)

$$SU.\,V\beta\omega\,V\alpha\omega = C.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen vom vierten Grade, weil aus derselben hervorgeht

$$S^2.\,V\beta\omega\,V\alpha\omega = C^2\,V^2\beta\omega\,V^2\alpha\omega.$$

Wenn jedoch die bewegenden Geraden zu einander rechtwinklig bleiben, so verschwindet C und es entsteht

$$S.\,V\beta\omega\,V\alpha\omega = 0 \text{ oder } S\alpha\omega S\beta\omega - \omega^2 S\alpha\beta = 0,$$

ein Kegel zweiten Grades.

5°. Wenn

$$S\rho(\Phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0, \quad S\rho(\Phi_1\rho + 2\varepsilon_1) + a_1 = 0 \quad . \ (C.\,158)$$

zwei Flächen zweiter Ordnung sind, so wird der Ort der Pole der Tangentenebenen der ersten Fläche in Bezug auf die zweite gesucht.

Es sei ρ ein Punkt der ersten Fläche, so ist die Tangentenebene nach (C. 6)

$$S\omega(\Phi\rho + \varepsilon) + S\Phi\varepsilon + a = 0,$$

und wenn σ der Pol dieser Ebene in Bezug auf die zweite Fläche ist, so muss diese Gleichung identisch sein mit

$$S\omega(\Phi_1\sigma + \varepsilon_1) + S\sigma\varepsilon_1 + a_1 = 0;$$

daher

$$\frac{\Phi_1\sigma + \varepsilon_1}{\Phi\rho + \varepsilon} = \frac{S\sigma\varepsilon_1 + a_1}{S\rho\varepsilon + a}.$$

Mit Rücksicht auf Art. 36 schliesst man hieraus unmittelbar, dass zwischen den Punkten ρ, σ eine projectivische Verwandtschaft besteht und weil der Punkt ρ eine Fläche zweiter Ordnung beschreibt, so muss dasselbe mit dem Punkte σ stattfinden.

6°. Wenn aus einem Punkte der ersten Fläche der vorigen Aufgabe drei Sehnen in derselben gezogen werden, welche einem System conjugirter Durchmesser der anderen parallel sind, so geht die Ebene der Endpunkte jener Sehnen durch einen festen Punkt, wenn das System conjugirter Durchmesser sich ändert.

Sind α, β, γ die Richtungen der conjugirten Durchmesser, somit

$$S\alpha\Phi_1\beta = S\beta\Phi_1\gamma = S\gamma\Phi_1\alpha = 0 \quad \ldots\ldots \quad (C.\ 159)$$

und ist ρ ein Punkt der ersten Fläche, so ist die Ebene der Endpunkte der Sehnen dieser Fläche, welche aus ρ parallel zu α, β, γ gezogen werden nach Art. 72

$$S(\omega-\rho)\left(\beta\gamma\frac{S\alpha\Phi\alpha}{S\alpha\Phi\rho}+\gamma\alpha\frac{S\beta\Phi\beta}{S\beta\Phi\rho}+\alpha\beta\frac{S\gamma\Phi\gamma}{S\gamma\Phi\rho}\right)+2S\alpha\beta\gamma=0,$$

und diese Ebene enthält jeden Punkt ω für den

$$\omega-\rho=u\alpha\frac{S\alpha\Phi\rho}{S\alpha\Phi\alpha}+y\beta\frac{S\beta\Phi\rho}{S\beta\Phi\beta}+z\gamma\frac{S\gamma\Phi\rho}{S\gamma\Phi\gamma} \quad \ldots \quad (C.\ 160)$$

falls nur die Zahlen u, y, z der Relation genügen

$$u+y+z=-2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\ 161)$$

Aus (C. 159) kann man schliessen

$$\alpha = UV\Phi_1\beta\Phi_1\gamma = \frac{x\Phi_1^{-1}V\beta\gamma}{TV\Phi_1\beta\Phi_1\gamma}$$

wenn x die gewöhnliche Bedeutung in der symbolischen Gleichung für die Funktion Φ_1 hat. Es ist daher, wenn wir die Glieder der zweiten Seite der Gleichung (C. 160) einzeln nehmen

$$\alpha\frac{S\alpha\Phi\rho}{S\alpha\Phi\alpha}=\Phi_1^{-1}V\beta\gamma\frac{S\alpha\Phi\rho}{S\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma}.$$

Setzen wir nun weiter

$$\frac{u}{S.\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma}=\frac{y}{S.\beta\Phi\Phi_1^{-1}V\gamma\alpha}=\frac{z}{S.\gamma\Phi\Phi_1^{-1}\alpha\beta}=$$

$$=\frac{-2}{S.[\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma+\beta\Phi\Phi_1^{-1}V\gamma\alpha+\gamma\Phi\Phi_1^{-1}V\alpha\beta]}$$

wodurch die Gleichung (C. 161) befriedigt wird, so geht (C. 160) über in

$$\omega-\rho=-\frac{2\Phi_1^{-1}(V\beta\gamma S\alpha\Phi\rho+V\gamma\alpha S\beta\Phi\rho+V\alpha\beta S\gamma\Phi\rho)}{S[\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma+\beta\Phi\Phi_1^{-1}V\gamma\alpha+\gamma\Phi\Phi_1^{-1}V\alpha\beta]}$$

$$=\frac{-2\Phi_1^{-1}\Phi\rho S\alpha\beta\gamma}{S[\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma+\beta\Phi\Phi_1^{-1}V\gamma\alpha+\gamma\Phi\Phi_1^{-1}V\alpha\beta}\ \text{nach (C. 46).}$$

Die Funktion $\Phi\Phi_1^{-1}$ ist eine lineare Vektorfunktion, deren Inverse $\Phi_1\Phi^{-1}$ ist. Bezeichnen wir den Wert der Grössen x, x_1, x_2 der symbolischen Gleichung für die Funktion $\Phi_1\Phi^{-1}$ mit x, x_1, x_2 und die Conjugirte der Funktion $\Phi_1\Phi^{-1}$ mit $(\Phi_1\Phi^{-1})'$, so ist nach (*f.* 32)

$$\mathrm{x}\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma=V.(\Phi_1\Phi^{-1})'\beta(\Phi_1\Phi^{-1})'\gamma$$

und nach (*f.* 41) ist nun

$$\frac{S[\alpha\Phi\Phi_1^{-1}V\beta\gamma+\beta\Phi\Phi_1^{-1}V\gamma\alpha+\gamma\Phi\Phi_1^{-1}V\alpha\beta]}{S\alpha\beta\gamma}=\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}}$$

eine Invariante; somit wird schliesslich

$$\omega=\rho-2\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}_1}\Phi_1^{-1}\Phi\rho\ \ldots\ldots\ \text{(C. 162)}$$

der allen Ebenen gemeinsame Punkt sein.

7°. Man soll den Ort der einen Ecke eines Tetraeders bestimmen, wenn jede der drei in ihr zusammenstossenden Kanten einen festen Punkt enthält, die drei anderen Ecken in festen Ebenen sich bewegen und ausserdem die Ebene dieser Ecken fortwährend durch einen festen Punkt geht.

Die drei ersten festen Punkte seien α, β, γ, der letzte δ; die drei festen Ebenen mögen mit

$$S\rho\alpha_1=1,\ S\rho\beta_1=1,\ S\rho\gamma_1=1$$

bezeichnet sein. Wenn wir nun noch die erste Ecke mit ρ, die drei anderen mit ρ_1, ρ_2, ρ_3 bezeichnen, so werden die Bedingungen des Problems ausgedrückt durch das System

$$S\rho_1\alpha_1=1,\ S\rho_2\beta_1=1,\ S\rho_3\gamma_1=1\ \ldots\ \text{(C. 163)}$$

$$S(\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1+\rho_1\rho_2)\delta=S\rho_1\rho_2\rho_3\ \ldots\ \text{(C. 164)}$$

$$V(\rho-\alpha)(\rho_1-\alpha)=0,\ V(\rho-\beta)(\rho_2-\beta)=0,\ V(\rho-\gamma)(\rho_3-\gamma)=0.$$

Hieraus folgt nun zuerst

$$\rho_1=\frac{\rho-u\alpha}{1-u}.$$

Durch die Substitution in (C. 163) bestimmt man u, und erhält sodann weiter

$$\rho_1 = \frac{\rho - \alpha - V.\alpha_1 V\alpha\rho}{S(\rho - \alpha)\alpha_1}.$$

Ähnliche Werte ergeben sich für ρ_2, ρ_3 und wenn dieselben in (C. 164) eingesetzt werden, so ist die Gleichung des Ortes erhalten.

90. Wir wollen diesem Abschnitte noch eine Bemerkung hinzufügen über die Raumcurve dritter Ordnung, welche als Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, die eine gemeinsame Gerade enthalten, entstanden gedacht werden kann. Im Art. 87 sind wir zu einer solchen Curve geraten durch eine Betrachtung über den Pol einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels. Dieselbe entstand durch die Elimination der Grösse k aus der Vektorgleichung (C. 137)

$$\frac{\Phi\omega + \varepsilon + k(\Phi_1\omega + \varepsilon_1)}{\alpha} = \frac{S\omega\varepsilon + a + k(S\omega\varepsilon_1 + a_1)}{c}.$$

Diese Elimination kann aber auch auf ganz andere Weise als in jenem Artikel geschehen, wodurch wir eine merkwürdige Form der Gleichung der Raumcurve dritter Orduung erhalten. Schreiben wir die Gleichung (C. 137) nämlich in die Gestalt

$$c(\Phi\omega + \varepsilon) - (S\omega\varepsilon + a)\alpha = -k[c(\Phi_1\omega + \varepsilon_1) - (S\omega\varepsilon_1 + a_1)\alpha_1],$$

so ist

$$V[c(\Phi\omega + \varepsilon) - (S\omega\varepsilon + a)\alpha][c(\Phi_1\omega + \varepsilon_1) - (S\omega\varepsilon_1 + a_1)\alpha_1] = 0, \quad \text{(C. 165)}$$

wodurch die Elimination von k vollzogen ist.

Die allgemeinste Form der Gleichung dieser Raumcurve ist somit

$$V(\Phi\omega + \alpha)(\psi\omega + \beta) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C. 166)}$$

Zählt man aber die Skalarconstanten, welche in der Gleichung vorkommen, so findet man deren sechzehn, während bekanntlich die Curve dritter Ordnung durch zwölf Constanten bestimmt ist. Hieraus schliessen wir, dass die Gleichung

$$V(\rho + \alpha)(\Phi\rho + \beta) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(C. 167)}$$

wo Φ eine willkürliche Vektorfunktion ist, eine beliebige kubische Raumcurve darstellen kann. Legt man nämlich den Vektorenursprung in den Punkt $-\alpha$, welcher der Curve angehört, d. h. setzt man

$$\rho + \alpha = \sigma,$$

so wird die Gleichung der Curve

$$V.\sigma(\Phi\sigma + \gamma) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C.\,168)$$

wo γ statt $\beta - \Phi\alpha$ geschrieben ist. Weil aber eine kubische Raumcurve durch sechs Punkte bestimmt ist und jeder Punkt zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten der Gleichungen der Curve mit sich führt, so muss die Gleichung (C. 168), wenn dieselbe in der Tat die allgemeinste kubische Curve darstellen kann, noch zehn beliebige Skalarconstanten enthalten. Dass dies der Fall ist, ergibt sich leicht, wenn wir $\Phi\sigma$ in der mit (*f.* 122) bezeichneten Form wählen

$$\Phi\rho = Vq_0\rho + hV\lambda\rho\mu = V(g + \delta)\rho + hV\lambda\rho\mu,$$

wo g, h beliebige Skalare, λ, μ Einheitsvektoren und δ ein beliebiger Vektor ist. Die Gleichung (C. 168) nimmt sodann nämlich die Gestalt an

$$V\sigma\gamma + V\sigma\delta\sigma + hV.\sigma V\lambda\sigma\mu = 0,$$

welche durch h dividirt werden kann und sodann in γ, δ, λ, μ zehn Skalarconstanten enthält.

Es ist leicht den Übergang von (C. 166) nach (C. 167) zu vollziehen. Man setze nämlich

$$\Phi\omega = \rho, \quad \omega = \Phi^{-1}\rho,$$

eine Transformation, wodurch die Ordnung der Raumcurve nach Art. 37 nicht geändert werden kann; es entsteht sodann

$$V(\rho + \alpha)(\psi\Phi^{-1}\rho + \beta) = 0,$$

und hierin kann $\psi\Phi^{-1}$ durch eine beliebige nicht selbstconjugirte Vektorfunktion ersetzt werden.

Statt der Gleichung (C. 167) kann auch geschrieben werden

$$\Phi\rho + \beta = x(\rho + \alpha) \text{ oder } \rho = (\Phi - x)^{-1}(x\alpha - \beta),$$

wo x eine variable Skalargrösse ist. Schneidet man diese Curve durch eine beliebige Ebene, so ist aus dem Werte von $(\Phi - x)^{-1}$, den wir schon mehrmals benutzten, klar, dass stets drei Schnittpunkte erhalten werden.

Wir können nun auch noch leicht einen Satz nachweisen, welcher sich auf zwei projectivisch auf einander bezogene Räume bezieht. Wenn nämlich σ_1, σ_2 zwei beliebig gewählte aber feste einander entsprechende Punkte S_1, S_2 derselben darstellen, ρ_1 und ρ_2 oder P_1 und P_2 zwei veränderliche Punkte, so suchen wir den Ort derjenigen Punkte, für welche die Geraden S_1P_1, S_2P_2 parallel sind. Es gilt sodann

$$V(\rho_1 - \sigma_1)(\rho_2 - \sigma_2) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (C. 169)$$

und nach (B. 41)

$$\rho_2 = \frac{\Phi\rho_1 + \alpha_1}{S\beta_1\rho_1 + 1}.$$

Trägt man diesen Wert in (C. 169) ein, so entsteht

$$V(\rho_1 - \sigma_1)(\Phi\rho_1 - \sigma_2 S\beta_1\rho_1 + \alpha_1 - \sigma_2) = 0,$$

oder

$$V(\rho_1 - \sigma_1)(\psi\rho_1 + \gamma_1) = 0.$$

Der gesuchte Ort ist daher eine Raumcurve dritter Ordnung.

ALLGEMEINE THEORIE DER FLÄCHEN.

91. Wir wollen im Nachfolgenden für die Gleichung einer beliebigen Fläche, wie wir dieselbe in (B. 16) fanden, allgemein schreiben

$$F(\rho) = F(S\alpha_1\rho\,,\ S\alpha_2\rho\,,\ S\alpha_3\rho) = C\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{(D. 1)}$$

wo nur β_1, γ_1 durch α_2, α_3 ersetzt sind.

Die Funktion F ist eine Summe von Gliedern, deren jedes die Form

$$(S\alpha_1\rho)^a\,(S\alpha_2\rho)^b\,(S\alpha_3\rho)^c$$

hat; die Summe der Zahlen a, b, c ist höchstens der Ordnungszahl n der Fläche gleich. Wenn ein solches Glied differentiirt wird, so entsteht

$$a(S\alpha_1\rho)^{a-1}(S\alpha_2\rho)^b(S\alpha_3\rho)^c S\alpha_1 d\rho + b(S\alpha_1\rho)^a(S\alpha_2\rho)^{b-1}(S\alpha_3\rho)^c S\alpha_2 d\rho + \text{u.s.w.}$$

Der Coefficient von $S\alpha_1 d\rho$ ist einfach der Differentialquotient des Gliedes in Bezug auf das Argument $S\alpha_1\rho$; derjenige von $S\alpha_2 d\rho$ ist der Differentialquotient in Bezug auf $S\alpha_2\rho$ u. s. w. Wenn wir demnach die Differentialquotienten der Funktion F in Bezug auf die Argumente $S\alpha_1\rho$, $S\alpha_2\rho$, $S\alpha_3\rho$ mit F_1, F_2, F_3 bezeichnen und — was uns erst nachher von Nutzen sein wird — in gleicher Weise zweimalige Differentiation durch zwei hinzugefügte Indices zu erkennen geben, sodass F_{12} der zweite Differentialquotient von F bedeutet, wenn erst in Bezug auf $S\alpha_1\rho$, nachher in Bezug auf $S\alpha_2\rho$ differentiirt wird, so ist ersichtlich, dass das Resultat der Differentiation der Gleichung (D. 1) geschrieben werden kann

$$dF\rho = S(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3)d\rho = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 2)}$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass die Richtung der Normale der Fläche im Punkte ρ durch $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$ dargestellt wird. Wir setzen daher für diese Normale

$$\nu = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 3)}$$

Es ist klar, dass F_1 das Resultat ist, welches erhalten wird, wenn man die ursprünglich gegebene Skalargleichung (B. 8) der Fläche

$$F(x, y, z) = C$$

in Bezug auf x differentiirt und nachher x, y, z durch $S\alpha_1\rho$, $S\alpha_2\rho$, $S\alpha_3\rho$ ersetzt. HAMILTON schreibt deshalb die Normale in andrer Form. Denkt man noch anstatt α_1, α_2, α_3 ein rechtwinkliges System von Einheitsvektoren i, j, k gewählt, so schreibt HAMILTON statt (D. 3)

$$\nu = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)F$$

und bezeichnet ferner das an F operirende Symbol mit

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} = \nabla \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 4)}$$

sodass einfacher entsteht

$$\nu = \nabla F \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 5)}$$

Mit Hülfe der Normale ist es leicht die Gleichung der Tangentenebene in einem willkürlichen Punkte ρ der Fläche anzugeben, nämlich

$$S(\omega - \rho)\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 6)}$$

92. Wenn der Constanten C in (D. 1) verschiedene Werte beigelegt werden, so stellt die Gleichung ein System von Flächen derselben Ordnung dar. Insbesondere werden

$$F\rho = C, \; F\rho = C + dC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 7)}$$

zwei aufeinanderfolgende Flächen des Systems darstellen. Ziehen wir von einem Punkte ρ der ersten Fläche in der Richtung der Normale ein Linienelement, welches durch die zweite Fläche begrenzt wird; dasselbe kann mit $d\rho$ bezeichnet werden, sodass die Gleichung gelten muss.

$$F(\rho + d\rho) = C + dC,$$

oder weil $d\rho$ unendlich klein gedacht wird

$$F\rho + dF\rho = C + dC,$$

und weil

$$F\rho = C,\ dF\rho = S\nu d\rho,$$

so entsteht

$$S\nu d\rho = dC.$$

Nun ist jedoch unsren Voraussetzungen gemäss

$$d\rho = x\nu,\ \text{daher}\ x\nu^2 = dC$$

und schliesslich

$$d\rho = \nu^{-1}dC\ \text{oder}\ Td\rho T\nu = dC \ldots\ldots \quad \text{(D. 8)}$$

Die Länge des Elementes $d\rho$ können wir die Entfernung der beiden Flächen im Punkte ρ nennen; es folgt sodann aus (D. 8), dass die Entfernung der Flächen in verschiedenen Punkten der Länge des Vektors ν umgekehrt proportional ist.

Hätten wir aus dem Punkte ρ ein Element $d\rho_1$ nach der zweiten Fläche gezogen, welches mit ν einen Winkel x einschliesst, so ist klar, dass

$$Td\rho_1 \cos x = Td\rho.$$

Um die Funktion F eine bestimmte Änderung dC erfahren zu lassen, hat man demzufolge in der Richtung ν eine kürzere Strecke zurückzulegen als in jeder anderen Richtung. Man kann somit sagen, die Operation ∇ bringe, indem sie an eine Skalarfunktion wirkt, den Vektor hervor, längs dem die schnellste Änderung dieser Funktion stattfindet. Diese Deutung ist für Anwendungen auf dem Gebiete der Mechanik und Physik sehr wichtig.

93. Wir werden im Folgenden auch mehrmals das Diffential des Vektors ν bedürfen. Aus (D. 3) folgt

$$\begin{aligned} d\nu &= \alpha_1 dF_1 + \alpha_2 dF_2 + \alpha_3 dF_3 \\ &= \alpha_1 Sd\rho(\alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}) + \alpha_2 Sd\rho(\alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23}) + \\ &\qquad + \alpha_3 Sd\rho(\alpha_1 F_{13} + \alpha_2 F_{23} + \alpha_3 F_{33}) \end{aligned}$$

oder

$$d\nu = \Phi d\rho \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 9)}$$

wo Φ eine selbstconjugirte Vektorfunktion ist, wie unmittelbar einleuchtet. Man kann auch schreiben

$$\begin{aligned} \Phi\rho = &(\alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}) S\alpha_1\rho + (\alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23}) S\alpha_2\rho + \\ &+ (\alpha_1 F_{13} + \alpha_2 F_{23} + \alpha_3 F_{33}) S\alpha_3\rho. \ldots\ldots \quad \text{(D. 10)} \end{aligned}$$

Diese Darstellung der Grösse $d\nu$ als lineare Vektorfunktion von $d\rho$ ist für die Anwendungen, welche wir bald machen werden, von ungemeiner Bedeutung.

94. Man pflegt zu sagen, die Gleichung

$$S\nu d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D.\,11)$$

sei die Differentialgleichung der Fläche (D. 1), welche in der Tat durch Integration von (D. 11) sich ergibt.

Es ist leicht aus allgemeinen Gleichungen von Familien von Flächen die Eigenschaften des Vektors ν herzuleiten und umgekehrt aus bekannten Eigenschaften des Vektors ν auf die Familie der Fläche zu schliessen. Wir wollen einige Fälle genauer betrachten.

Die Kegelflächen sind dadurch charakterisirt, dass ihrer Gleichung durch $x(\rho - \alpha)$ genügt wird, wenn dasselbe von $(\rho - \alpha)$ gilt, wo α den Scheitel bedeutet und x beliebig ist. Dies erfordert, dass die Gleichung homogen in Bezug auf $T(\rho - \alpha)$ sei, sodass nach Aushebung des Faktors $T(\rho - \alpha)^n$, für den Scheitel als Vektorenursprung, die Gleichung wird

$$fU\rho = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D.\,12)$$

Eine Differentiation ergibt nun

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) dU\rho = 0.$$

Nach (e. 23) ist aber

$$dU\rho = V\frac{d\rho}{\rho} \,.\, U\rho = \frac{(V\rho d\rho)\rho}{T\rho^3} = -\frac{\rho\, V\rho d\rho}{T\rho^3} \quad \ldots \quad (D.\,13)$$

Somit wird

$$S.(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3)\rho\, V\rho d\rho = 0,$$

und hieraus schliesst man, dass

$$\nu = \rho\, V\rho(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3).$$

Durch Operation mit $S.\rho$ erhält man schliesslich

$$S\nu\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D.\,14)$$

wodurch die bekannte Eigenschaft der Normale des Kegels ausgedrückt wird, welche in dem Satze enthalten ist: die Tangentenebene enthält die Seitenlinie des Kegels, welche durch den Berührungspunkt geht.

Für Cylinderflächen ist die bekannte Eigenschaft der Normale, dass dieselbe senkrecht zur Erzeugenden ist, welche parallel zu α sei. Sodann ist

$$S\alpha\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 15)}$$

und diese Gleichung folgt leicht aus der allgemeinen Gleichung jener Flächen. Dies zu beweisen ist wohl am einfachsten, wenn wir in einer durch den Vektorenursprung gehenden Ebene senkrecht zu α eine Direktrix des Cylinders geben. Sind β, γ zwei darin enthaltenen Vektoren, so kann für die Directrix gelten

$$\omega = x\beta + y\gamma \, , \; f(x, \, y) = C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 16)}$$

Ein Punkt des Cylinders ist sodann durch

$$\rho = \omega + z\alpha \quad \text{oder} \quad \rho = x\beta + y\gamma + z\alpha$$

für jedes beliebige z dargestellt, daher wenn man mit $S.\beta$ und mit $S\gamma$ operirt,

$$S\rho\beta = x\beta^2 + yS\beta\gamma \, , \; S\rho\gamma = xS\beta\gamma + y\gamma^2.$$

Hieraus können nun x, y bestimmt werden und in Verbindung mit der zweiten der Gleichungen (D. 16) ergibt sich sodann

$$F(S\beta\rho \, , \; S\gamma\rho) = C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 17)}$$

als allgemeine Gleichung der Cylinderflächen, deren Erzeugende parallel zu α sind. Aus der Differentiation von (D. 17) geht nun hervor

$$\nu = \beta F_b + \gamma F_c \, ,$$

wenn F_b, F_c die Differentialquotienten von F in Bezug auf $S\beta\rho$, $S\gamma\rho$ sind. Durch Operation mit $S.\alpha$ an die zuletzt erhaltene Gleichung ergibt sich (D. 15).

Für Umdrehungsflächen wird die Eigenschaft der Normale in dem Meridianschnitt enthalten zu sein, wenn die Achse parallel zum Einheitsvektor α, und der Vektorenursprung in einen Punkt der Achse gelegt wird, ausgedrückt durch die Gleichung

$$S\alpha\rho\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 18)}$$

Die allgemeine Gleichung der Umdrehungsflächen ist leicht hinzuschreiben. Der Winkel zwischen dem Vektor nach einem Punkte derselben bleibt nämlich bei der Drehung constant und ist nur eine Funktion der Länge jenes Vektors.
Man kann somit schreiben

$$\left.\begin{array}{l} S\alpha\rho = f(T\rho) \quad \text{oder} \quad TV\alpha\rho = f_1(T\rho), \\ \text{oder schliesslich} \\ \qquad TV\alpha\rho = f_2(S\alpha\rho). \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 19)}$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen differentiirt, so entsteht

$$S\alpha d\rho = f'(T\rho)dT\rho = f_1(T\rho)S\rho d\rho,$$

wo f' die Derivirte der Funktion f ist, f_1 eine neue Funktion. Somit ist

$$\nu = x[\alpha - \rho f_1(T\rho)]$$

und durch Operation mit $S.\alpha\rho$ entsteht sodann (D. 18).

Als letztes Beispiel mögen die Conoidflächen gewählt werden. Es seien α, β, γ Einheitsvektoren; α in der Richtung der Achse des Conoids, β sei die Richtung der Erzeugenden in irgend einer Lage, γ die Normale zur Ebene, der die Erzeugende stets parallel bleibt, sodass

$$S\beta\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 20)}$$

Weiter sei

$$T\beta = T\gamma = 1.$$

Wenn die Erzeugende in irgend eine Lage gekommen ist, welche mit $\gamma^y\beta$ bezeichnet werden kann, so schneide sie die Achse im Punkte $x\alpha$. Es bestehen sodann die Gleichungen

$$U(\rho - x\alpha) = \gamma^y\beta,\ y = f(x) \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 21)}$$

Durch Operation mit $S.\gamma$ an die erste Gleichung ergibt sich

$$S\gamma(\rho - x\alpha) = 0,\ x = \frac{S\gamma\rho}{S\alpha\gamma};$$

und durch Operation mit $S.\beta$

$$S.\beta U(\rho - x\alpha) = -\cos y\frac{\pi}{2} = S\beta U(\rho S\gamma\alpha - \alpha S\gamma\rho).$$

Nach der zweiten der Gleichungen (D. 21) gilt somit die Beziehung

$$S.\beta UV(\gamma V\alpha\rho) = F(S\gamma\rho) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 22)}$$

als allgemeine Quaterniongleichung der Conoidflächen. Die Differentiation ergibt, — wenn man beachtet, dass nach (e. 24)

$$dUV(\gamma V\alpha\rho) = -V[V(\gamma V\alpha d\rho)V(\gamma V\alpha\rho)].\frac{UV(\gamma V\alpha\rho)}{NV(\gamma V\alpha\rho)}$$

$$= \gamma S.V\alpha\rho V(\gamma V\alpha d\rho)\frac{V(\gamma V\alpha\rho)}{T^3V(\gamma V\alpha\rho)}$$

$$= \gamma V(\gamma V\alpha\rho)\frac{S\alpha\gamma S\alpha\rho d\rho}{T^3V(\gamma V\alpha\rho)},$$

— die Gleichung

$$\frac{S\alpha\gamma S\alpha\rho d\rho}{T^3 V(\gamma V\alpha\rho)} S\alpha\beta\rho = S.F'(S\gamma\rho)\gamma d\rho,$$

woraus geschlossen wird

$$x\nu = \frac{S\alpha\gamma S\alpha\beta\rho}{T^3 V(\gamma V\alpha\rho)} V\alpha\rho - \gamma F'(S\gamma\rho)$$

und die Operation mit $S.\gamma V\alpha\rho$ ergibt nun die Differentialgleichung

$$S.\nu\gamma V\alpha\rho = 0 \quad \text{(D. 23)}$$

sodass ν stets senkrecht ist zum Vektor $V.\gamma V\alpha\rho$. Derselbe ist aber nichts anderes, als die Erzeugende der Fläche, welche durch den gewählten Punkt ρ hindurchgeht.

95. Wir wollen nun allgemein die Frage nach der Bedingung lösen, welche erfüllt sein muss, damit die Differentialgleichung (D. 11) integrirt werden könne, daher einem System von Flächen angehöre.

Im Art. 93 haben wir gesehen, dass der Vektor $d\nu$, welcher aus einer Funktion $F(S\alpha_1\rho, S\alpha_2\rho, S\alpha_3\rho)$ hergeleitet wird, jedenfalls eine selbstconjugirte lineare Vektorfunktion von $d\rho$ sein muss. Wenn daher der gegebene Vektor ν nicht derart ist, dass $d\nu$ dieser Forderung genügt, so kann die Gleichung (D. 11) nur integrabel sein, wenn ein Skalarfaktor $f\rho$ gefunden werden kann, derart, dass die Funktion νf der Bedingung genügt

$$d.\nu f = \Phi_1 d\rho \quad \text{(D. 24)}$$

wo Φ_1 selbstconjugirt ist.

Setzen wir nun voraus, dass

$$d\nu = \Phi d\rho$$

eine nicht selbstconjugirte Funktion sei und schreiben nach (*f.* 94)

$$(\Phi - \Phi')\rho = 2V\vartheta\rho \quad \text{(D. 25)}$$

wo der Wert von ϑ durch (*f.* 95) bekannt ist, so erhält man weiter

$$\Phi_1 d\rho = d.\nu f = f d\nu + \nu df = f\Phi d\rho + \nu S\sigma d\rho,$$

wenn

$$df = S\sigma d\rho \quad \text{(D. 26)}$$

gesetzt wird. Somit ist

$$\Phi_1' d\rho = f\Phi' d\rho + \sigma S\nu d\rho.$$

Hieraus ergibt sich

$$(\Phi_1 - \Phi_1')\, d\rho = f(\Phi - \Phi')\, d\rho + \nu S\sigma d\rho - \sigma S\nu d\rho$$

oder nach (D. 23)

$$\begin{aligned}(\Phi_1 - \Phi_1')d\rho &= 2fV\delta d\rho + V.d\rho\, V\sigma\nu \\ &= V(2f\delta - V\sigma\nu)d\rho\end{aligned}$$

und die Selbstconjugation der Funktion Φ_1 erfordert nun, dass die zweite Seite unabhängig von $d\rho$ verschwinde, daher

$$2f\delta - V\sigma\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{D. }27)$$

und durch Operation mit $S.\nu$ entsteht hieraus

$$S.\nu\delta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{D. }28)$$

wo δ durch (D. 25) definirt wird. Dieser Bedingung muss ν jedenfalls genügen, damit die Differentialgleichung integrabel sei.

Wählen wir als Beispiel die Differentialgleichung

$$S\alpha\rho d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{D. }29)$$

wobei offenbar gilt

$$\nu = V\alpha\rho,$$

so ist

$$\Phi d\rho = V.\alpha d\rho$$

nicht selbstconjugirt. Man findet aber aus (D. 25)

$$\delta = \alpha, \text{ somit } S\nu\delta = 0,$$

und die Gleichung (D. 29) ist daher integrabel. In der Tat, wenn man dieselbe mit $(V\alpha\rho)^{-2}$ multiplicirt, so entsteht

$$S\frac{d\rho}{V\alpha\rho} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{D. }30)$$

Weil aber nach (*e.* 27), wenn β einen willkürlichen aber constanten Vektor bedeutet,

$$\begin{aligned} d\angle\frac{V\alpha\rho}{V\alpha\beta} &= -S.\frac{V\alpha d\rho}{V\alpha\rho}UV.V\alpha\rho V\alpha\beta = \mp S.\frac{V\alpha d\rho}{V\alpha\rho}U\alpha \\ &= \mp\frac{S.U\alpha V\alpha d\rho V\alpha\rho}{(V\alpha\rho)^2} = \pm T\alpha S\frac{d\rho}{V\alpha\rho},\end{aligned}$$

so ist das Integral der Gleichung (D. 30)

$$\angle \frac{V\alpha\rho}{V\alpha\beta} = \text{constant.}$$

Auch auf andere Weise als die hier erörterte, welche den HAMILTON'schen »Elementen" entnommen ist, kann das Integral der Gleichung (D. 29) angegeben werden. Es seien nämlich β, γ Vektoren derart, dass

$$\alpha \parallel V\beta\gamma,$$

so geht (D. 29) über in

$$S.V\beta\gamma V\rho d\rho \doteq 0,$$

$$S\beta d\rho S\gamma\rho - S\beta\rho S\gamma d\rho = 0,$$

und die erste Seite dieser Gleichung wird nach einer Division durch $S^2\gamma\rho$ oder $S^2\beta\rho$ integrabel. Somit ist

$$\frac{S\beta\rho}{S\gamma\rho} = \text{constant}$$

das Integral von (D. 29). Statt desselben kann auch geschrieben werden

$$\frac{S.\alpha\beta_0\rho}{S.\alpha\gamma_0\rho} = \text{constant,}$$

wo β_0, γ_0 ganz willkürliche Vektoren bedeuten, welche mit α nicht complanar sind.

Dass in der Tat die Bedingung, dass die Funktion Φ, welche bei der Differentiation des Vektors ν erhalten wird, eine selbstconjugirte sei, damit die Grösse $S\nu d\rho$ ein vollständiges Differential werde, mit der bekannten Bedingung in der gewöhnlichen Analyse identisch ist, kann leicht in nachstehender Weise gezeigt werden.

Setzen wir

$$\rho = ix + jy + kz, \quad \nu = iX + jY + kZ,$$

so ist

$$S\nu d\rho = -(Xdx + Ydy + Zdz),$$

und die Bedingungen für die Integrabilität dieser Grösse sind bekanntlich

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots . \quad \text{(D. 30*)}$$

Nun ist

$$d\nu = \left(i\frac{\partial X}{\partial x} + j\frac{\partial Y}{\partial x} + k\frac{\partial Z}{\partial x}\right)dx + \left(i\frac{\partial X}{\partial y} + j\frac{\partial Y}{\partial y} + k\frac{\partial Z}{\partial y}\right)dy + \\ + \left(i\frac{\partial X}{\partial z} + j\frac{\partial Y}{\partial z} + k\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dz,$$

und wenn dieser Ausdruck mit $\Phi d\rho$ oder $\Phi i dx + \Phi j dy + \Phi k dz$ identisch sein soll, so muss

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial X}{\partial x} + j\frac{\partial Y}{\partial x} + k\frac{\partial Z}{\partial x} &= \Phi i, \\ i\frac{\partial X}{\partial y} + j\frac{\partial Y}{\partial y} + k\frac{\partial Z}{\partial y} &= \Phi j, \\ i\frac{\partial X}{\partial z} + j\frac{\partial Y}{\partial z} + k\frac{\partial Z}{\partial z} &= \Phi k. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 30**)}$$

Weiter ist

$$\rho = -iSi\rho - jSj\rho - kSk\rho,$$
$$\Phi\rho = -\Phi iSi\rho - \Phi jSj\rho - \Phi kSk\rho$$

und die Bedingung der Selbstconjugation der Funktion Φ ist nach Art. 161 der Theorie

$$V(i\Phi i + j\Phi j + k\Phi k) = 0.$$

Führt man hierein die Werte von Φi, Φj, Φk aus (D. 30**) ein, so entsteht das System (D. 30*), womit unsre Behauptung bewiesen ist.

96. Wir wollen noch auf einen andren Weg das **Kriterium für die Integrabilität** der Gleichung (D. 11) herleiten. Derselbe nimmt als Ausgangspunkt die Tatsache, dass die zweimalige Anwendung der Operation

$$\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z}$$

an die Skalarfunktion F des Artikels 91 stets eine Skalarfunktion entstehen lässt, nämlich

$$\alpha_1^2 F_{11} + \alpha_2^2 F_{22} + \alpha_3^2 F_{33} + 2S\alpha_2\alpha_3 F_{23} + \\ + 2S\alpha_3\alpha_1.F_{31} + 2S\alpha_1\alpha_2.F_{12} \quad \text{(D. 31)}$$

Setzen wir nun im Folgenden den Operator

$$\alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z} = \nabla$$

daher

$$\nu = \nabla F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 32)$$

so ist die Form (D. 31) gleich $\nabla^2 F$ und es gilt deshalb

$$V.\nabla\nu = V.\nabla^2 F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 33)$$

Dies gilt alles, wenn die Funktion F der Fläche in der Tat vorhanden ist. Umgekehrt wird, wenn eine Gleichung

$$S\nu d\rho = 0$$

gegeben ist, die Bedingung der Integrabilität sein, dass die Funktion ν oder deren Produkt mit einem Skalar f einer Gleichung von der Form (D. 33) genügt, oder in Zeichen

$$V.\nabla f\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 34)$$

97. In Bezug auf den Operator ∇ muss hier bemerkt werden, dass die Anwendung desselben an einen beliebigen Quaternion

$$q = W + Xi + Yj + Zk,$$

wo W, X, Y, Z beliebige Funktionen von x, y, z sein können, im allgemeinen einen neuen Quaternion ergibt

$$q' = \nabla q = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \\ + j\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right);$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass das Resultat der Operation ∇ an einen willkürlichen Vektor im allgemeinen ein Quaternion sein muss. Setzt man nämlich

$$\tau = iX + jY + kZ,$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$\nabla\tau = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \\ + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Insbesondere ist

$$\nabla\rho = -3, \qquad \nabla U\rho = -\frac{2}{T\rho}, \quad \nabla T\rho = U\rho,$$

$$\nabla\rho^{-1} = -\rho^{-2}, \quad \nabla V\alpha\rho = 2\alpha, \qquad \nabla S\alpha\rho = -\alpha,$$

$$\nabla V\alpha\rho\beta = S\alpha\beta, \quad \nabla V\alpha\beta\rho = 2V\alpha\beta - 3\alpha\beta = -(2\beta\alpha + S\alpha\beta) \text{ u.s.w.}$$

Aus einer Skalargrösse entsteht natürlich stets ein Vektor.

Es ist weiter leicht ersichtlich, dass die Gleichung gilt

$$\nabla(p \pm q) = \nabla p \pm \nabla q,$$

doch sind die Verhältnisse bei Anwendung des Operators an ein Produkt nicht so einfach. Wenn u eine skalare Grösse, q einen Quaternion bedeutet, so ist

$$\nabla . uq = \nabla u . q + u \nabla q \quad \text{(D. 35)}$$

wie leicht gezeigt wird, indem für q die viergliedrige Grundform angenommen wird. Das Resultat der Operation ∇ an das Produkt zweier Vektoren lässt sich jedoch nicht in einer einfachen Gleichung ausdrücken.

98. Verfolgen wir nun unsre Untersuchung des Kriteriums der Integrabilität der Grösse $S\nu d\rho$ weiter, so schliesst man nach (D. 35), dass die Relation (D. 34) in die Form gebracht werden kann

$$V[(\nabla f)\nu + f\nabla\nu] = 0 \text{ oder } fV\nabla\nu - V.\nu\nabla f = 0 \quad \text{(D. 36)}$$

und wenn man mit $S.\nu$ operirt, schliesslich

$$S.\nu\nabla\nu = 0 \quad \text{(D. 37)}$$

Wenn daher ν nicht der Gleichung (D. 31) genügt, so muss die Relation (D. 37) befriedigt werden, damit eine Funktion F gefunden werden könne. Aus (D. 36) kann sodann der Faktor f bestimmt werden.

99. Wenn wir den Operator ∇ anwenden, so wird stets am einfachsten sein für das Vektorensystem α, β, γ des Art. 24 ein rechtwinkliges System i, j, k zu wählen, denn wenn man sodann setzt

$$\rho = xi + yj + zk,$$

so ergibt sich unmittelbar

$$x = -Si\rho, \quad y = -Sj\rho, \quad z = -Sk\rho,$$

sodass die Vektoren α_1, β_1, γ_1 jenes Artikels oder α_1, α_2, α_3 des Art. 91 mit $-i$, $-j$, $-k$ zusammenfallen.

Wir wollen nun das zweite Kriterium auf die Gleichung (D. 29) anwenden. In diesem Falle ist

$$\nu = V\alpha\rho = xV\alpha i + yV\alpha j + zV\alpha k$$

und

$$\begin{aligned}\nabla\nu &= iV\alpha i + jV\alpha j + kV\alpha k\\ &= V(iV\alpha i + jV\alpha j + kV\alpha k)\\ &= 2\alpha,\end{aligned}$$

sodass die Bedingung (D. 33) nicht, dagegen (D. 37) wohl erfüllt ist. Die Gleichung (D. 36) ergibt in diesem Falle

$$2f\alpha - V.\nu\nabla f = 0.$$

Setzt man

$$f = \nu^{-2}, \text{ so ist } \nabla f = -2\alpha\nu^{-3},$$

und wird daher jener Gleichung genügt.

100. Dass in der Tat das Kriterium (D. 37) mit (D. 28) identisch ist, ersieht man leicht in nachfolgender Weise. Es sei gesetzt

$$d\nu = \Phi d\rho = \Phi(idx + jdy + kdz)$$
$$= \Phi idx + \Phi jdy + \Phi kdz,$$

so ist

$$V\nabla\nu = V(i\Phi i + j\Phi j + k\Phi k).$$

Indem nun $\Phi\rho$ in die Form geschrieben wird

$$\Phi\rho = -iSi\rho - jSj\rho - kSk\rho,$$

erfolgt aus (f. 95) unmittelbar die Beziehung

$$V(i\Phi i + j\Phi j + k\Phi k) = 2\delta.$$

Somit ergeben die Bedingungen (D. 33), (D. 37)

$$\delta = 0 \text{ und } S\nu\delta = 0,$$

welche mit den vorhergehenden übereinstimmen.

101. Die Integration einer Gleichung von der Form

$$S\nu d\rho = 0,$$

wo ν eine Funktion von ρ ist, schliesst bekanntlich auch das Problem ein, die Gleichung der Flächen zu finden, welche ein gegebenes Strahlensystem im Raume orthogonal durchschneiden. Denn man kann ν als einen solchen in jedem Punkte ρ des Raumes durch die für ν gültige Funktion bestimmten Strahl betrachten.

102. Im Art. 94 haben wir für einige Familien von Flächen Gleichungen hergeleitet, denen der Vektor ν genügen muss und dabei schon erwähnt, dass auch umgekehrt aus einer derartigen Bedingung für ν auf die allgemeine Gleichung der Familie geschlossen werden kann.

Diese Behauptung zu beweisen, haben wir jetzt zu zeigen, wie die lineare partielle Differentialgleichung allgemein integrirt werden kann. Dieselbe ist von der in (D. 14), (D. 15), (D. 18) angegebenen Form, sodass wir dafür schreiben

$$S\sigma\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 38)$$

Denn, wenn allgemein die Gleichung der Flächenfamilie

$$F(u, v) = \text{const.}$$

ist, wo u, v bestimmte Skalarfunktionen von ρ sind, während mit F ein willkürliches Skalarfunktionszeichen bezeichnet wird, so ergibt eine Differentiation

$$F_u du + F_v dv = 0.$$

Der Index u gibt hierin eine partielle Differentiation nach u zu erkennen. Wenn nun

$$du = S\lambda_1 d\rho, \; dv = S\lambda_2 d\rho$$

ist, so lautet die zuletzt erhaltene Gleichung

$$S(F_u\lambda_1 + F_v\lambda_2)d\rho = 0,$$

sodass man setzen muss

$$\nu = F_u\lambda_1 + F_v\lambda_2,$$

und hieraus folgt

$$S\nu\lambda_1\lambda_2 = 0, \text{ oder } S\nu\sigma = 0,$$

wenn man annimmt $\sigma \| V\lambda_1\lambda_2$.

Die Integration beruht auf den nachfolgenden Sätzen:

1°. Wenn die gewöhnliche Differentialgleichung

$$V\sigma d\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 39)$$

integrirt werden kann, und das Integral von der Form

$$\omega = C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 40)$$

ist, so wird

$$F(\omega) = C' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 41)$$

das allgemeine Integral der Gleichung (D. 38) sein, wo F eine beliebige Skalarfunktion bedeutet.

Denkt man nämlich wieder F als Summe von Gliedern dargestellt, deren jedes als Produkt der Grössen $S\alpha_1\omega$, $S\alpha_2\omega$, $S\alpha_3\omega$ erscheint, und setzt man wieder den partiellen Differentialquotient der Funktion F in Bezug auf das Argument $S\alpha_1\omega$ gleich F_1 u. s. w., so ergibt die Differentiation von (D. 41)

$$S.(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3)\, d\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 42)$$

Nach unsren Voraussetzungen ist aber

$$d\omega = q(V\sigma d\rho)q',$$

wo q, q' beliebige Funktionen von ρ sein können. Es geht daher die Gleichung (D. 42) über in die nachstehende

$$S.q'(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3) q\, V\sigma d\rho = 0$$

oder

$$S.\{V.q'(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3)q\}\sigma d\rho = 0,$$

sodass man schliesst

$$\nu = V.\sigma V q'(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3)q,$$

und hieraus folgt durch Operation mit $S.\sigma$ die Gleichung (D. 38).

2°. Wenn die Integration der Gleichung (D. 39) nicht gelingt, jedoch die Integrale der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$S\tau_1 \sigma d\rho = 0\,, \quad S\tau_2 \sigma d\rho = 0,$$

in denen τ_1, τ_2 beliebige Vektorausdrücke, welche ρ enthalten, sein können, in der Form

$$u_1 = C_1\,, \quad u_2 = C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 44)$$

wo u_1, u_2 Skalarfunktionen von ρ bedeuten, angegeben werden können, so ist

$$F(u_1, u_2) = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 45)$$

das allgemeine Integral der Gleichung (D. 38).

Wenn man nämlich die partiellen Differentialquotienten der Funktion F nach den Argumenten u_1, u_2 gleich F_1, F_2 setzt, so ergibt die Differentiation der Gleichung (D. 45)

$$F_1 du_1 + F_2 du_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D. 46)$$

Nach unsern Voraussetzungen ist aber

$$du_1 = v_1 S\tau_1 \sigma d\rho\,, \quad du_2 = v_2 S\tau_2 \sigma d\rho,$$

wenn v_1, v_2 beliebige veränderliche Skalargrössen sind. Demnach nimmt (D. 46) die Gestalt an

$$S(v_1 F_1 \tau_1 + v_2 F_2 \tau_2)\sigma d\rho = 0,$$

woraus folgt

$$\nu = V\sigma(v_1 F_1 \tau_1 + v_2 F_2 \tau_2),$$

und die Operation mit $S.\sigma$ ergibt wieder die vorgelegte partielle Differentialgleichung.

103. Die partielle Differentialgleichungen, denen wir bisher begegneten, können leicht mit Hülfe dieser Principien integrirt werden.

Bei den Cylinderflächen ist die Hülfsgleichung (D. 39)

$$V\alpha d\rho = 0, \text{ somit } \omega = V\alpha\rho,$$

und das allgemeine Integral lautet

$$F(V\alpha\rho) = C.$$

Bei den Kegelflächen gilt es

$$V\rho d\rho = 0$$

zu integriren. Schreiben wir statt dieser Gleichung

$$\left(V\frac{d\rho}{\rho}\right) U\rho = 0,$$

so ist nach (*e.* 23) das Integral

$$U\rho = C,$$

und die allgemeine Gleichung der Kegelflächen ist demnach

$$F(U\rho) = C'.$$

Bei den Umdrehungsflächen, wo $\sigma = V\alpha\rho$, kann die zweite Methode mit gutem Erfolg angewandt werden. Wenn man nämlich an die Gleichung (D. 39), welche hier lautet

$$V.(V\alpha\rho)d\rho = 0 \text{ oder } \rho S\alpha d\rho - \alpha S\rho d\rho = 0,$$

mit $S.\alpha$ operirt, so erhält man ohne Mühe das Integral

$$V^2\alpha\rho = C_1.$$

Hätte man mit $S.\rho$ operirt, so wäre das Integral

$$S.\alpha U\rho = C_2$$

entstanden. Die Gleichung jener Familie von Flächen ist demnach

$$F(TV\alpha\rho \,.\, S\alpha U\rho) = C.$$

104. Obgleich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hier nicht weiter bei der allgemeinen Theorie der Flächen Anwendung finden wird, wollen wir doch einen kurzen Abriss derselben folgen lassen. Untersuchen wir zu diesem Zwecke zuerst die Form der

partiellen Differentialgleichung, welche ein Integral von der Gestalt

$$u = f(v)$$

hat, wo u und v Skalarfunktionen der Grössen ρ, ν bedeuten und f ein beliebiges Skalarfunktionszeichen ist. Aus der Differentiation folgt zunächst

$$du = f'(v)dv,$$

somit wegen der Willkürlichkeit der Grösse f

$$du = 0\,,\ dv = 0,$$

oder

$$S\lambda_1 d\rho + S\lambda_2 d\nu = 0\,,\ S\mu_1 d\rho + S\mu_2 d\nu = 0 \quad . \; . \; . \quad (\text{D. } 47)$$

λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sind hier gewisse Vektorfunktionen von ρ und ν. Es gelten weiter die Beziehungen

$$S\nu d\rho = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{D. } 48)$$

$$d\nu = \Phi d\rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{D. } 49)$$

Zwischen (D. 47), (D. 48), (D. 49) können nun $d\nu$, $d\rho$ eliminirt werden und das Resultat

$$S.\nu(\lambda_1 + \Phi\lambda_2)(\mu_1 + \Phi\mu_2) = 0,$$

oder

$$S\nu\lambda_1\mu_1 + S\nu(\lambda_1\Phi\mu_2 - \mu_1\Phi\lambda_2) + xS\lambda_2\mu_2\Phi^{-1}\nu = 0 \quad . \; . \quad (\text{D. } 50)$$

ist die gesuchte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung; x ist hierin wieder durch die Gleichung (f. 34) bestimmt.

Dieses Resultat hätten wir auch in nachstehender Weise erhalten können. Aus der Gleichung

$$du = f'(v)dv,$$

oder

$$S\lambda_1 d\rho + S\lambda_2 d\nu - f'(v)[S\mu_1 d\rho + S\mu_2 d\nu] = 0$$

folgt

$$S.[\lambda_1 + \Phi\lambda_2 - f'(v)(\mu_1 + \Phi\mu_2)]d\rho = 0,$$

somit

$$\nu \parallel \lambda_1 + \Phi\lambda_2 - f'(v)(\mu_1 + \Phi\mu_2)$$

d. h. die Vektoren ν, $\lambda_1 + \Phi\lambda_2$, $\mu_1 + \Phi\mu_2$ sind complanar, wodurch man wieder auf (D. 50) geführt wird.

Wir wollen nur einen besonderen Fall näher betrachten, nämlich wo λ_2, μ_2 einander parallel sind. Es gehen sodann die Gleichungen (D. 47) über in

$$S\lambda_1 d\rho = -yS\tau d\nu\,,\quad S\mu_1 d\rho = -zS\tau d\nu \quad \ldots\ldots \text{(D. 51)}$$

wenn

$$\lambda_2 = y\tau\,,\quad \mu_2 = z\tau$$

ist, und die partielle Differentialgleichung erhält die Form

$$S.\nu\sigma\Phi\tau = F(\rho\,,\,\nu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D. 52)}$$

wenn wir setzen

$$z\lambda_1 - y\mu_1 = \sigma\,,\quad S\nu\lambda_1\mu_1 = -F(\rho, \nu) \quad \ldots\ldots \text{(D. 53)}$$

Die Elimination von $d\rho$, $d\nu$ aus (D. 51), (D. 48), (D. 49) kann auch in nachstehender Weise geschehen. Aus (D. 51), (D. 48) folgt mit Rücksicht auf Art. 179 der Theorie

$$d\rho S\nu\lambda_1\mu_1 = V\nu(y\mu_1 - z\lambda_1)S\tau d\nu,$$

oder

$$d\rho F(\rho, \nu) = V\nu\sigma S\tau d\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D. 54)}$$

Operirt man jetzt mit $S.\tau\Phi$, so entsteht die partielle Differentialgleichung (D. 52).

105. Es kann nun weiter leicht angegeben werden, wie sich Integrale dieser Gleichung herleiten lassen. Wir können nämlich zeigen, dass wenn

$$\omega = \text{Const.}$$

ein Vektorintegral der Gleichung (D. 54) oder der daraus hergeleiteten

$$V.\varkappa[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0$$

ist, wo $\varkappa$ eine beliebige Vektorfunktion von ρ, ν bedeutet,

$$H(\omega) = \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(D. 55)}$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung sein wird; hierin ist mit H eine willkürliche Skalarfunktion bezeichnet.

Eine Differentiation der Relation (D. 55) ergibt nämlich

$$S\pi d\omega = 0,$$

wo π nur von ω abhängig ist. Weil aber allgemein nach unsrer Voraussetzung

$$d\omega = q\{V\varkappa[d\rho.F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu]\}q'$$

gesetzt werden kann, so geht jene Gleichung über in

$$S.q'\pi q V\varkappa[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0\,,$$

oder wenn man

$$V.(Vq'\pi q)\varkappa = \varkappa_1$$

setzt,

$$S.\varkappa_1[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (D. 56)$$

$$S.d\rho[\varkappa_1 F(\rho, \nu) - \Phi\tau S.\varkappa_1\nu\sigma] = 0$$

und hieraus schliesst man unmittelbar

$$\nu \parallel \varkappa_1 F(\rho, \nu) - \Phi\tau S\varkappa_1\nu\sigma.$$

Eine Operation mit $S.\nu\sigma$ ergibt nun sofort die Differentialgleichung (D. 52).

In gleicher Weise fällt es nicht schwer zu beweisen, dass, wenn

$$u = C_1, \; v = C_2$$

Skalarintegrale der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} S.\pi_1[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0 \\ S.\pi_2[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (D. 57)$$

sind,

$$f(u, v) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 58)$$

ein Integral der Differentialgleichung sein muss. Denn, bezeichnet man mit f_u, f_v die partiellen Differentialquotienten der Skalarfunktion f in Bezug auf u, v, so ergibt sich aus (D. 58)

$$f_u du + f_v dv = 0,$$

oder nach unsrer Annahme, u, v seien Integrale der Funktionen in (D. 57)

$$S.(f_u\pi_1 + f_v\pi_2)[d\rho F(\rho, \nu) - V\nu\sigma S\tau d\nu] = 0,$$

eine Gleichung, welche durch die Substitution

$$f_u\pi_1 + f_v\pi_2 = \varkappa_1$$

in (D. 56) übergeht, sodass wir den Satz als bewiesen betrachten können.

Sind in dieser Weise drei erste Integrale der partiellen Differentialgleichung gefunden, so kann mittelst derselben ν in ρ ausgedrückt werden und die Integration der Gleichung

$$S\nu d\rho = 0$$

ergibt sodann auch das zweite Integral.

106. Eine besondere Erörterung erfordert der Fall, wo die Gleichung

$$S\nu\lambda_1\mu_1 = F(\rho, \nu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D. 59)$$

stattfindet.

Denn das Gleichungssystem (D. 51), worein nun

$$\mu_1 = y_1\nu + z_1\lambda_1$$

gesetzt werden muss, ergibt sodann

$$S\tau d\nu = 0\,,\ S\lambda_1 d\rho = 0\,,$$

es sei denn, dass

$$z = yz_1$$

wäre, was wir nicht voraussetzen wollen.

Zwischen (D. 60), (D. 48), (D. 49) müssen nun $d\rho$, $d\nu$ eliminirt werden, wodurch sich ergibt

$$S\nu\lambda_1\Phi\tau = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 61)}$$

für die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Jedes Vektorintegral der Gleichung

$$V.d\rho\, V\nu\lambda_1 + \xi S\tau d\nu = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 62)}$$

wo ξ einen beliebigen veränderlichen Vektor bedeutet, oder der daraus hergeleiteten Gleichung

$$V\varkappa(d\rho\, V\nu\lambda_1 + \xi S\tau d\nu) = 0\,,$$

wo man auch $\varkappa$ einen beliebigen Wert beilegen kann, ergibt ein Integral der partiellen Differentialgleichung (D. 61). Denn wenn wir wieder setzen

$$d\omega = q\{V\varkappa(d\rho\, V\nu\lambda_1 + \xi S\tau d\nu)\}q',$$

so ergibt

$$S\pi d\omega = 0$$

die Relation

$$S.\varkappa_1(d\rho\, V\nu\lambda_1 + \xi S\tau d\nu) = 0,$$

wenn

$$\varkappa_1 = V.(Vq'\pi q)\varkappa$$

gesetzt wird. Somit erhält man

$$S.d\rho[V.\varkappa_1 V\nu\lambda_1 - \Phi\tau S\varkappa_1\xi] = 0,$$

oder

$$V.\varkappa_1 V\nu\lambda_1 - \Phi\tau S\varkappa_1\xi \parallel \nu$$

und die Operation mit $S.\nu\lambda_1$ ergibt nun die Differentialgleichung (D. 61).

Wir teilen weiter ohne Beweis mit, dass, wenn u_1, u_2 Integralfunktionen der Grössen

$$S.\pi_1 d\rho\, V\nu\lambda_1 + gS\tau d\nu\,,\ S.\pi_2 d\rho\, V\nu\lambda_1 + hS\tau d\nu \ldots \quad \text{(D. 63)}$$

sind, wo π_1, π_2 beliebige Vektoren, g, h willkürliche Skalare bedeuten,

$$F(u_1, u_2) = \text{constant}$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung (D. 61) sein wird.

Wählen wir als Beispiel die einfache Gleichung

$$S\nu\alpha\Phi\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 64)}$$

so nimmt die erste der Gleichungen (D. 63) die Form an

$$S.\pi_1 d\rho\, V\nu\alpha + gS\beta d\nu = 0\ ,$$

$$- S\pi_1 \nu S\alpha d\rho + gS\beta d\nu = 0,$$

Für $\pi_1 = V\nu\alpha$ erhält man das Integral

$$S\beta\nu = \text{constant},$$

und für $g = 0$

$$S\alpha\rho = \text{constant},$$

somit ist

$$F(S\beta\nu\ , \ S\alpha\rho) = \text{constant}$$

ein Integral der Gleichung (D. 64).

In derselben Weise findet man, dass

$$F(S\beta\nu, \rho^2) = \text{constant}$$

ein Integral der Gleichung

$$S\nu\rho\Phi\beta = 0$$

sein wird.

107. Wie in der gewöhnlichen Analyse besteht im Quaternionenkalkül ein merkwürdiger Satz, welcher in gewissen Fällen die Lösung der allgemeinen Gleichung (D. 50) zu derjenigen einer einfacheren zurückzuführen gestattet. Es sei nämlich

$$f(\rho) = \text{constant}$$

die Lösung jener Gleichung, somit

$$df = S\nu d\rho.$$

Setzt man nun

$$F = S\rho\nu - f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 65)}$$

so ergibt eine Differentiation

$$dF = S\rho d\nu + S\nu d\rho - df,$$

und mit Rücksicht auf (D. 63)

$$dF = S\rho d\nu,$$

woraus erhellt, dass F als eine Funktion von ν allein ausgedrückt werden kann, und wenn man demnach

$$dF = SRd\nu$$

setzt, wo R nur von ν abhängt, so ist

$$\rho = R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 66)}$$

Hieraus folgt sodann

$$d\rho = dR = \psi d\nu,$$

wenn mit ψ eine selbstconjugirte nur von ν abhängige lineare Vektorfunktion bezeichnet wird; umgekehrt ist

$$d\nu = \psi^{-1} d\rho.$$

Es ist jedoch ebenfalls

$$d\nu = \Phi d\rho,$$

wo Φ nur ρ enthält; somit

$$\psi^{-1} = \Phi, \text{ oder } \psi\Phi = \Phi\psi = 1,$$

und

$$\psi = \Phi^{-1}.$$

Man kann demnach in der vorgelegten Differentialgleichung ρ, ν, Φ, Φ^{-1} durch R, ν, ψ^{-1}, ψ ersetzen und hierdurch möglichenfalls das allgemeine Integral

$$F(\nu) = \text{constant}$$

der transformirten Gleichung finden. Wenn sodann noch ν zwischen diesem Integral und (D. 66) eliminirt wird, so ist auch das Integral der ursprünglichen Differentialgleichung gefunden.

107*. Ausnahmsweise wollen wir hier den Zusammenhang mit dem analogen Problem der gewöhnlichen Analyse näher erörtern. Bei den Bezeichnungen des Artikels 26 erhalten wir nämlich

$$\nu = \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(D. 67)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{S\alpha\nu}{S\gamma\nu}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = -\frac{S\beta\nu}{S\gamma\nu} \quad . \text{(D. 68)}$$

Die Differentiation von (D. 67) ergibt weiter, wenn man auf

$$d\rho = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

Rücksicht nimmt

$$\Phi\alpha = \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \gamma_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$$\Phi\beta = \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z},$$

$$\Phi\gamma = \alpha_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \beta_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \gamma_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

somit

$$S\alpha\Phi\alpha = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S\beta\Phi\alpha = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \text{ u.s.w.} \quad \ldots \quad (D.\ 69)$$

Nun ist aber

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + p^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$= -\frac{S.\nu\beta_1\Phi V\nu\beta_1}{S^2\alpha_1\beta_1\gamma_1 S^3\gamma\nu},$$

wenn man den Wert von p aus (D. 68) und die Gleichungen (D. 69), (B. 11) benutzt.

In derselben Weise wird erhalten

$$s = \frac{S.\nu\alpha_1\Phi V\nu\beta_1}{S^2\alpha_1\beta_1\gamma_1 S^3\gamma\nu}, \quad t = -\frac{S.\nu\alpha_1\Phi V\nu\alpha_1}{S^2\alpha_1\beta_1\gamma_1 S^3\gamma\nu}.$$

Die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Rr + 2S_1 s + Tt + V = 0,$$

wo R, S_1, T, V Funktionen von x, y, z, p, q bedeuten, erhält hier die Form

$$R_0 S.\nu\beta_1\Phi V\nu\beta_1 - 2S_0 S.\nu\beta_1\Phi V\nu\alpha_1 + T_0 S.\nu\alpha_1\Phi V\nu\alpha_1 + V_0 = 0,$$

wenn R_0, S_0, T_0, V_0 Funktionen von ρ und ν sind. Statt dieser Gleichung kann aber auch geschrieben werde, indem mit m_1, m_2 die Wurzeln der Gleichung

$$R_0 m^2 - 2S_0 m + T_0 = 0$$

bezeichnet werden

$$S.\nu(\beta_1 - m_1\alpha_1)\Phi V\nu(\beta_1 - m_2\alpha_1) + \frac{V_0}{R_0} = 0,$$

sodass dieselbe in der Form (D. 52) erscheint.

108. Im Art. 27 der Theorie haben wir schon erörtert, dass die Gleichung

$$\rho = f_1(u, v)\alpha + f_2(u, v)\beta + f_3(u, v)\gamma \quad \ldots \quad (D.\ 70)$$

wo f_1, f_2, f_3 beliebige Funktionen der Skalare u, v bedeuten, einer willkürlichen Fläche angehört. Es ist leicht einen Ausdruck für den Vektor ν in diesem Falle zu finden. Bei constantem Werte von v stellt die Gleichung (D. 70) nämlich eine auf jener Fläche enthaltene Curve dar und das Differential $d_u\rho$, welches wir im Art. 27 der Theorie definirt haben, ist ein

Vektor in der Richtung der Tangente an jene Curve. Analoges gilt von der Grösse $d_v\rho$. Demnach wird $V.d_u\rho d_v\rho$ ein Perpendikel zu jenen Tangenten sein, sodass wir schreiben können

$$\nu = x V.d_u\rho d_v\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 71)$$

Wir werden jedoch diese Form des Ausdrucks für die Normale im Folgenden nur selten in Anwendung bringen.

109. Wir wollen nun einige bekannten Probleme, zu deren Lösung man die Kenntnis der Normale bedarf, in Angriff nehmen. Zuerst sei das Problem der Fusspunktsfläche eines Punktes in Bezug auf eine gegebene Fläche genommen. Die Gleichung dieser Fläche sei

$$F\rho = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 72)$$

und der gegebene Punkt sei α. Wenn nun nach (D. 6)

$$S(\omega - \rho)\nu = 0$$

für die Tangentenebene im Punkte ρ der Fläche gesetzt wird, so ist nach (B. 32) der Fusspunkt des Lotes aus α auf jene Ebene gefällt

$$\sigma = \alpha - \nu^{-1}S(\alpha - \rho)\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D. 73)$$

Die Gleichung der Fusspunktfläche wird erhalten, indem ρ zwischen (D. 72) (D. 73) eliminirt wird, doch kann diese Elimination natürlich nicht vollzogen werden, solange F willkürlich bleibt. Es kann aber aus (D. 72) jedenfalls eine einfache Gleichung hergeleitet werden, welche ρ und σ mit einander direkt in Verbindung setzt. Aus derselben folgt nämlich

$$\nu = -(\sigma - \alpha)^{-1} S(\alpha - \rho)\nu,$$

und durch Operation mit $S.(\alpha - \rho)$ wird nun erhalten

$$S(\alpha - \rho)(\sigma - \alpha)^{-1} = -1 \quad \ldots\ldots \quad (D. 74)$$

Wir wollen diese Betrachtungen nur noch weiter verfolgen für den Fall, wo F die allgemeine Gleichung zweiten Grades ist

$$S\rho(\Phi\rho + 2\varepsilon) + a = 0.$$

Es ist sodann

$$\nu = \Phi\rho + \varepsilon$$

zu setzen, und (D. 73) ergibt

$$\sigma - \alpha = -(\Phi\rho + \varepsilon)^{-1} S(\alpha - \rho)(\Phi\rho + \varepsilon),$$

daher einfacher

$$\Phi\rho + \varepsilon = x(\sigma - \alpha)^{-1}$$

wo x eine Skalargrösse ist; somit ist

$$\rho = -\Phi^{-1}\varepsilon + x\Phi^{-1}(\sigma-\alpha)^{-1}.$$

Die Substitution in (D. 74) ergibt nun den Wert von x, nämlich

$$x = \frac{1+S(\sigma-\alpha)^{-1}(\alpha+\Phi^{-1}\varepsilon)}{S(\sigma-\alpha)^{-1}\Phi^{-1}(\sigma-\alpha)^{-1}}.$$

Nun ist der Wert von ρ bekannt und die Substitution in (D. 75) liefert uns sodann die gesuchte Gleichung der Fusspunktsfläche; doch ist das Resultat im allgemeinen zu umständlich, um hier mitgeteilt zu werden. Nehmen wir aber an, ε sei Null und setzen wir

$$\sigma - \alpha = \omega,$$

so erhalten wir zuletzt

$$(1+S\alpha\omega^{-1})^2 + aS\omega^{-1}\Phi^{-1}\omega^{-1} = 0.$$

Für $\alpha = 0$ wird diese Gleichung

$$aS\omega^{-1}\Phi^{-1}\omega^{-1} = -1 \text{ oder } aS\omega\Phi^{-1}\omega = -\omega^4 \quad . \; . \; (\text{D. } 76)$$

Es stelt dies somit die Fusspunktsfläche des Mittelpunktes eines Ellipsoids in Bezug auf dasselbe dar; dieselbe ist die schon früher erhaltene Fläche vierter Ordnung.

110. Wenn auf die Normalen einer Fläche eine constante Länge abgetragen wird, so entsteht eine neue Fläche, deren Gleichung gefragt wird. Ist a die Länge jenes Segmentes, so ist der Vektor eines Punktes der gesuchten Fläche

$$\omega = \rho \pm aU\nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{D. } 77)$$

Zwischen dieser Gleichung und (D. 72) muss nun wieder ρ eliminirt werden, wozu wir im Falle zweiter Ordnung (D. 77) den Weg zeigen wollen.

Zwischen ω und ρ besteht nun stets die einfache Gleichung

$$(\omega-\rho)^2 = -a^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{D. } 78)$$

Weiter ist

$$\omega = \rho + aU(\Phi\rho + \varepsilon),$$

wenn wir nur das obere Zeichen beibehalten; daher

$$\Phi\rho + \varepsilon = y(\omega - \rho),$$

$$\rho = (\Phi + y)^{-1}(y\omega - \varepsilon).$$

Die Substitution dieses Wertes in (D. 78), (D. 75) ergibt zwei Gleichungen, zwischen denen y eliminirt werden muss, um die gesuchte Gleichung zu erhalten. Dies erfordert jedoch sehr umständliche Rechnungen, sodass wir nicht länger dabei verweilen.

Nur wollen wir noch einen allgemeinen Satz in Bezug auf die erhaltene Fläche beweisen, nämlich dass der Vektor ν der ursprünglichen Fläche zugleich Normale der neuen Fläche ist. Denn, wenn (D. 77) differentiirt wird, so entsteht

$$d\omega = d\rho \pm a V \frac{d\nu}{\nu} . U\nu.$$

Indem wir hieran nun mit $S.\nu$ operiren, entsteht

$$S\nu d\omega = 0,$$

wie zu beweisen war.

111. Im vorigen Abschnitte hatten wir schon Gelegenheit die **Reciprokalflächen** einigermassen zu erörtern. Wir wollen hier nun noch einen allgemeinen diesbezüglichen Satz beweisen, nämlich dass die Beziehung zwischen einer Fläche und deren Reciprokalfläche eine gegenseitige ist. Die feste Kugel sei wieder wie im Art. 86

$$\omega^2 = - r^2,$$

und die willkürliche Fläche sei

$$F\rho = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 79)}$$

so ist die Gleichung der Polarebene des Punktes ρ der Fläche

$$S\omega\rho = - r^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 80)}$$

Wählen wir daher ein dem Punkte ρ unendlich naher Punkt der Fläche (D. 79) $\rho + d\rho$, wo $Td\rho$ unendlich klein ist, sodass die Gleichung gilt

$$S\nu d\rho = 0,$$

so ist für die Durchschnittsgerade der beiden Polarebenen

$$S\omega d\rho = 0,$$

und weil dies für jedes $d\rho$ gelten muss, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\omega = x\nu,$$

und nach (D. 80) ist dann weiter

$$\omega = - \nu \frac{r^2}{S\rho\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 81)}$$

Nun muss noch ρ zwischen (D. 81), (D. 71) eliminirt werden um die Gleichung der Reciprokalfläche zu erhalten.

Besonders vereinfacht dies sich jedoch, wenn wir $T\nu$ fortwährend derart bestimmen, dass der Gleichung

$$S\rho\nu = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 82)$$

Genüge geleistet wird. Denn sodann ergibt (D. 81) unmittelbar, dass ν der Vektor des Punktes der Reciprokalfläche ist, welcher dem Punkte ρ der anderen entspricht. Nun folgt aber aus (D. 82) durch Differentiation

$$S\nu d\rho + S\rho d\nu = 0\,, \text{ daher } S\rho d\nu = 0,$$

und hieraus kann wieder geschlossen werden, dass ρ die Richtung der Normale ist zur Fläche, welche durch den Punkt ν beschrieben wird. Um nun den Punkt der ersten Fläche zu finden, welcher auf derselben Weise aus ν hergeleitet wird, als umgekehrt der Punkt ω oder ν aus ρ, hat man nur in (D. 81) ν und ρ zu verwechseln. Dadurch finden wir sodann aber ρ zurück.

Dasselbe Resultat wäre natürlich erhalten, wenn wir die Gleichung (D. 81) ganz allgemein gehalten hätten. Weil nämlich (D. 80) eine Tangentenebene der erzeugten Fläche ist im Punkte ω der Gleichung (D. 61), so folgt daraus dass die Normale zu dieser Fläche parallel zu ρ ist, oder in Zeichen

$$S\rho d\omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 83)$$

Nun ist aber die Polarebene jenes Punktes (D. 81), wenn σ der veränderliche Vektor ist

$$S\sigma\omega = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 84)$$

daher für jeden Schnittpunkt mit den folgenden Polarebenen

$$S\sigma d\omega = 0.$$

Weil aber für jedes $d\omega$ auch die Gleichung (D. 83) stattfindet, so ist

$$\sigma = y\rho$$

zu setzen, und y bestimmt sich aus (D. 84). Mit Rücksicht auf (D. 81) findet man $y = 1$.

112. Einige weiteren Beispiele der Anwendung der Quaternionen mögen der Theorie der Enveloppen entnommen werden.

1°. Durch die Endpunkte von je drei conjugirten Durchmessern eines Ellipsoids

$$S\rho\Phi\rho = b$$

wird eine Ebene gelegt. Es wird die Enveloppe derselben gefragt.

Sind α_1, α_2, α_3 jene Endpunkte, so gelten zunächst die Relationen (C. 62), (C. 63)

$$\left.\begin{array}{l} S\alpha_1\Phi\alpha_2 = S\alpha_2\Phi\alpha_3 = S\alpha_3\Phi\alpha_1 = 0 \\ S\alpha_1\Phi\alpha_1 = S\alpha_2\Phi\alpha_2 = S\alpha_3\Phi\alpha_3 = b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (D. 85)$$

und es soll die Enveloppe der Ebene

$$S\rho(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) = S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\ldots \quad (D. 86)$$

bestimmt werden. Nun ist aber nach (C. 66), (C. 67)

$$S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = b\sqrt{-\frac{b}{x}}, \quad V\alpha_1\alpha_2 = \Phi\alpha_3\sqrt{-\frac{b}{x}},$$

sodass (D. 86) einfach geschrieben werden kann

$$S\rho\Phi(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D. 87)$$

Setzen wir nun weiter

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3\zeta \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 88)$$

so ergibt sich aus (D. 84) leicht das System

$$S\alpha_1\Phi\zeta = S\alpha_2\Phi\zeta = S\alpha_3\Phi\zeta = \tfrac{1}{3}b,$$

und hieraus folgt dan wieder

$$S\zeta\Phi\zeta = \tfrac{1}{3}b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 89)$$

während (D. 87) übergeht in

$$S.\rho\Phi\zeta = \tfrac{1}{3}b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (D. 90)$$

Wir müssen nun die Enveloppe der Ebene (D. 90) bestimmen, wenn ζ die Fläche (D. 89) beschreibt. Diese Enveloppe ist ohne Rechnung zu finden; denn (D. 90) ist die Gleichung der Tangentenebene im Punkte ζ an (D. 89) gelegt, sodass die Fläche zweiter Ordnung (D. 89), welche mit der gegebenen Fläche concentrisch, coaxial und ihr ähnlich ist, die gesuchte Enveloppe ist.

Dasselbe Ergebnis hätten wir aber auch durch eine einfache Rechnung gefunden. Wenn nämlich (D. 89), (D. 90) differentiirt werden, so entsteht

$$S\Phi\zeta d\zeta = 0, \quad S\Phi\rho d\zeta = 0,$$

daher, weil diese Gleichungen für jedes willkürliche $d\zeta$ stattfinden,

$$\Phi\rho = x\Phi\zeta, \quad \rho \doteq x\zeta.$$

Aus (D. 89), (D. 90) ergibt sich sodann

$$x = 1 \text{ und } S\rho\Phi\rho = \tfrac{1}{3}b.$$

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Enveloppe von der veränderlichen Ebene im Punkte ζ, d. h. nach (D. 88) in dem Schwerpunkte des von den Endpunkten der conjugirten Halbmesser gebildeten Dreiecks, berührt wird.

2°. Eine Kugel, deren Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden enthalten ist, berührt eine zweite Gerade. Man fragt die Enveloppe.

Es sei

$$\rho = \alpha + x\beta$$

der Vektor des Kugelcentrums und

$$V\rho\gamma = 0,$$

die Gleichung der Tangente. Der Radius der Kugel ist sodann nach Art. 39

$$TV(\alpha + x\beta)\gamma,$$

wenn γ ein Einheitsvektor ist. Die Gleichung dieser Fläche ist daher

$$(\rho - \alpha - x\beta)^2 = V^2(\alpha + x\beta)\gamma \quad \ldots\ldots \quad (D. 91)$$

und durch Differentiation erhält man hieraus nach Division mit dx

$$-S(\rho - \alpha - x\beta)\beta = xV^2\beta\gamma + S.V\alpha\gamma V\beta\gamma,$$

$$x = -\frac{S\beta(\rho + \gamma S\alpha\gamma)}{S^2\beta\gamma},$$

und durch Substitution in (D. 91) wird für die Enveloppe erhalten

$$(\rho^2 - 2S\rho\alpha)S^2\beta\gamma + S^2\rho\beta + 2S\rho\beta S\alpha\gamma S\beta\gamma = 0.$$

Dieselbe ist somit eine Fläche zweiter Ordnung; sie enthält die Gerade, welche von der veränderlichen Kugel berührt wird, wie ersichtlich wird, wenn man $\rho = y\gamma$ in die Gleichung einführt. Die Ebenen $S\rho\beta = C$ schneiden die Enveloppe in Kreise, die ausserdem auf Kugeln liegen, welche um den Punkt α als Mittelpunkt beschrieben werden. Man schliesst hieraus, dass die Fläche eine Umdrehungsfläche ist, deren Achse die Gerade der Mittelpunkte ist. Weil sie aber ausserdem Geraden enthält, so ist dieselbe ein einschaliges Rotationshyperboloid.

113. Im Vorhergehenden sind wir zwei wesentlich verschiedenen Fällen, in denen eine Enveloppe entsteht, begegnet. Im ersten Falle nämlich erschien die veränderliche Ebene als Funk-

tion eines Vektors, welcher einer skalaren Bedingungsgleichung unterworfen war, somit als Funktion zweier veränderlichen Skalare. Im zweiten Falle dagegen war die veränderliche Kugel nur als Funktion einer einzigen skalaren Grösse zu betrachten. Diese zwei Voraussetzungen können etwas allgemeiner folgendermassen untersucht werden. Es sei

$$F(\rho, \alpha) = C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 92)}$$

die Skalargleichung der veränderlichen Fläche, deren Enveloppe bestimmt werden soll. Es kann nun zuerst α einer einzigen Skalarbedingung

$$f(\alpha) = C_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 93)}$$

unterworfen sein. Durch Differentiation ergibt sich sodann

$$S.\sigma d\alpha = 0, \quad S\beta d\alpha = 0,$$

wo der Vektor σ sowohl ρ als α enthält, β jedoch nur α. Hieraus schliesst man, weil diese Gleichungen für jedes willkürliche $d\alpha$ stattfinden müssen,

$$V\sigma\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 94)}$$

und es erübrigt jetzt nur noch α zwischen den Gleichungen (D. 92), (D. 93), (D. 94) zu eliminiren.

Wenn dagegen der Vektor α zweien Skalarbedingungen

$$f_1(\alpha) = C_1, \; f_2(\alpha) = C_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 95)}$$

genügen muss, so erhält man durch Differentiation der Gleichungen (D. 92), (D. 95)

$$S\sigma d\alpha = 0, \quad S\beta_1 d\alpha = 0, \quad S\beta_2 d\alpha = 0,$$

daher

$$S\sigma\beta_1\beta_2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 96)}$$

und es kann nun α zwischen den vier Gleichungen (D. 92), (D. 95), (D. 96) eliminirt werden, wodurch die Enveloppe gefunden ist.

114. Wenn speciell die veränderliche Fläche eine Ebene ist, so entsteht in dem letzten Falle eine abwickelbare Fläche. Wir können sodann das Problem auch folgendermassen erörtern. Es sei

$$S\rho\alpha = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 97)}$$

die veränderliche Ebene, wo α von einem einzigen Skalar u abhängt

$$\alpha = f_1(u)i + f_2(u)j + f_3(u)k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 98)}$$

Durch Differentiation ergibt sich sodann

$$S\rho(f_1'i + f_2'j + f_3'k) = S\rho\alpha' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 99)$$

wo der Kürze halber f_1' statt $f_1'(u)$ geschrieben ist und α' der Tangentialvektor im Punkte α der Curve (D. 98) ist, wenn in dieser Gleichung α als veränderlicher Vektor betrachtet wird. Wird nun u zwischen (D. 97), (D. 99) eliminirt, so wird die Gleichung der abwickelbaren Fläche erhalten.

Den Gleichungen (D. 97), (D. 99) genügen die Vektoren der Durchschnittsgeraden je zweier auf einander folgenden Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche. Der Durchschnittspunkt dreier derartigen Ebenen genügt somit den Gleichungen

$$S\rho\alpha = 1 \, , \; S\rho\alpha' = 0 \, , \; S\rho\alpha'' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 100)$$

wenn α'' der aus α' durch Differentiation nach u entstandene Vektor ist. Hieraus folgt

$$\rho = \frac{V\alpha'\alpha''}{S\alpha\alpha'\alpha''} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 101)$$

Die Curve, welche dieser Punkt ρ bei Änderung der Grösse u beschreibt, ist bekanntlich die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche. Die Vektorgleichung dieser Curve ist (D. 101), während das aus (D. 100) durch zweimalige Elimination von u erhaltene System die Skalargleichungen jener Rückkehrkante darstellt.

Wenn speciell α als quadratische Funktion von u erscheint, somit

$$\alpha = \alpha_0 + 2\alpha_1 u + \alpha_2 u^2$$

gesetzt werden kann, so erhält man für die Enveloppe

$$S^2\rho\alpha_2 - S\rho\alpha_2(S\rho\alpha_0 - 1) = 0,$$

eine Fläche zweiten Grades, wie man leicht findet, einen Kegel, dessen Scheitel der Punkt

$$\mu = \frac{V\alpha_1\alpha_2}{S\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$$

ist.

115. Nehmen wir noch weitere Beispiele.

1°. Es wird die Enveloppe der Ebene gefragt, welche der Richtung α parallel bleibt und die Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho\Phi\rho = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D. 102)$$

berührt. Wenn

$$S\omega\Phi\rho = b$$

die Gleichung einer Tangentenebene ist, so muss dafür die Beziehung

$$S\varkappa\Phi\rho = 0$$

stattfinden. Die Gleichung (D. 76) wird in diesem Falle

$$S.\Phi\rho\Phi\omega\Phi\varkappa = 0 \text{ oder } S\rho\omega\varkappa = 0,$$

solange die Grösse x für die Funktion Φ nicht verschwindet, und zwischen diesen vier Relationen kann nun ρ leicht eliminirt werden. Aus den letzteren drei wird erhalten

$$\Phi\rho = \frac{b\,V.\varkappa\Phi^{-1}V\omega\varkappa}{S.\omega\varkappa\Phi^{-1}V\omega\varkappa},$$

und sodann erfolgt weiter aus (D. 82)

$$bS\varkappa\Phi\varkappa + S.\omega\varkappa\,V\Phi\omega\Phi\varkappa = 0$$

eine Gleichung, welche sich leicht auf (C. 23), diejenige des umhüllenden Cylinders der Fläche zweiter Ordnung zurückführen lässt.

2°. Eine Kugel berührt zwei gegebene Ebenen und eine dieselben berührende feste Kugel. Man fragt die Enveloppe der ersten Kugel.

Es sei

$$\rho^2 = -a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(D. 103)}$$

die feste Kugel, und

$$S\rho\alpha = -a,\; S\rho\beta = -a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(D. 104)}$$

zwei feste Tangentenebenen derselben, wo α, β Einheitsvektoren bedeuten. Die veränderliche Kugel mag durch

$$(\rho - \sigma)^2 = -r^2$$

dargestellt werden. Die Bedingungen der Berührung mit (D. 103), (D. 104) sind

$$T\sigma = a + r,\; r = a + S\alpha\sigma = a + S\beta\sigma.$$

Somit geht (D. 105) über in

$$(\rho - \sigma)^2 = -(a + S\alpha\sigma)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(D. 106)}$$

mit den Bedingungen

$$S(\alpha - \beta)\sigma = 0,\; \sigma^2 + (2a + S\alpha\sigma)^2 = 0. \;.\;.\; \text{(D. 107)}$$

Die Gleichung (D. 96) erhält jetzt die Form

$$S(\alpha - \beta)(\rho + a\alpha)[\rho - \sigma - \alpha(a + S\alpha\sigma)] = 0 \;.\; \text{(D. 108)}$$

und aus den Gleichungen (D. 106), (D. 107), (D. 108) muss nun σ eliminirt werden, doch wird das Resultat zu verwickelt um hier mitgeteilt zu werden.

Nur in einem Falle lässt sich dasselbe auf einfachere Weise darstellen, nämlich, wenn die beiden festen Ebenen einander parallel sind, sodass $\beta = -\alpha$ gesetzt werden kann. Die Gleichung (D. 108) geht in diesem Falle über in die nachstehende

$$S\alpha\rho\sigma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 109)}$$

während die erste der Gleichungen (D. 107) die Form erhält

$$S\alpha\sigma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 110)}$$

Hiermit lassen sich nun (D. 106) und die zweite der Gleichungen (D. 107) vereinfachen, nämlich

$$(\rho - \sigma^2) = -a^2, \quad \sigma^2 = -4a^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 111)}$$

und die Elimination ist nun ein Leichtes. Aus (D. 109), (D. 110) erfolgt zunächst

$$\sigma = x\,V.\alpha\,V\alpha\rho = -x(\rho + \alpha S\alpha\rho),$$

und die Gleichungen (D. 111) ergeben

$$\rho^2 - 2S\rho\sigma = 3a^2,$$

sodass nun der Wert von x leicht gefunden werden kann, und hiermit wird sodann weiter

$$\sigma = \frac{\rho^2 - 3a^2}{2(\rho^2 + S^2\alpha\rho)}(\rho + \alpha S\alpha\rho).$$

Schliesslich entsteht durch Einführung in (D. 111)

$$(\rho^2 - 3a^2)^2 + 16a^2(\rho^2 + S^2\alpha\rho) = 0,$$

eine Gleichung vierten Grades, welche der ringförmigen Enveloppe angehört.

3⁰. Die negativen Fusspunktsflächen einer Fläche in Bezug auf einen gegebenen Punkt gehören zu den Enveloppen. Ist α der Punkt,

$$F\sigma = 0$$

die Fläche, so ist

$$S(\rho - \sigma)(\sigma - \alpha) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 112)}$$

eine Ebene, welche zum Radiusvektor aus α nach dem Punkte σ der Fläche gezogen in dem Punkte σ senkrecht steht. Die Gleichung (D. 94) lautet jetzt

$$V(\rho + \alpha - 2\sigma)\nu = 0, \quad \rho + \alpha - 2\sigma = x\nu,$$

und durch Substitution von $\rho - \sigma$ in (D. 112) ergibt sich

$$\rho + \alpha - 2\sigma = -\frac{(\sigma - \alpha)^2}{S\nu(\sigma - \alpha)}\nu.$$

Ist die gegebene Fläche

$$S\sigma\Phi\sigma - b = 0,$$

und wird für α der Mittelpunkt dieser Fläche gesetzt, so erhält man

$$\rho = 2\sigma - \frac{\sigma^2}{b}\Phi\sigma,$$

$$\sigma = \left(2 - \frac{\sigma^2}{b}\Phi\right)^{-1}\rho.$$

Man findet nun einerseits durch Potenzirung

$$\sigma^2 = \left[\left(2 - \frac{\sigma^2}{b}\Phi\right)^{-1}\rho\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 114)}$$

und durch Substitution des Wertes von σ in (D. 113)

$$S.\left(2 - \frac{\sigma^2}{b}\Phi\right)^{-1}\rho \left(2\Phi^{-1} - \frac{\sigma^2}{b}\right)^{-1}\rho = 0$$

oder

$$S.\rho\left(4\Phi^{-1} - 4\frac{\sigma^2}{b} + \frac{\sigma^4}{b^2}\Phi\right)^{-1}\rho = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 115)}$$

Zwischen (D. 114), (D. 115) muss nun noch die Grösse σ^2 eliminirt werden.

4°. Zum Schlusse wollen wir noch die Enveloppe der Fläche

$$S\alpha\rho S\beta\rho = a^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 116)}$$

suchen, wenn die Bedingungen stattfinden

$$T\alpha = \text{Constant}, \ \beta = \text{Const.}, \ a^4 = \text{Const.}$$

Die veränderliche Fläche ist ein hyperbolischer Cylinder. Denn, wenn wir dieselbe durch eine Ebene

$$S\alpha\rho = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 117)}$$

schneiden, so ist der Durchschnitt in

$$S\beta\rho = \frac{a^2}{C}$$

enthalten, d. h. das System der parallelen Ebenen (D. 117) schneidet die Fläche in parallelen Geraden, welche die Richtung des Vektors $V\alpha\beta$ haben. Für die Schnittebenen

$$S\alpha\rho = 0, \ S\beta\rho = 0$$

wird jedoch nur $T\rho = \infty$ genügen können. Es sind deshalb diese Ebenen die asymptotischen Ebenen des Cylinders.

Wir können nun auch sagen die Enveloppe eines hyperbolischen Cylinders wird gefragt, wenn die eine asymptotische Ebene derselben constant bleibt, die andere um einen festen Punkt sich dreht.

Durch Differentiation wird erhalten

$$S\beta\rho\, S\rho d\alpha = 0\,,\ S\alpha d\alpha = 0,$$

somit

$$V\alpha\rho = 0 \text{ oder } S\beta\rho = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen ergibt eine besondere Lösung, sodass wir nur die erste verfolgen. Aus dem System

$$T\alpha = b\,,\ S\alpha\rho S\beta\rho = a^4\,,\ V\alpha\rho = 0$$

muss α eliminirt werden. Es ist

$$\alpha = x\rho\,,\ x = \frac{b}{T\rho}\,, \text{ somit } \alpha = bU\rho,$$

und schliesslich wird

$$bT\rho S\beta\rho = -a^4, \text{ oder } \rho^2 S^2\beta\rho = -\frac{a^8}{b^2} \quad \ldots \text{ (D. 118)}$$

die Gleichung der Enveloppe. Dieselbe ist vom vierten Grade, doch kann man leicht eine Vorstellung von der dadurch dargestellten Fläche erhalten. Denn aus der Gleichung folgt

$$T\rho = \sqrt{-\frac{a^4}{bT\beta S.U\beta U\rho}} = \sqrt{\frac{a^4 \sec u}{bT\beta}},$$

wenn u den Winkel zwischen den Richtungen von β und ρ bedeutet. Nehmen wir daher in der Richtung von β ein Segment OB_1, dessen constante Länge

$$\frac{a^2}{\sqrt{bT\beta}}$$

beträgt und errichten wir in dem Endpunkte B_1 eine Ebene senkrecht zu OB_1, so ist die Länge eines Vektors der Enveloppe in der Richtung OP die mittlere Proportionale zwischen OB_1 und dem von jener Ebene auf OP bestimmten Abschnitte. Man sieht hieraus, dass die Enveloppe eine Umdrehungsfläche ist, deren Achse mit β zusammenfällt. In der Tat schneidet jede Ebene senkrecht zu β die Fläche in einem Kreise, wie unmittelbar aus der Gleichung (D. 118) sich ergibt.

Herr Tait behandelt in seinem »Elementary Treatise" auch die Enveloppe der hyperbolischen Cylinder

$$S\alpha\rho S\alpha\beta\rho = a^2,$$

wenn darin

$$T\alpha = 1$$

angenommen wird. Das Resultat erhält sodann die Form

$$\rho^2 NV\beta\rho = -4a^4,$$

welches auf ähnliche Weise gedeutet werden kann; doch ist diese Fläche keine Umdrehungsfläche. Es wird in dieser Weise die Enveloppe eines hyperbolischen Cylinders gefunden, dessen asymptotische Ebenen sich beide um einen festen Punkt drehen, während dieselben zugleich fortwährend senkrecht zu einander bleiben.

116. Bevor wir jetzt zu einem ganz anderen Gebiete der Theorie der Flächen, nämlich zur Theorie der Polarflächen eines Punktes in Bezug auf eine gegebene Fläche, übergehen, wollen wir noch einige kurze Betrachtungen über die Indicatrix vorangehen lassen. Voraus sei daran erinnert, dass im fünften Abschnitt der Theorie eine Form des Taylor'schen Satzes für Quaternionen hergeleitet ist, nämlich

$$f(q + xdq) = f(q) + \frac{x}{1} df(q) + \frac{x^2}{1.2} d^2 f(q) + \cdots\cdots +$$
$$+ \frac{x^m}{1.2...m} d^m f(q) + R \quad \ldots \quad \text{(D. 119)}$$

wenn bei der Differentiation stets d^2q der Null gleich gesetzt wird. Tdq kann hierin jedoch einen beliebigen Wert haben.

Nehmen wir an, dass die Funktion f eine ganze Funktion ist, deren Glieder nur Produkte und Potenzen mit ganzzahligen Exponenten enthalten, so ist leicht ersichtlich, dass R dabei unterdrückt werden kann. So ist z. B. nach obiger Formel für

$$f(q) = q^2$$

$$f(q + xdq) = q^2 + xd.q^2 + \frac{x^2}{1.2} d^2.q^2 + \frac{x^3}{1.2.3} d^3.q^2 + \ldots + R \quad \text{(D. 120)}$$

Nun ist aber nach (e. 5), (e. 41), wenn d^2q verschwindet,

$$d.q^2 = qdq + dq.q$$
$$d^2.q^2 = 2dq^2$$
$$d^3.q^3 = 0.$$

Daher ergibt (D. 120), wenn wir R unterdrücken

$$f(q + xdq) = q^2 + x(qdq + dq.q) + x^2 dq^2$$

und dieses Resultat stimmt ganz mit demjenigen überein, welches durch Berechnung von $(q + xdq)^2$ erhalten wird.

Setzen wir daher im Folgenden voraus, eine gegebene Fläche sei derart, dass die in ihrer Gleichung

$$F(\rho) = C$$

auftretende Funktion den oben erwähnten Bedingungen genügt, so gilt, wenn n der Grad dieser Funktion ist, die Gleichung

$$F(\rho + xd\rho) = F\rho + xdF\rho + \frac{x^2}{1.2} d^2F\rho + \dots + \frac{x^n}{1.2\dots n} d^nF\rho \quad \text{(D. 121)}$$

wenn stets

$$d^2\rho = 0$$

gesetzt wird. Nun ist jedoch nach (D. 2), (D. 3)

$$dF\rho = S\nu d\rho,$$

somit

$$d^2F\rho = Sd\nu d\rho = Sd\rho\Phi(d\rho) \text{ nach (D. 9),}$$

wo Φ eine selbstconjugirte lineare Vektorfunktion ist, und es kann für (D. 121) daher auch geschrieben werden

$$F(\rho + xd\rho) = F\rho + xS\nu d\rho + \frac{x^2}{2} Sd\rho\Phi d\rho + \dots + \frac{x^n}{1.2.n} d^nF\rho \quad \text{(D. 122)}$$

Die beiden Gleichungen (D. 121), (D. 122) können bei der Untersuchung der Flächen vielfache Anwendung finden. Die erstere erweist sich für die Untersuchung der Polarflächen als sehr zweckmässig; in Bezug auf (D. 122) wollen wir noch Folgendes bemerken.

117. Wenn ρ der Gleichung der Fläche genügt und dasselbe von $\rho + xd\rho$ gilt, so ergibt sich

$$xS\nu d\rho + \frac{x^2}{2} Sd\rho\Phi d\rho + \dots + \frac{x^n}{1.2..n} d^nF\rho = 0 \quad . \text{(D. 123)}$$

Wenn daher $d\rho$ derart gewählt wird, dass die Gleichung

$$S\nu d\rho = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, \text{(D. 124)}$$

gültig ist, so hat die Gerade

$$\omega = \rho + xd\rho$$

zwei im Punkte ρ zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemeinsam. Diese Gerade ist daher eine Tangente der Fläche im Punkte ρ. Führt man

$$xd\rho = \omega - \rho$$

in (D. 124) ein, so erhält man daher die Gleichung der Tangentenebene

$$S(\omega - \rho)\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 125)}$$

Wenn aber $d\rho$ ausserdem der Relation

$$Sd\rho\Phi d\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 126)}$$

Genüge leistet, so hat jene Gerade drei im Punkte ρ zusammenfallende Punkte mit der Ebene gemeinsam. Es ergibt sich sodann auch für jene Gerade

$$S(\omega - \rho)\Phi(\omega - \rho) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 127)}$$

sodass die Fläche im Punkte ρ in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten wird nur von denjenigen Geraden, welche den beiden Gleichungen (D. 125), (D. 127) genügen, und daher einer Ebene und einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Scheitel in ρ liegt, gemeinsam sind. Wir erhalten in dieser Weise die beiden Inflexionstangenten der gegebenen Fläche im Punkte ρ.

Wenn gefordert wird, die aus einem willkürlichen Punkte ω an die Fläche gehenden Inflexionstangenten zu bestimmen, so hat man demnach ρ zu lösen aus (D. 125), (D. 127) und der Gleichung der Fläche. Es werden sodann $n(n-1)(n-2)$ Werte von ρ, somit auch eine gleiche Anzahl von Inflexionstangenten gefunden.

Die beiden Inflexionstangenten werden zusammenfallen, wenn die Ebene (D. 125) den Kegel zweiter Ordnung (D. 127) berührt. Dies ergibt die Bedingung

$$S.\nu\Phi^{-1}\nu = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 128)}$$

welcher der Punkt ρ genügen muss. Derselbe ist sodann ein parabolischer Punkt der Fläche. Die Gleichung (D. 128) mit derjenigen der Fläche zusammen bestimmt den Ort der parabolischen Punkte der Fläche. Wenn dieselbe eine solche zweiter Ordnung ist

$$S\rho\psi\rho = b,$$

so ist

$$\nu = 2\psi\rho\,, \quad d\nu = 2\psi d\rho,$$

somit ist die Funktion ψ identisch mit der hier angewandten Funktion Φ; und die Gleichung (D. 128) ergibt für die parabolischen Punkte $S\rho\psi\rho = 0$ d. h. der Durchschnitt der Fläche mit ihrem asymptotischen Kegel.

Bewegt man sich auf der Fläche stetig die eine der beiden durch jeden Punkt gehenden Inflexionstangenten entlang, so ist der Ort eine asymptotische Linie der Fläche, deren Differentialgleichung (D. 126) sein wird.

118. Eine Ebene, welche der Tangentenebene in Punkte ρ unendlich nahe und parallel ist, hat nach Art. 35 die Gleichung

$$S(\omega - \rho)\nu = e \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 129)}$$

wo e eine sehr kleine skalare Grösse ist. Die Distanz der beiden Ebenen ist nämlich $eT\nu^{-1}$.

Wir wollen nun die Durchschnittspunkte der Ebene (D. 129) mit der Fläche ins Auge fassen. Statt ω können wir sodann $\rho + xd\rho$ setzen, wo x eine sehr kleine Grösse ist, während $Td\rho$ beliebig bleibt. Wenn wir nun nur bis unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung berücksichtigen, so genügen jene Durchschnittspunkte den beiden Gleichungen

$$xS\nu d\rho = e,$$
$$x^2 Sd\rho\Phi d\rho + 2e = 0.$$

Nun ist aber $xd\rho = d\sigma$ der unendlich kleine Vektor aus dem Punkte ρ nach einem unendlich nahen Punkte der Fläche gezogen; derselbe genügt daher den Gleichungen

$$S\nu d\sigma = e, \; Sd\sigma\Phi d\sigma = -2e \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 130)}$$

Die gesuchten Durchschnittspunkte liegen deshalb in dem Kegelschnitte, welcher durch die Gleichungen (D. 110) dargestellt wird. Die zweite dieser Gleichungen gehört einer unendlich kleinen Fläche zweiter Ordnung an, deren Mittelpunkt der betreffende Punkt der Fläche ist. Wir haben somit die Indicatrix der Fläche erhalten.

Die Halbmesser der Fläche zweiter Ordnung sind nach Art. 65 proportional zu $\sqrt{e}$ und die Distanz der Ebene zum Punkte ρ ist proportional zu e. Die Dimensionen der Fläche zweiter Ordnung sind daher sehr gross im Verhältnis zu dieser Distanz und es wird deshalb erlaubt sein die Indicatrix als Durchschnitt der beiden Gebilde

$$S\nu d\sigma = 0, \; Sd\sigma\Phi d\sigma = -2e \quad \ldots\ldots \quad \text{(D. 131)}$$

zu betrachten, wie stets geschieht.

Die Achsen dieses Kegelschnittes können nach Art. 74 leicht bestimmt werden. Es werden sodann die Richtungen der Krümmungslinien der Fläche im Punkte ρ erhalten, doch würde eine nähere Untersuchnng derselben für diesmal uns zu weit führen. Nur wollen wir noch zeigen, dass die Krümmungslinien im Punkte ρ die Winkel zwischen den Inflexionstangenten daselbst halbiren. Wenn ρ_1, ρ_2 zwei Einheitsvektoren in den Richtungen dieser Tangenten sind, so haben wir somit nur zu beweisen, dass die Richtungen der Vektoren $\rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2$, welche senkrecht zu einander sind, in Bezug auf die Indicatrix zu einander conjugirt sind. Nun gelten für ρ_1, ρ_2 die Gleichungen

$$S\nu\rho_1 = 0, \; S\rho_1\Phi\rho_1 = 0; \; S\nu\rho_2 = 0, \; S\rho_2\Phi\rho_2 = 0.$$

Setzt man

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\sigma, \; \rho_1 - \rho_2 = 2\tau, \text{ daher } \rho_1 = \sigma + \tau, \; \rho_2 = \sigma - \tau,$$

so findet man leicht

$$S\sigma\Phi\tau = 0,$$

wodurch die Conjugation der Richtungen σ, τ ausgesprochen ist. Daher ist der obige Satz bewiesen.

Nehmen wir auf der Fläche einen beliebigen dem Punkte ρ unendlich nahen Punkt an, dessen Vektor wie oben $\rho + x d\rho$ beträgt. Die Normale in diesem Punkte kann mit $\nu + d\nu$ bezeichnet werden, oder nach dem Vorhergehenden mit

$$\nu + x\Phi d\rho.$$

Die Durchschnittsgerade der Tangentenebenen in den beiden unendlich nahen Punkten wird daher die Richtung haben

$$\sigma = V.\nu\Phi d\rho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 132)}$$

und es kann nun leicht gezeigt werden, dass die beiden Richtungen σ, $d\rho$ zu einander conjugirt sind in Bezug auf die Indicatrix im Punkte ρ. Diese zwei Halbmesser der Indicatrix d. h. auch der Fläche zweiter Ordnung (D. 132) sind nämlich zu einander conjugirt, wenn

$$S\sigma\Phi d\rho = 0$$

und dies ergibt sich unmittelbar aus (D. 132).

119. Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Polarflächen verschiedener Ordnung einer Fläche

$$F\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 133)}$$

über, welche den im Art. 112 angegebenen Bedingungen genügt.

Es sei σ ein willkürlicher Punkt P, $\sigma + xd\sigma$ eine dadurch gelegte Gerade. Bestimmen wir nun mittelst des TAYLOR'schen Satzes die Schnittpunkte derselben mit der Fläche (D. 133), so erhalten wir hierfür die Gleichung

$$F\sigma + xdF\sigma + \frac{x^2}{2} d^2F\sigma + \ldots. + \frac{x^n}{2.3\ldots n} d^nF\sigma = 0 \,.\,. \quad \text{(D. 134)}$$

Bezeichnen wir die Schnittpunkte, welche den n hieraus sich ergebenden Werten von x entsprechen, mit Q_1, $Q_2 \ldots. Q_n$, so ist bekanntlich ein Punkt Q der Polarebene des Punktes σ in Bezug auf die Fläche bestimmt durch die Relation

$$\frac{1}{PQ_1} + \frac{1}{PQ} + \ldots. + \frac{1}{PQ_n} = \frac{n}{PQ}$$

somit, wenn man $PQ = yd\sigma$ setzt,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots. + \frac{1}{x_n} = \frac{n}{y} = -\frac{dF\sigma}{F\sigma} \text{ nach (D. 114).}$$

Ist ω der Vektor von Q, so ist deshalb

$$\omega = \sigma - n\frac{F\sigma}{dF\sigma} d\sigma,$$

und die Gleichung der Polarebene wird nun durch Elimination von $d\sigma$ erhalten, was auf einfache Weise stattfindet durch Operation mit $S.\nu$. Man erhält sodann

$$S(\omega - \sigma)\nu - nF\sigma = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(D. 135)}$$

Soll Q ein Punkt der quadratischen Polarfläche sein, so gilt bekanntlich die Gleichung

$$\sum \frac{1}{PQ_i.PQ_k} - \frac{n-1}{PQ}\sum\frac{1}{PQ_i} + \frac{n(n-1)}{2PQ^2} = 0.$$

Mit Rücksicht auf (D. 135) wird hieraus erhalten bei derselben Bezeichnung für den Vektor des Punktes Q

$$\frac{d^2F\sigma}{2F\sigma} + \frac{n-1}{y}\frac{dF\sigma}{F\sigma} + \frac{n(n-1)}{2y^2} = 0,$$

oder mit der vorher schon angewandten Schreibweise

$$\tfrac{1}{2} y^2 Sd\sigma\Phi d\sigma + \binom{n-1}{1} yS\nu d\sigma + \binom{n}{2} F\sigma = 0.$$

Nun gilt jedoch die Beziehung

$$yd\sigma = \omega - \sigma,$$

wodurch unmittelbar die Elimination von $yd\sigma$ vollzogen werden kann. Die Gleichung der quadratischen Polarfläche ist daher

$$\tfrac{1}{2}S.(\omega-\sigma)\Phi(\omega-\sigma)+\binom{n-1}{1}S\nu(\omega-\sigma)+\binom{n}{2}F\sigma=0. \quad \text{(D. 136)}$$

126. Nun kann aber dieser Gleichung eine symbolische Gestalt erteilt werden, welche für die Polarflächen höherer Ordnung wesentlichen Vorteil bietet. Wenn man nämlich durch den Operator d_0 eine Differentiation und nachherige Ersetzung der erhaltenen Grösse $d\sigma$ durch $\omega-\sigma$ ausdrückt, in gleicher Weise durch d_0^2 zweimalige Differentiation bei constantem $d\sigma$ und nachherige Ersetzung der Grösse $d\sigma$ durch $(\omega-\sigma)$ u.s.w., so kann (D. 136) auch in die Form gebracht werden

$$\tfrac{1}{2}d_0^2F\sigma+\binom{n-1}{1}d_0F\sigma+\binom{n}{2}F\sigma=0,$$

oder schliesslich

$$\left[\tfrac{1}{2}d_0^2+\binom{n-1}{1}d_0+\binom{n}{2}\right]F\sigma=0. \;\ldots\; \text{(D. 137)}$$

In gleicher Weise findet man nun für die Bestimmung eines Punktes

$$\omega=\sigma+yd\sigma$$

der Polarfläche der nächstfolgenden Ordnung die Gleichung

$$\binom{n}{3}F\sigma+\binom{n-1}{2}ydF\sigma+\frac{1}{2}\binom{n-2}{1}y^2d^2F\sigma+\frac{1}{2.3}y^3d^3F\sigma=0,$$

worin wieder $yd\sigma$ unmittelbar durch $\omega-\sigma$ ersetzt werden kann, sodass die symbolische Gleichung jener Polarfläche erhalten wird

$$\left[\binom{n}{3}+\binom{n-1}{2}d_0+\frac{1}{2}\binom{n-2}{1}d_0^2+\tfrac{1}{6}d_0^3\right]F(\sigma)=0 \;.\; \text{(D. 138)}$$

und man erkennt nun leicht — wenn in der gewöhnlichen Weise die Ordnungszahl der Polarflächen bestimmt wird, sodass man die Polarebene als die $(n-1)^{\text{te}}$ Polare, die quadratische Polarfläche als die $(n-2)^{\text{te}}$ u.s.w. betrachtet — dass im allgemeinen die symbolische Gleichung der k^{ten} Polare der Fläche sein wird

$$\left[\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}d_0+\frac{1}{2}\binom{n-2}{k}d_0^2+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots(n-k-1)}\binom{k+1}{k}d_0^{n-k-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2.3..(n-k)}d_0^{n-k}\right]F(\sigma)=0 \;\ldots\; \text{(D. 139)}$$

Der Operator d_0 genügt einer identischen Gleichung. Setzen wir nämlich in (D. 122) statt ρ, x, $d\rho$ die Werte σ, 1, $\omega - \sigma$ ein, so erhält man

$$F(\omega) = F\sigma + d_0 F\sigma + \tfrac{1}{2} d_0^2 F\sigma + \ldots + \frac{1}{2 \ldots n} d_0^n F\sigma. \quad \text{(D. 140)}$$

121. Führen wir nun einen neuen Operator D_0 ein, welche an eine Funktion von ω operirend zuerst Differentiation nach ω und nachher Ersetzung der Grösse $d\omega$ durch $\sigma - \omega$ bewirkt, so wollen wir das Resultat dieser Operation an die vorhergehende Gleichung betrachten.

Nehmen wir zu diesem Zwecke irgend eine Grösse $d_0^l F\sigma$ heraus. Es ist dieselbe das Resultat der l-maligen Differentiation von $F\sigma$ (wobei $d\sigma$ als eine Constante betrachtet wird) und der schliesslichen Ersetzung der Faktoren $d\sigma$ durch $\omega - \sigma$. Der Vektor ω kommt daher nur in diesem Ausdruck vor in demselben Masse, worin das Resultat der Differentiation $d\sigma$ enthielt. Eine Differentiation jener Grösse nach ω wird deshalb auf das nämliche Resultat führen, wie wenn man $d^l F\sigma$ in Bezug auf $d\sigma$ differentiirte und nachher $d\sigma$ durch $\omega - \sigma$, $d^2\sigma$ durch $d\omega$ ersetzte. Wird sodann wieder $d\omega$ durch $-(\omega - \sigma)$ ersetzt, so ist einleuchtend, dass man schliesslich durch die Operation D_0 wieder auf die Form $d_0^l F\sigma$, nur mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, zurück geführt wird. Weil aber $d^l F\sigma$ in Bezug auf $d\sigma$ homogen vom Grade l ist (Art. 13 der Theorie), so wird man schliessen müssen

$$D_0 . d_0^l F\sigma = - l d_0^l F\sigma. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 141)}$$

Wenn dieses Resultat nun bei der Anwendung des Operators D_0 an die Gleichung (D. 140) beachtet wird, so ergibt sich

$$D_0 F(\omega) = -[d_0 + d_0^2 + \tfrac{1}{2} d_0^3 + \ldots + \frac{1}{2 \ldots (n-1)} d_0^n] F\sigma \quad \text{(D. 142)}$$

Diese Gleichung, mit (D. 140) zusammengenommen, setzt uns nun in den Stand die Gleichung der ersten Polare einer Fläche in eine sehr einfache Gestalt zu bringen. Es ist dieselbe nämlich nach (D. 139)

$$0 = \binom{n}{1} + \binom{n-1}{1} d_0 + \frac{1}{2}\binom{n-2}{1} d_0^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2.3..(n-2)} \binom{2}{1} d_0^{n-2} + \frac{1}{2.3..(n-1)} d_0^{n-1} \Big] F(\sigma)$$

$$= n\left[1 + d_0 + \tfrac{1}{2} d_0^2 + \frac{1}{2.3} d_0^3 + \ldots . + \frac{1}{2.3..n} d_0^n\right] F\sigma$$
$$- \left[d_0 + d_0^2 + \tfrac{1}{2} d_0^3 + \ldots . + \frac{1}{2.3..(n-1)} d_0^n\right] F\sigma$$
$$= nF(\omega) + D_0 F(\omega).$$

Diese Gleichung der ersten Polare

$$nF(\omega) + D_0 F(\omega) = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (D. 143)$$

stimmt nun aber ganz mit der Gleichung der Polarebene des Punktes σ überein, nur sind σ und ω mit einander vertauscht.

Nehmen wir einen Schnittpunkt der Fläche

$$F(\omega) = 0$$

mit der ersten Polare (D. 143), so genügt dessen Vektor der Gleichung

$$D_0 F(\omega) = 0 = S\nu_\omega(\sigma - \omega),$$

wenn mit ν_ω die Normale im Punkte ω bezeichnet wird. Der Punkt σ ist deshalb in der Tangentenebene enthalten, welche im Punkte ω an die Fläche geht. Es ist daher der Satz bewiesen: Die Berührungspunkte der Tangenten aus einem Punkte an eine Fläche gelegt, sind in der ersten Polare jenes Punktes in Bezug auf die Fläche enthalten.

122. Im allgemeinen kann man nun mit Hülfe des obigen Operators D_0 beweisen, dass die l^{te} Polare eines Punktes in Bezug auf die k^{te} Polare desselben Punktes, die $(k+l)^{te}$ Polare in Bezug auf die gegebene Fläche ist. Natürlich wird es zur Feststellung dieses bekannten Satzes genügen, wenn nur dargetan wird, dass die erste Polare in Bezug auf die k^{te} Polare die $(k+1)^{te}$ Polare des Punktes in Bezug auf die ursprüngliche Fläche ist.

Wenn nun $F_1(\omega) = 0$ die Gleichung (D. 139) der k^{ten} Polare ist, so wird die erste Polare durch

$$(n - k)F_1(\omega) + D_0 F_1(\omega) = 0$$

dargestellt. Mit Hülfe der Gleichung (D. 141) lässt die Rechnung sich nun ganz leicht ausführen; bei Beachtung der bekannten Identität

$$\binom{k+1}{m} = \frac{m-k}{k+1}\binom{m}{k}$$

ergibt sich sodann unmittelbar die Gleichung der $(k+1)^{ten}$ Polare.

123. Die Gleichung der HESSE'schen Fläche kann mit Hülfe der auseinandergesetzten Principien ohne Mühe erhalten werden und sie zeigt sodann eine sehr einfache Form. Es ist bekanntlich die einer gegebenen Fläche zugehörige HESSE'sche Fläche der Ort der Punkte, deren quadratische Polarflächen in Kegel übergegangen sind. Wenn σ ein Punkt der HESSE'schen Fläche ist, so muss daher die Gleichung (D. 136) einen Kegel darstellen. Schreibt man dieselbe in die Gestalt

$$S\omega[\Phi\omega - 2\Phi\sigma + 2(n-1)\nu] + S\sigma\Phi\sigma - 2(n-1)S\nu\sigma + n(n-1)F\sigma = 0,$$

und vergleicht man sie mit der allgemeinen Gleichung (C. 3) der Fläche zweiter Ordnung, so ergibt sich

$$\varepsilon = -\Phi\sigma + (n-1)\nu,$$
$$a = S\sigma\Phi\sigma - 2(n-1)S\nu\sigma + n(n-1)\,F(\sigma),$$

und die Bedingung (C. 37), dass die Fläche zweiter Ordnung ein Kegel ist, ergibt nach einiger Rechnung

$$(n-1)S\nu\Phi^{-1}\nu - nF\sigma = 0 \; \ldots\ldots \; (\text{D. } 144)$$

als Bedingungsgleichung für σ, d. h. als Gleichung der HESSE'schen Fläche. Die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Fläche genügen der Gleichung

$$S\nu\Phi^{-1}\nu = 0,$$

welche daher nach Art. 113 die parabolischen Punkte der Fläche bestimmt.

Der Ort der Scheitel jener Kegel zweiter Ordnung, welche quadratische Polarflächen der Punkte der HESSE'schen Fläche sind, ist die STEINER'sche Kernfläche der gegebenen Fläche. Auch der Weg zur Auffindung der Gleichung dieses Ortes kann leicht angegegeben werden. Denn der Scheitel des Kegels zweiter Ordnung ist nach Art. 61 bei Anwendung der allgemeinen Gleichung (C. 3) bestimmt durch

$$\mu = -\Phi^{-1}\varepsilon,$$

somit erhalten wir in dem jetzigen Falle

$$\mu = \sigma - (n-1)\Phi^{-1}\nu \; \ldots\ldots\ldots \; (\text{D. } 145)$$

und die gesuchte Gleichung wird nun erhalten, indem σ zwischen (D. 144), (D. 145) eliminirt und μ als veränderlicher Vektor der STEINER'schen Fläche betrachtet wird.

Bei der Fläche zweiter Ordnung

$$F\rho = S\rho(\psi\rho + 2\epsilon) + a = 0$$

ist

$$dF = S\nu d\rho = S2(\psi\rho + \epsilon)d\rho,$$

daher

$$n = 2(\psi\rho + \epsilon),\ d\nu = 2\psi d\rho = \phi d\rho,$$

d. h.

$$\phi = 2\psi,\ \phi^{-1} = \tfrac{1}{2}\psi^{-1},$$

somit wird die Gleichung der Hesse'schen Fläche von der Ordnung Null.

Wählen wir einen der Durchschnittspunkte der gegebenen Fläche mit der Hesse'schen und bezeichnen dessen Vektor mit σ. Wenn nun die Fläche und der gewählte Punkt derart sind, dass durch σ eine Gerade $\sigma + xd\sigma$ geht, welche ganz in der gegebenen Fläche enthalten ist, so wird diese Gerade auch die Hesse'sche Fläche in dem Punkte berühren, oder auch die Schnittcurve der beiden Flächen. Die Bedingungen nämlich, unter denen die Gerade ganz in der gegebenen Fläche enthalten ist, sind

$$F\sigma = 0,\ dF\sigma = 0,\ d^2F\sigma = 0,\ \text{u.s.w.}$$

oder

$$F\sigma = 0,\ S\nu d\sigma = 0,\ Sd\sigma\phi d\sigma = 0,\ \text{u.s.w.} \ldots \quad \text{(D. 146)}$$

Nun gilt aber für den Durchschnitt der beiden Flächen die Gleichung

$$S\nu\phi^{-1}\nu = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(D. 147)}$$

Ersetzen wir hierin, um die Schnittpunkte mit der Geraden zu bestimmen, σ durch $\sigma + xd\sigma$, so geht ν über in

$$\nu + xd\nu + \frac{x^2}{2}d^2\nu + \ldots = \nu + x\phi d\sigma + \frac{x^2}{2}d.\phi d\sigma + \ldots$$

und wir erhalten daher zur Bestimmung von x die Gleichung

$$S(\nu + x\phi d\sigma + \frac{x^2}{2}d.\phi d\sigma + \ldots)(\phi^{-1}\nu + xd\sigma + \frac{x^2}{2}\phi^{-1}d.\phi d\sigma + \ldots)$$
$$= S\nu\phi^{-1}\nu + 2xS\nu d\sigma + x^2[Sd\sigma\phi d\sigma + S.(\phi^{-1}\nu)d\phi d\sigma] + \ldots = 0.$$

Wegen der Gleichungen (D. 146), (D. 147) verschwinden aber die beiden ersten Glieder dieser Summe; man erhält demnach für x stets zwei Werte Null und hiermit ist der Satz bewiesen.

Es fällt nicht schwer darzutun, dass die Berührung der Geraden mit der Schnittcurve eine mehrfache sein muss. Wenn wir nämlich die Grösse $S.(\Phi^{-1}\nu)d\Phi d\sigma$ näher betrachten, so erhalten wir

$$S.(\Phi^{-1}\nu)d\Phi d\sigma = S.\nu\Phi^{-1}(d\Phi d\sigma) = S.\nu d\Phi^{-1}(\Phi d\sigma)$$
$$= S.\nu dd\sigma = 0,$$

und zufolge der Gleichungen (D. 146) verschwindet nun auch der Coefficient von x^2. Wir wollen jedoch nicht weiter hierauf eingehen, weil uns dies zu weit führen würde.

124. Betrachten wir die Polarebenen eines festen Punktes σ in Bezug auf die Flächen eines Büschels n^{ter} Ordnung

$$F\rho + xf(\rho) = 0,$$

so ergibt sich für dieselben die Gleichung

$$n(F\sigma + xf\sigma) + S\nu(\omega - \sigma) + xS\nu_1(\omega - \sigma) = 0,$$

wenn gesetzt wird

$$dF = S\nu d\rho, \quad df = S\nu_1 d\rho.$$

Jene Polarebenen enthalten daher sämtlich die Schnittgerade der Ebenen

$$nF\sigma + S\nu(\omega - \sigma) = 0, \quad nf\sigma + S\nu_1(\omega - \sigma) = 0.$$

In gleicher Weise ergibt sich, dass die Polarebenen eines Punktes σ in Bezug auf das Bündel

$$F\rho + xF_1\rho + yF_2\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 148)}$$

sämtlich den Durchschnittspunkt der Polarebenen jenes Punktes in Bezug auf die drei Grundflächen des Bündels enthalten.

Wir wollen schliesslich noch den Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf das Bündel (D. 148) bestimmen. Setzen wir zu diesem Zwecke

$$dF = S\nu d\rho, \quad dF_1 = S.\nu_1 d\rho, \quad dF_2 = S.\nu_2 d\rho$$

und für die Ebene

$$S\rho\alpha = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(D. 149)}$$

Wenn σ der Pol derselben in Bezug auf eine willkürliche Fläche des Bündels ist, so muss die Gleichung (D. 149) identisch sein mit der nachstehenden

$$n(F\sigma + xF_1\sigma + yF_2\sigma) + S.(\nu + x\nu_1 + y\nu_2)(\rho - \sigma) = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\nu + x\nu_1 + y\nu_2}{\alpha} = -n(F\sigma + xF_1\sigma + yF_2\sigma) + S\sigma(\nu + x\nu_1 + y\nu_2).$$

Nun ist aber

$$\alpha S\nu\nu_1\nu_2 = \nu S\nu_1\nu_2\alpha + \nu_1 S\nu_2\nu\alpha + \nu_2 S.\nu\nu_1\alpha$$

und in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung schliesst man daher

$$\frac{1}{S\nu_1\nu_2\alpha}=\frac{x}{S\nu_2\nu\alpha}=\frac{y}{S.\nu\nu_1\alpha}=\frac{-n(F\sigma+xF_1\sigma+yF_2\sigma)+S\sigma(\nu+x\nu_1+y\nu_2)}{S.\nu\nu_1\nu_2},$$

sodass der Ort des Punktes σ gefunden wird, indem die Skalare x, y zwischen diesen Gleichungen eliminirt werden. Man erhält

$$S\nu\nu_1\nu_2+(nF\sigma-S\sigma\nu)S.\nu_1\nu_2\alpha+(nF_1\sigma-S\sigma\nu_1)S.\nu_2\nu\alpha+$$
$$+(nF_2\sigma-S\sigma\nu_2)S.\nu\nu_1\alpha=0,$$

eine Fläche von der Ordnung $3(n-1)$, weil die Grössen

$$\nu,\ \nu_1,\ \nu_2,\ nF\sigma-S\sigma\nu,\ \text{u.s.w.}$$

von der Ordnung $n-1$ sind.

ALLGEMEINE THEORIE DER CURVEN.
KRÜMMUNG.

125. Im ersten Abschnitte der Theorie haben wir schon erörtert, dass die Gleichung

$$\rho = f_1(u)\alpha + f_2(u)\beta + f_3(u)\gamma,$$

wo f_1, f_2, f_3 willkürliche Funktionen des Skalars u bedeuten, einer Curve angehört. Gewöhnlich schreibt man statt jener Gleichung einfach

$$\rho = f(u) \quad \text{(E. 1)}$$

Indessen muss bemerkt werden, dass nach dem Vorhergehenden eine Curve auch durch das System der Skalargleichungen

$$F_1\rho = C_1,\ F_2\rho = C_2 \quad \text{(E. 2)}$$

bestimmt werden kann, deren jede einer Fläche angehört.

Im ersten Falle ist, wie im Art. 25 der Theorie dargetan ist,

$$d\rho = f'(u)du \quad \text{(E. 3)}$$

ein Vektor in der Richtung der Tangente der Curve; du kann hierbei eine beliebige Grösse haben.

Wenn insbesondere für die Variable u die Länge s des Bogens der Curve gewählt wird, von einem beliebigen Punkte derselben aus gemessen, so ist im Art. 26 der Theorie gezeigt, dass die Gleichung stattfindet

$$Td\rho = ds \quad \text{(E. 4)}$$

Setzen wir daher in diesem Falle

$$f'(s) = \rho' \quad \text{(E. 5)}$$

so ist

$$T\rho' = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 6)$$

oder ρ' ist ein Einheitsvektor in der Richtung der Tangente.

Wird die Curve durch die Gleichungen (E. 2) dargestellt, so kann auch leicht ein Ausdruck für die Tangente gegeben werden. Dieselbe wird nämlich die Durchschnittsgerade der beiden Tangentenebenen, an die Flächen (E. 2) im betreffenden Punkte der Curve gelegt, sein. Bezeichnet man daher mit ν_1, ν_2 die Normalen jener Flächen, so gilt die Beziehung

$$d\rho = x V.\nu_1\nu_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 7)$$

126. Wir wollen nun zunächst unsre Betrachtungen mit der Gleichung (E. 1) der Curve verfolgen. Wenn ρ der Vector des dem Werte u entsprechenden Punktes P ist, so wollen wir für einen anderen Punkt schreiben nach dem TAYLOR'schen Satze

$$\rho + D\rho = f(u + xdu) = f(u) + xdf(u) + \frac{x^2}{2}d^2f(u) + \ldots + \frac{x^n}{2.3..n}d^nf(u) + R.$$

Diese Gleichung werden wir jedoch nur anwenden, wenn x unendlich klein ist. In diesem Falle kann die Reihe bei einem beliebigen Gliede abgebrochen und R vernachlässigt werden. Nun ist aber

$$df(u) = f'(u)du = d\rho,$$

daher können wir für die obige Gleichung schreiben

$$D\rho = xd\rho + \frac{x^2}{2}d^2\rho + \ldots\ldots\ldots \quad (E. 8)$$

Brechen wir diese Reihe bei dem ersten Gliede ab, so sagt diese Gleichung aus, dass der dem Punkte P am nächsten liegende Punkt Q in der Richtung $d\rho$ liegt. Will man aber zu einem weiteren Punkte R gelangen, so ist ausserdem eine Bewegung in der Richtung $d^2\rho$ vorgeschrieben. Die Ebene von drei aufeinander folgenden Punkten der Curve muss daher den Vektoren $d\rho$, $d^2\rho$ parallel sein. Demnach ist

$$\nu_b = V.d\rho d^2\rho \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 9)$$

die Richtung der Binormale der Curve und

$$S.(\omega - \rho)d\rho d^2\rho = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 10)$$

die Gleichung der Oskulationsebene derselben im Punkte ρ.

Nun kann auch unmittelbar die Richtung der Hauptnormale angegeben werden, nämlich

$$\nu_k = d\rho V.d\rho d^2\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 11)$$

Diesem Ausdruck kann noch eine einfachere Gestalt erteilt werden, wenn man die Gleichung (D. 13) berücksichtigt. Mit Unterdrückung eines Skalarcoefficienten können wir nämlich schreiben

$$\nu_k = dUd\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 12)$$

Es mögen noch hinzugefügt werden die Gleichung der Normalebene

$$S(\omega - \rho)d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 13)$$

und diejenige der rektificirenden Ebene

$$S.(\omega - \rho)d\rho V(d\rho d^2\rho) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (E. 14)$$

Wir wollen nun weiter untersuchen, wie diese Gleichungen sich gestalten, wenn die Grösse s als unabhängige Variable eingeführt wird. Aus (E. 6) ergibt sich sodann durch Differentiation

$$S\rho' d\rho' = 0,$$

oder wenn wieder

$$d\rho' = \rho'' ds$$

geschrieben wird

$$S\rho'\rho'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 15)$$

Die Gleichungen (E. 9), (E. 11) ergeben nun

$$\nu_b = \rho'\rho'', \quad \nu_k = -\rho'',$$

wenn die Faktoren ds unterdrückt werden. Das rechtwinklige System der Tangente, Haupt- und Binormale in dem Punkte ρ wird somit einfach durch ρ', ρ'', $\rho'\rho''$ dargestellt.

127. Das Hauptkrümmungscentrum wird durch den Ausdruck

$$\mu = \rho + h\nu_k = \rho + hd\rho V.d\rho d^2\rho \quad \ldots\ldots \quad (E. 16)$$

dargestellt werden können, wenn h eine skalare Grösse bedeutet, die wir näher bestimmen wollen. Für den Oskulationskreis gilt sodann die Gleichung

$$(\omega - \mu)^2 = (\rho - \mu)^2.$$

Man verificirt leicht, dass bei beliebigem Werte von h dieser Kreis den Punkt $\rho + xd\rho$, wo x unendlich klein ist, enthält. Damit aber auch der nächstfolgende Punkt der Curve

$$\rho + yd\rho + \frac{y^2}{2} d^2\rho$$

in dem Kreise enthalten sei, muss die Beziehung stattfinden

$$2S(\rho - \mu)\,(y d\rho + \frac{y^2}{2} d^2\rho) + (y d\rho + \frac{y^2}{2} d^2\rho)^2 = 0.$$

Führt man hierein den Wert von μ aus (E. 16) ein und vernachlässigt man die Glieder von höherer Ordnung als der zweiten, so wird erhalten

$$h = -\frac{d\rho^2}{V^2.d\rho d^2\rho}$$

und schliesslich wird der Ausdruck für das Hauptkrümmungscentrum

$$\mu = \rho - \frac{d\rho^3}{V.d\rho d^2\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 17)$$

und die Länge des Hauptkrümmungsradius ist

$$R_h = T(\mu - \rho) = \frac{Td\rho^3}{TVd\rho d^2\rho} \quad \ldots\ldots \quad (E. 18)$$

Bei Benutzung von s statt u erhalten wir

$$\mu = \rho - \frac{1}{\rho''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 19)$$

und

$$R_h = \frac{1}{T\rho''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 20)$$

128. Die Gleichung der Tangente im Punkte ρ ist

$$V.(\omega - \rho)d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 21)$$

Dieselbe ist eine Funktion von u. Wenn man nun zwischen dieser Gleichung und derjenigen der gegebenen Curve u eliminirt, so erhält man die Gleichung der abwickelbaren Fläche, deren Rückkehrkante die doppelt gekrümmte Curve ist.

Es ist weiter leicht die Gleichung der erzeugenden Ebene dieser Fläche hinzuschreiben, weil dieselbe zwei aufeinander folgende Tangenten der Rückkehrkante enthält. Somit fällt diese Ebene mit der Oskulationsebene der Curve zusammen und hat die Gleichung (E. 10) oder

$$S(\omega - \rho)\rho'\rho'' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 22)$$

Wenn wir im allgemeinen die Gleichung zweier aufeinander folgenden Tangenten hinschreiben

$$V(\omega - \rho)d\rho = 0,$$

$$V.(\omega - \rho - xd\rho - \frac{x^2}{2} d^2\rho + \ldots)\,(d\rho + xd^2\rho + \frac{x^2}{2} d^3\rho + \ldots) = 0,$$

wobei x eine unendlich kleine constante Skalargrösse bedeutet, so kann nach Art. 42 leicht die kürzeste Entfernung dieser Geraden bestimmt werden, Man findet sodann nach (B. 53)

$$-\left[Vd\rho\left(xd^2\rho+\frac{x^2}{2}d^3\rho+\ldots\right)\right]^{-1}S.\left(\frac{x^2}{2}d^2\rho+\ldots\right)d\rho\left(xd^2\rho+\frac{x^2}{2}d^3\rho+\ldots\right)$$

oder bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{x^3S.d\rho d^2\rho d^3\rho}{12\,V.d\rho d^2\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 23)$$

Diese kürzeste Entfernung ist daher ein unendlich kleiner Vektor dritter Ordnungsgrösse in der Richtung der Binormale der Curve. Demnach pflegt man zu sagen, dass zwei aufeinder folgende Tangenten der doppeltgekrümmten Curve sich schneiden.

129. Wenn eine Gerade sich stetig bewegt, so kann die Gleichung derselben in der Form

$$V(\rho - fu)f_1u = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 24)$$

gedacht werden. Es stellt diese Gleichung daher auch eine Regelfläche dar. Setzt man

$$f(u) = \sigma,\ f_1(u) = \tau,$$

so ist

$$V(\rho - \sigma)\tau = 0$$

die erzeugende Gerade der Regelfläche. Die nächstfolgende Erzeugende kann durch

$$V(\rho - \sigma - xd\sigma)(\tau + xd\tau) = 0$$

dargestellt werden und die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit diese Geraden in einer Ebene enthalten seien, ist nach (B. 50)

$$S\tau d\sigma d\tau = 0 \text{ oder } Sf'f_1f_1' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (E. 25)$$

Unter dieser Bedingung stellt daher die Gleichung (E. 24) eine abwickelbare Fläche dar. Es ist augenscheinlich, dass diese Relation erfüllt wird, wenn die Funktion f_1 der Derivirten der Funktion f gleich kommt. Demnach wird stets die Gleichung

$$V(\rho - fu)f'u = 0 \text{ oder } \rho = f + yf' \quad \ldots\ldots \quad (E. 26)$$

einer abwickelbaren Fläche angehören. Diese Gleichung entspricht dem Falle, wo

$$\rho = fu$$

die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche darstellt und $f'u$ ist sodann die Tangente in jedem Punkte dieser Curve. Offenbar kann daher stets die Gleichung der developpablen Fläche in die Form (E. 25) gebracht werden.

Wenn die Gleichung (E. 25) erfüllt wird, so kann die erzeugende Ebene der developpablen Fläche leicht angegeben werden. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Gleichung der Geraden (E. 24) in die Form

$$\rho = f + yf_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 27)}$$

ρ erscheint nun als Funktion der beiden Skalare y, u. Nach Art. 104 kann nun aber leicht ein Ausdruck für die Normale in einem Punkte der durch (E. 27) dargestellten Fläche gefunden werden, nämlich

$$\nu = x\, V d_u \rho d_y \rho = x\, V.(f' + yf_1')f_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(E. 28)}$$

und die Gleichung der Tangentenebene in dem Punkte ρ der Fläche ist daher

$$S.(\omega - \rho)f_1(f' + yf_1') = 0.$$

Ist die Fläche abwickelbar, sodass (E. 25) erfüllt ist, so stellt diese Gleichung die erzeugende Ebene derselben dar. Weil in diesem Falle die Vektoren f_1, f', f_1' complanar sind, so ist

$$Vf'f_1 = z\, Vf_1'f_1,$$

wo z skalar ist. Nach (E. 28) wird daher die Richtung der Normale von y unabhängig, eine bekannte Eigenschaft der developpablen Fläche, und die Gleichung der erzeugenden Ebene ist daher

$$S(\omega - \rho)f_1 f_1' = 0.$$

Für den Schnittpunkt zweier aufeinander folgenden erzeugenden Geraden, d. h. für einen Punkt der Rückkehrkante findet man nach Art. 40 leicht

$$\rho = \frac{f_1 V(ff_1' + f'f_1) - f_1' Vff_1 + Sff_1f_1'}{Vf_1f_1'}$$
$$= \frac{f_1'Sff_1 - f_1(Sff_1' + Vf_1f')}{Vf_1f_1'}$$

Wenn die Regelfläche nicht abwickelbar ist, so kann nach der kürzesten Entfernung zweier aufeinander folgenden Erzeugenden gefragt werden. Schreiben wir für dieselben

$$\rho = f + yf_1$$
$$\rho = f + xf'du + z(f_1 + xf_1'du)$$

wo x unendlich klein ist, so ergibt (B. 53) für die kürzeste

Entfernung mit Weglassung der Glieder höherer Ordnung

$$-\,xdu\,\frac{Sf'f_1f_1'}{Vf_1f_1'}$$

und der Fusspunkt derselben auf der ersten Erzeugenden ist

$$\sigma = f + f_1 S\,\frac{f'f_1}{Vf_1f_1'}.$$

Der Ort dieses Punktes heisst bekanntlich die Striktionslinie der Regelfläche. Dieselbe wird daher einfach durch

$$\sigma = f(u)$$

dargestellt, wenn die Funktion f_1 der Bedingung

$$S.f'f_1\,Vf_1f_1' = 0,$$

oder

$$f_1^2 Sf'f_1' - Sf_1f_1'Sf_1f' = 0$$

unterworfen wird. Setzt man nun voraus

$$Tf_1 = 0, \text{ daher } Sf_1f_1' = 0,$$

wodurch die Richtung des Vektors f_1 noch ganz beliebig bleibt, so ist

$$\rho = f + yf_1 \text{ mit der Bedingung } Sf'f_1' = 0$$

eine beliebige Regelfläche, deren Strictionslinie

$$\rho = f(u)$$

ist.

130. Wir können diese Betrachtungen nicht weiter fortführen doch mag es noch einiges Interesse bieten die Differentialgleichung der abwickelbaren Regelflächen aufzustellen. Hamilton gibt dieselbe in der Form

$$V.\nu d\nu = 0,$$

wenn $d\rho$ längs der erzeugenden Geraden genommen wird. Die Form dieser Gleichung ist daher nicht eine allgemeine; man könnte derselben die Gestalt

$$V.\nu d_y\nu = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(E. 29)}$$

erteilen, wo mit $d_y\nu$ die Änderung des Vektors ν bezeichnet wird, wenn u constant bleibt und nur y sich ändert. Indessen kann dieselbe leicht verallgemeinert werden. Es ist nämlich der Gleichung (E. 28) zufolge, wenn (E. 26) die abwickelbare Fläche darstellt

$$U\nu = UVff'' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(E. 30)}$$

Hieraus folgt

$$d_y U\nu = 0,$$

und bei Anwendung der Gleichung (e. 23) entsteht sodann (E. 29). Nun ist jedoch nach (D. 9)

$$d_y \nu = \Phi d_y \rho,$$

und die Gleichung der Fläche ergibt

$$d_y \rho = f' dy\,, \text{ daher } d_y \nu = \Phi f'.dy,$$

sodass nun die Gleichung (E. 29) übergeht in

$$V.\nu\Phi f' = 0 \text{ oder } f' = x\Phi^{-1}\nu.$$

Wenn man nun an dieser Gleichung mit $S.\nu$ operirt, so entsteht mit Rücksicht auf (E. 30)

$$S\nu\Phi^{-1}\nu = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(E. 31)}$$

und dies ist die gesuchte partielle Differentialgleichung. Dieselbe drückt nach Art. 113 aus, dass alle Punkte einer abwickelbaren Fläche parabolische Punkte sind.

131. Die Oskulationsebene im Punkte ρ einer Curve ändert natürlich beim Weiterschreiten längs der Curve seine Lage. Man kann nun fragen, in welchen Punkten der Curve die Oskulationsebene stationär ist. Dasselbe muss sodann auch von der Richtung der Binormale gelten, d. h. es muss die Gleichung stattfinden

$$dU V d\rho d^2\rho = 0.$$

Nach (e. 24) ergibt dies aber

$$V\frac{Vd(d\rho d^2\rho)}{Vd\rho d^2\rho} = 0,$$

oder

$$V.(Vd\rho d^3\rho)\,(Vd\rho d^2\rho) = 0,$$

und schliesslich

$$Sd\rho d^2\rho d^3\rho = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{(E. 32)}$$

Aus dieser Gleichung findet man eine bestimmte Anzahl Werte für die Variable u, sodass jede Curve im allgemeinen eine bestimmte Anzahl stationärer Oskulationsebenen aufweist.

Findet die Beziehung (E. 32) für jeden Wert von u statt, so ist die Curve eine ebene.

132. Wir hätten noch einen anderen Weg als den im Art. 123 gefolgten wählen können um die Grösse der Hauptkrüm-

mung der Curve zu finden. Weil derselbe uns auch zur Torsion führen kann, so wollen wir ihn hier erörtern.

Die Richtung der Tangente im Punkte ρ ist $d\rho$, diejenige der nächstfolgenden ist $d\rho + x d^2\rho$. Demnach und nach (c. 33) ist die Grösse des Contingenzwinkels bestimmt durch

$$e = \frac{TVd\rho(d\rho + xd^2\rho)}{Td\rho^2} = x\frac{TVd\rho d^2\rho}{Td\rho^2},$$

und weil $xTd\rho$ die Länge der entsprechenden Sehne der Curve ist, so ist der Hauptkrümmungsradius

$$R_k = \frac{xTd\rho}{e} = \frac{Td\rho^3}{TVd\rho d^2\rho}.$$

Auch hätten wir noch einfacher für jenen Contingenzwinkel unmittelbar den Ausdruck

$$e = xTd(Ud\rho)$$

hinschreiben können und die Formel (D. 13) ergibt sodann unmittelbar

$$e = xTV\frac{d^2\rho}{d\rho} = x\frac{TVd\rho d^2\rho}{Td\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 33)}$$

in Übereinstimmung mit der vorhergehenden Formel.

In derselben Weise finden wir für den unendlich kleinen Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Binormalen der Curve

$$\begin{aligned} e_b &= xTdUVd\rho d^2\rho \\ &= xTV\frac{Vd\rho d^3\rho}{Vd\rho d^2\rho} \text{ nach } (e.\,24), \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$e_b = x\frac{Td\rho S.d\rho d^2\rho d^3\rho}{V^2.d\rho d^2\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 34)}$$

und hieraus erhalten wir sodann weiter für den Torsionsradius

$$R_t = \frac{xTd\rho}{e_b} = \pm\frac{NV.d\rho d^2\rho}{S.d\rho d^2\rho d^3\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 35)}$$

Durch die Verknüpfung der Gleichungen (E. 23), (E. 33), (E. 35) kann nun eine sehr einfache Formel gefunden werden für die Grösse der kürzesten Entfernung zweier aufeinander folgenden Tangenten der Curve. Bezeichnet man dieselbe nämlich mit l, und mit ds die Länge des Curvenbogens, d. h. die Grösse $xTd\rho$, so ergibt sich

$$l = \frac{ds^3}{12RR_t} \quad \text{(E. 36)}$$

Aus (E. 35) ersicht man weiter unmittelbar, dass der Torsionsradius unendlich gross, somit die Torsion der Curve in dem betreffenden Punkte Null ist, wenn die Gleichung (E. 32) stattfindet.

Schliesslich bleibt noch die Untersuchung der dritten Krümmung der Curve übrig, welche durch die Änderung der Richtung der Hauptnormale entsteht. Man findet zunächst für den zugehörigen Krümmungswinkel

$$e_1 = xTdU(d\rho\, Vd\rho d^2\rho)$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} d(Ud\rho\, UVd\rho d^2\rho) &= d(Ud\rho)\, UVd\rho d^2\rho + Ud\rho d(UVd\rho d^2\rho) \\ &= Ud\rho \frac{TVd\rho d^2\rho}{Td\rho^2} + UVd\rho d^2\rho \frac{Td\rho Sd\rho d^2\rho d^3\rho}{NVd\rho d^2\rho} \\ &= \frac{d\rho}{R_k} + UVd\rho d^2\rho \frac{Td\rho}{R_t}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich sodann weiter

$$\begin{aligned} e_1{}^2 &= x^2 N\left(\frac{d\rho}{R_k} + UVd\rho d^2\rho \frac{Td\rho}{R_t}\right) \\ &= x^2 Td\rho^2 \left(\frac{1}{R_k{}^2} + \frac{1}{R_t{}^2}\right). \end{aligned}$$

Der dritte Krümmungsradius ist daher bestimmt durch

$$\frac{1}{R_1{}^2} = \frac{e_1{}^2}{x^2 Td\rho^2} = \frac{1}{R_k{}^2} + \frac{1}{R_t{}^2} \quad \text{(E. 37)}$$

und diese Gleichung enthält den bekannten Lancret'schen Satz.

Wir haben im Vorhergehenden nur Rücksicht genommen auf die Länge der Änderung der Einheitsvektoren des jedem Punkte zugehörigen rechtwinkligen Systems. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Berücksichtigung der Richtung jener Änderung nicht weniger lehrsam ist. Betrachten wir zum Beispiel die Änderung

$$xdUd\rho = x\frac{Vd\rho d^2\rho . d\rho}{Td\rho^3} \text{ nach (D. 13)},$$

so ist dieselbe offenbar der Hauptnormale der Curve parallel.

Man kann daher sich denken, dass die Tangente in die nächstfolgende übergehe durch eine Drehung um die Binormale.

133. Die vorhergehenden Formeln mögen nun in einem speciellen Falle angewandt werden, nämlich bei der Schraubenlinie, welche auch von HAMILTON mehrfach untersucht worden ist.

Ist α ein Einheitsvektor in der Richtung der Achse derselben und β ein willkürlicher Vektor senkrecht zu α, sodass die Gleichung gilt

$$S\alpha\beta = 0,$$

so kann diese Gleichung der Schraubenlinie in die Form gegeben werden

$$\rho = \alpha^{u}\beta + au\alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \text{(E. 38)}$$

Diese Gleichung drückt nämlich die fundamentale Eigenschaft der Curve aus, dass dieselbe entsteht, wenn man einen Vektor um einen zu ihm senkrechten Vektor einen beliebigen Winkel drehen lässt und sodann in der Richtung des zweiten Vektors ein Segment abträgt, dessen Länge jenem Winkel proportional ist. Aus jener Gleichung findet man leicht

$$d\rho = \left(\frac{\pi}{2}\alpha^{u+1}\beta + a\alpha\right)du \text{ nach } (e.\ 17^*)$$

Hieraus folgt zunächst

$$Nd\rho = \left(\frac{\pi^2}{4}N\beta + a^2\right)du^2,$$

sodass $Td\rho$ proportional zu du ist. Weiter erhält man

$$S.\alpha d\rho = -\, a du,$$

somit ist $S.\alpha Ud\rho$ constant. Die Tangente der Schraubenlinie bildet daher mit der Achse derselben einen constanten Winkel.

Die Gleichung der Tangente ist

$$\omega = \rho + y\left(\frac{\pi}{2}\alpha^{u+1}\beta + a\alpha\right).$$

Bestimmt man den Schnittpunkt derselben mit der Ebene

$$S\alpha\omega = 0,$$

so erhält man $y = -\, u$, daher

$$\omega = \left(1 - \frac{\pi}{2}u\alpha\right)\alpha^{u}\beta \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad \text{(E. 39)}$$

Diese Gleichung ist diejenige des Ortes, welchen der Schnittpunkt der Tangente mit der festen Ebene beschreibt. Derselbe ist eine transcendente Curve, der wir nachher nochmals begegnen werden.

Bestimmen wir weiter $d^2\rho$. Es entsteht dadurch

$$d^2\rho = -\frac{\pi^2}{4}\alpha^u\beta du^2,$$

und weiter

$$\begin{aligned} Vd\rho d^2\rho &= -\frac{\pi^2}{4}du^3 V.\alpha\left(\frac{\pi}{2}\alpha^u\beta + a\right)\alpha^u\beta \\ &= -\frac{\pi^2}{4}du^3\left(\frac{\pi}{2}\beta^2\alpha + a\alpha^{u+1}\beta\right) \\ TVd\rho d^2\rho &= \frac{\pi^2}{4}du^3 T\beta\sqrt{\frac{\pi^2}{4}N\beta + a^2}. \end{aligned}$$

Hieraus findet man sodann

$$S.\alpha UVd\rho d^2\rho = -\pi\frac{T\beta}{\sqrt{\pi^2 N\beta + 4a^2}} = \text{constant}.$$

Die Oskulationsebene der Schraubenlinie bildet daher mit der Achse einen constanten Winkel. Nach (E. 18) ist weiter

$$R_k = \frac{\pi^2 N\beta + 4a^2}{\pi^2 T\beta},$$

sodass auch der Hauptkrümmungsradius in jedem Punkte der Curve denselben Wert hat.

Berechnen wir, um die Torsion zu finden, das dritte Differential von ρ

$$d^3\rho = -\frac{\pi^3}{8}\alpha^{u+1}\beta du^3.$$

Nun ist

$$Sd\rho d^2\rho d^3\rho = \frac{\pi^5}{32}a\beta^2 du^6,$$

daher

$$R_t = \frac{2}{a\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}N\beta + a^2\right)$$

oder in Worten: die Torsion der Schraubenlinie ist in jedem ihrer Punkte constant.

Die entwickelbare Fläche der Tangenten der Curve hat die Gleichung

$$\omega = \alpha^{u}\beta + au\alpha + y\left(\frac{\pi}{2}\alpha^{u+1}\beta + a\alpha\right).$$

Hieraus erfolgen die Skalargleichungen

$$S.\alpha\omega = -a(u+y),$$

$$S.\beta^{-1}\omega = \cos u\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y\sin u\frac{\pi}{2},$$

$$S.\alpha\beta^{-1}\omega = \sin u\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y\cos u\frac{\pi}{2},$$

zwischen denen u und y leicht eliminirt werden können.

Wir wollen nur den Ort des Fusspunktes des Perpendikels bestimmen aus dem Ursprung der Vektoren auf die Oskulationsebenen der Curve gefällt. Die Gleichung einer dieser Ebenen ist

$$S\omega\left(\frac{\pi}{2}\beta^2\alpha + a\alpha^{u+1}\beta\right) = -\frac{\pi}{2}au\beta^2,$$

und der Vektor eines Punktes des Ortes ist daher nach (B. 32)

$$\sigma = -\frac{\pi}{2}au\beta^2\left(\frac{\pi}{2}\beta^2\alpha + a\alpha^{u+1}\beta\right)^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 40)}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\frac{\pi}{2}\beta^2\alpha + a\alpha^{u+1}\beta$$

und operirt nach einander mit $S.\beta$, $S\alpha\beta$, so wird erhalten

$$\frac{\pi}{2}S\sigma\alpha\beta + a\cos u\frac{\pi}{2}S\alpha\sigma = 0,$$

$$\frac{\pi}{2}S\sigma\beta - a\sin u\frac{\pi}{2}S\alpha\sigma = 0,$$

und die Elimination von u ergibt nun

$$4a^2S^2\sigma\alpha - \pi^2(S^2\sigma\beta + S^2\sigma\alpha\beta) = 0,$$

sodass der gesuchte Ort eine Curve auf einem Kegel zweiter Ordnung ist, und zwar berührt dieser Kegel die beiden Ebenen

$$2aS\sigma\alpha \pm \pi S\sigma\beta = 0$$

in ihren Durchschnitten mit der Ebene

$$S\sigma\alpha\beta = 0,$$

und ebenso die Ebenen

$$aS\sigma\alpha \pm \pi S\sigma\alpha\beta = 0$$

in ihren Durchschnitten mit

$$S\sigma\beta = 0.$$

Der Scheitel des Kegels liegt in dem Ursprung der Vektoren und man findet mit Hülfe von (C. 52) leicht, dass die Fläche ein Rotationskegel ist, dessen Achse mit derjenigen der Schraubenlinie zusammenfällt. In der Tat schneidet eine Ebene

$$S\sigma\alpha = C$$

den Kegel in dem auf der Kugel

$$\sigma^2 = C^2\left(\frac{4a^2}{\pi^2}\beta^{-2} - 1\right)$$

enthaltenen Kreise.

134. Umgekehrt, wenn gefordert wird die Curve zu bestimmen, deren Krümmung und Torsion in allen Punkten dieselbe ist, so kommt dieses Problem hinaus auf die Integration der Gleichungen

$$\frac{Td\rho^3}{TVd\rho d^2\rho} = C, \quad \frac{NVd\rho d^2\rho}{Sd\rho d^2\rho d^3\rho} = C_1.$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} dUVd\rho d^2\rho &= \frac{Sd\rho d^2\rho d^3\rho}{NVd\rho d^2\rho}\,\frac{(Vd\rho d^2\rho)d\rho}{TVd\rho d^2\rho} \\ &= -\frac{1}{C_1 TVd\rho d^2\rho}\,V\frac{d^2\rho}{d\rho}.d\rho^3 \\ &= \frac{C}{C_1}\,dUd\rho, \end{aligned}$$

sodass eine Integration ergibt

$$UVd\rho d^2\rho = \frac{C}{C_1}\,Ud\rho + \alpha \quad \text{. . . . . (E. 41)}$$

wo α einen constanten Vektor bedeutet. Indem man diese Gleichung mit zwei potenzirt, entsteht die Bedingungsgleichung

$$1 - \frac{C^2}{C_1^{\,2}} + \alpha^2 + 2\,\frac{C}{C_1}S.\alpha Ud\rho = 0 \quad \text{. . . . (E. 42)}$$

Aus (E. 41) ergibt sich aber weiter

$$\frac{Vd\rho d^2\rho}{TVd\rho d^2\rho} = \frac{Td\rho^2}{TVd\rho d^2\rho}\,V\frac{d^2\rho}{d\rho} = \frac{C}{C_1}\,Ud\rho + \alpha,$$

oder nach (D. 13)

$$CdUd\rho = -\frac{C}{C_1}\,Td\rho + \alpha d\rho. \quad \text{. . . . (E. 43)}$$

und durch Operation mit S

$$S.\alpha Ud\rho = \frac{C}{C_1} \quad \text{. . . . . (E. 44)}$$

sodass nun aus (E. 42) weiter folgt

$$T\alpha = \frac{1}{C_1}\sqrt{C^2 + C_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 45)$$

Durch die Gleichung (E. 44) wird schon die Eigenschaft der Curve ausgesprochen, dass die Tangente einen constanten Winkel mit einer festen Achse bildet.

Andrerseits folgt aus (E. 43) durch Anwendung des Symbols V

$$CdUd\rho = V\alpha d\rho,$$

eine Gleichung, welche durch Integration ergibt

$$CUd\rho = V\alpha\rho + \beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 46)$$

wo β ein neuer constanter Vektor ist. In Verbindung mit (E. 44) erhält man sodann leicht

$$S\alpha\beta = \frac{C^2}{C_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 47)$$

und durch Quadrirung von (E. 46) entsteht

$$(V\alpha\rho + \beta)^2 = -C^2$$

oder

$$\rho^2 N\alpha + S^2\alpha\rho - 2S\alpha\beta\rho = -C^2 - \beta^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationscylinders, dessen Achse parallel zu α ist. Denn schneidet man die Fläche durch eine Ebene

$$S\alpha\rho = \text{constant},$$

so ist der Durchschnitt ein Kreis, und ausserdem genügt der Gleichung der Wert $\rho + x\alpha$, wenn dasselbe von ρ allein gilt, unabhängig von dem Werte von x. Die sämtlichen Kreisdurchschnitte liegen auf Kugeln um den Punkt $-V\alpha^{-1}\beta$ als Mittelpunkt beschrieben.

Aus dem Schlusse, den wir schon aus der Gleichung (E. 44) gezogen haben, erhellt nun unmittelbar, dass die gesuchte Curve die Schraubenlinie sein muss.

Verlegen wir den Ursprung der Vektoren nach dem Mittelpunkte der soeben erwähnten Kugeln, so geht die Gleichung (E. 46) über in

$$CUd\rho = V\alpha\rho - \alpha\frac{C^2 C_1}{C^2 + C_1^2},$$

oder kürzer

$$CUd\rho = V\alpha\rho - b\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (E. 48)$$

wo

$$b = \frac{C^2 C_1}{C^2 + C_1^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 49)$$

Behufs weiterer Integration setzen wir

$$\rho = x\alpha_0 + y\beta + z\gamma,$$

wo $\alpha_0 = U\alpha$ und α_0, β, γ ein rechtwinkliges System bilden. x, y, z sind Funktionen einer Skalargrösse u. Die Gleichung (E. 42) ergibt sodann

$$\frac{dx}{b} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y} = -\frac{T\alpha}{C}\, T(\alpha_0 dx + \beta dy + \gamma dz),$$

und hierein kann noch

$$T(\alpha_0 dx + \beta dy + \gamma dz) = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

eingeführt werden, wodurch man die Bedingungsgleichung erhält

$$\sqrt{b^2 + y^2 + z^2} = \frac{C}{T\alpha} \ldots\ldots\ldots \quad (E. 50)$$

Die Integralgleichungen lauten sodann

$$y^2 + z^2 = A^2,$$

$$y = \pm A \sin\left(B - \frac{x}{b}\right), \quad z = \mp A \cos\left(B - \frac{x}{b}\right).$$

Aus (E. 50) ergibt sich noch

$$A = \frac{C C_1^2}{C^2 + C_1^2}.$$

und die Gleichung der Curve ist schliesslich

$$\rho = x\alpha_0 \pm A\left[(\beta \sin B - \gamma \cos B) \cos\frac{x}{b} - (\beta \cos B + \gamma \sin \beta) \sin\frac{x}{b}\right].$$

Führt man nun noch die Bezeichnung ein

$$\pm A(\beta \sin B - \gamma \cos B) = \beta_0,$$

so ist

$$\pm A(\beta \cos B + \gamma \sin B) = \alpha_0\beta_0$$

und

$$\rho = x\alpha_0 + \left(\cos\frac{x}{b} - \alpha_0 \sin\frac{x}{b}\right)\beta_0$$

$$= x\alpha_0 + \alpha_0^{-\frac{2x}{b\pi}}\beta_0,$$

eine Gleichung von der Form der für die Schraubenlinie angegebenen.

135. Bekanntlich stellt

$$\rho = \alpha + \beta u$$

eine Gerade dar. Wenn wir für ρ eine quadratische Funktion von u nehmen

$$\rho = \alpha + \beta u + \tfrac{1}{2}\gamma u^2,$$

so erhellt unmittelbar, dass diese Curve in der Ebene

$$S(\rho - \alpha)\beta\gamma = 0$$

enthalten ist. Dasselbe gilt natürlich allgemein von der Curve

$$\rho = \alpha + \beta f_1(u) + \gamma f_2(u).$$

Die Gleichung

$$\rho = \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^2}{a + bu + cu^2},$$

wo α, β, γ beliebige Vektoren, a, b, c Skalare bedeuten, stellt ebenfalls eine ebene Curve dar, und zwar eine solche zweiter Ordnung, weil dieselbe von einer willkürlichen Ebene in zwei Punkten geschnitten wird. Die Ebene jener Curve ist, wie man leicht findet,

$$S\rho(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = S\alpha\beta\gamma.$$

Specieller werden eine Parabel und eine Hyperbel durch die Gleichungen

$$\rho = \alpha u + \tfrac{1}{2}\beta u^2, \quad \rho = \alpha u + \frac{\beta}{u}$$

dargestellt und mit Hülfe dieser Formen können die bekannten Eigenschaften dieser Curven leicht bewiesen werden.

Eine Raumcurve dritter Ordnung wird durch

$$\rho = \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^2 + \delta u^3}{a + bu + cu^2 + du^3}$$

dargestellt und eine der einfachsten derselben ist in

$$\rho = \alpha u + \tfrac{1}{2}\beta u^2 + \tfrac{1}{6}\gamma u^3$$

enthalten. Durch Operation mit $S.\beta\gamma$, $S.\gamma\alpha$, $S.\alpha\beta$ erhält man Gleichungen zwischen denen u zweimal eliminirt werden kann. In dieser Weise kann man zeigen, dass jene Curve der Durchschnitt der Flächen zweiter Ordnung

$$S^2\rho\beta\gamma - 2S\rho\gamma\alpha\, S\alpha\beta\gamma = 0$$

$$S\rho\beta\gamma\, S\rho\gamma\alpha - 2S\rho\alpha\beta\, S\alpha\beta\gamma = 0$$

ist. Die erste derselben ist ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugende parallel zu γ sind, die zweite ein parabolisches Hyperboloid.

136. Wenn wir nun wieder zu den allgemeinen Betrachtungen übergehen, so können wir noch die Regelflächen in Betracht ziehen, welche von den Haupt- und Binormalen beschrieben werden. Dieselben werden durch die Geraden

$$\omega = \rho + y d\rho\, Vd\rho d^2\rho$$
$$\omega = \rho + y\, Vd\rho d^2\rho$$

erzeugt und die Skalargleichungen dieser Flächen werden daher erhalten durch die Elimination von u zwischen den Gleichungen

$$S(\omega - \rho)d\rho = 0\,,\quad S(\omega - \rho)d\rho d^2\rho = 0,$$

und zwischen den andern

$$S(\omega - \rho)d\rho = 0,\quad S(\omega - \rho)d^2\rho = 0.$$

Zwei aufeinander folgende Binormalen einer doppelt gekrümmten Curve schneiden sich im allgemeinen nicht. Die Geraden

$$\rho + y\, Vd\rho d^2\rho,$$
$$\rho + xd\rho + y(1 + xd)\, Vd\rho d^2\rho$$

nämlich können sich nach dem im Art. 40 angegebenen Kriterium nur schneiden, wie nach einer kleinen Rechnung erhalten wird, wenn

$$S.d\rho d^2\rho d^3\rho = 0,$$

somit, wenn die Curve eine ebene ist, oder ein besonderer Punkt der Curve in Betracht gezogen wird.

Wenn wir auf jede Tangente ein Segment von dem Berührungspunkte aus abtragen, dessen Länge derjenigen des von einem festen Punkte aus gemessenen Bogens der Curve gleich ist, so können wir, indem wir zugleich s als unabhängige Variable wählen, die Gleichung dieser Evolvente in die Form schreiben

$$\omega = \rho - s\rho' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 51)}$$

Bezeichnen wir mit $\delta\omega$ die Änderung von ω, wenn wir zu dem nächstfolgenden Punkte der Evolvente übergehen, welche einer Änderung δs auf der gegebenen Curve entspricht, so ist

$$\delta\omega = - s\rho''\delta s.$$

Die Tangente der Evolvente ist daher der Hauptnormale der gegebenen Curve parallel.

137. Wir wollen nun noch die Gleichung der **Schmiegungskugel** in einem Punkte der Curve herleiten. Weil das Hauptkrümmungscentrum durch (E. 17) oder

$$\rho - \frac{d\rho^3}{Vd\rho d^2\rho}$$

bestimmt ist, andrerseits aber der Vektor $Vd\rho d^2\rho$ senkrecht zur Oskulationsebene der Curve ist, so wird im allgemeinen die Kugel

$$\left(\omega - \rho + \frac{d\rho^3}{Vd\rho d^2\rho} - y\,Vd\rho d^2\rho\right)^2 = \left(\frac{d\rho^3}{Vd\rho d^2\rho} - y\,Vd\rho d^2\rho\right)^2$$

für jeden beliebigen Wert von y drei aufeinander folgende Punkte der Curve enthalten, wie man leicht für die Punkte

$$\rho,\ \rho + xd\rho,\ \rho + xd\rho + \frac{x^2}{2}d^2\rho$$

verificirt. Damit jedoch auch ein vierter Punkt

$$\rho + xd\rho + \frac{x^2}{2}d^2\rho + \frac{x^3}{6}d^3\rho$$

in derselben enthalten sei, muss die Gleichung stattfinden

$$ySd\rho d^2\rho d^3\rho = 3Sd\rho d^2\rho - d\rho^2 S\frac{d\rho d^3\rho}{Vd\rho d^2\rho} \quad \dots \text{(E. 52)}$$

Mit diesem Werte von y ist nun der Mittelpunkt der Schmiegungskugel bestimmt durch die Gleichung

$$\mu_1 = \rho - \frac{d^2\rho}{Vd\rho d^2\rho} + y\,Vd\rho d^2\rho \quad \dots\dots \text{(E. 53)}$$

138. Durchführen wollen wir einige in dem Vorhergehenden angegebenen Rechnungen wieder bei der Schraubenlinie. Aus der Formel für $Td\rho$ findet man leicht für die Länge des Bogens der Curve von *dem* Punkte aus gemessen, welcher dem Werte $u = 0$ entspricht

$$s = u\sqrt{\frac{\pi^2}{4}N\beta + a^2},$$

sodass die Gleichung jener Evolvente ist

$$\omega = \alpha^u\beta + au\alpha - u\left(\frac{\pi}{2}\alpha^{u+1}\beta + a\alpha\right)$$
$$= \left(1 - \frac{\pi}{2}u\alpha\right)\alpha^u\beta.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit (E. 39) völlig überein, woraus der Satz entspringt: Das Segment auf der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und einer beliebigen Ebene senkrecht zur Achse der Curve ist der Länge des zwischen eben denselben Grenzen liegenden Bogens gleich. Und hieraus folgt sodann wieder, dass die Gleichung (E. 39) diejenige der Evolvente des Kreises sein muss.

Die Gleichung (E. 52) ergibt bei der Schraubenlinie für y den Wert Null. Das Centrum der Schmiegungskugel fällt demnach mit dem Hauptkrümmungscentrum zusammen und der Vektor dieses Punktes ist

$$\begin{aligned}\mu &= \alpha^{u}\beta + au\alpha - \left(1 - \frac{4a^2}{N\beta}\right)\alpha^{u}\beta \\ &= au\alpha + \frac{4a^2}{\pi^2}\,\alpha^{u}\beta^{-1}.\end{aligned}$$

Der Ort des Krümmungscentrums einer Schraubenlinie ist daher eine andere Schraubenlinie mit derselben Achse.

139. Die Gleichung der Schmiegungskugel hätten wir noch in einer ganz anderen Weise erhalten können. Setzen wir für dieselbe nämlich

$$(\omega - \mu_1)^2 = (\rho - \mu_1)^2$$

so ergibt die Bedingung, diese Fläche enthalte den nächstfolgenden Punkt $\rho + xd\rho$, dass das Resultat der Operation xd an jener Gleichung verschwinden muss. Daher

$$S(\rho - \mu_1)d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 54)$$

Damit auch ein dritter Punkt der Curve auf der Kugelfläche liege, muss das Resultat der nochmaligen Anwendung von xd ebenfalls verschwinden

$$S(\rho - \mu_1)d^2\rho + d\rho^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E. 55)$$

und schliesslich entsteht für den vierten Punkt die Bedingung

$$S(\rho - \mu_1)d^3\rho + 3Sd\rho d^2\rho = 0 \quad \ldots\ldots \quad (E. 56)$$

Aus (E. 43), (E. 55), (E. 56), kann nun μ_1 bestimmt werden.

Ebenso hätten wir den Hauptkrümmungsmittelpunkt auch aus den Gleichungen (E. 54), (E. 55) zusammen mit derjenigen der Oskulationsebene

$$S(\rho - \mu_1)d\rho d^2\rho = 0$$

bestimmen können.

140. Wir wollen nun die Krümmung von Curven auf Flächen näher untersuchen; es wird sich dabei herausstellen, dass mit Hülfe des Quaternionenkalküls die bekannten Sätze mit Leichtigkeit sich ergeben.

Schneiden wir eine Fläche

$$F\rho = C$$

durch eine willkürliche Ebene

$$S\alpha\rho = a.$$

Wenn nun $d\rho$, $d^2\rho \ldots$ auf die Änderungen des Vektors eines Punktes der Durchschnittscurve sich beziehen, so gelten zunächst die Gleichungen

$$S\nu d\rho = 0\,, \quad S\alpha d\rho = 0\,,$$

daher

$$Ud\rho = UV\alpha\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 57)}$$

Hieraus folgt sodann aber weiter

$$\frac{dUd\rho}{Ud\rho} = \frac{dUV\alpha\nu}{UV\alpha\nu}$$

und nach (*e.* 24)

$$V\frac{d^2\rho}{d\rho} = V\frac{V\alpha d\nu}{V\alpha\nu}.$$

Nach einigen Transformationen wird hieraus

$$\frac{Vd\rho d^2\rho}{Td\rho^2} = -\,a\,\frac{S\alpha\nu d\nu}{NV\alpha\nu}$$

$$= -\,a\,\frac{S.(UV\alpha\nu)\Phi d\rho}{TV\alpha\nu} \text{ nach (D. 9).}$$

Schliesslich folgt sodann

$$\frac{TVd\rho d^2\rho}{Td\rho^3} = \pm\frac{S.Ud\rho\Phi Ud\rho}{TV.\nu U\alpha}$$

oder nach (E. 18)

$$R_h = \pm\frac{TV.\nu U\alpha}{S.Ud\rho\Phi Ud\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 58)}$$

wenn R_h der Hauptkrümmungsradius des ebenen Durchschnittes der Fläche ist. Das Vorzeichen muss so gewählt werden, dass R_h positiv ist.

Die Formel (E. 58) enthält sämtliche bekannte Sätze über die Krümmung ebener Schnitte von Flächen.

Zieht man nur Schnitte in Betracht, welche einen beliebigen aber festen Punkt ρ der Fläche enthalten, so ist ν in obiger Formel constant. Der Krümmungsradius erscheint daher noch abhängig von α und $Ud\rho$. Hält man zunächst den Wert von $Ud\rho$ fest, d. h. lässt man die Ebene um eine Tangente, durch den Punkt ρ an die Fläche gelegt, drehen, so ändert sich R_k nur noch mit der Richtung des Lotes α zur Ebene. Für einen normalen Schnitt der Fläche — welcher die Normale ν enthält — ist α senkrecht zu ν, daher wird in diesem Falle

$$TV.\nu U\alpha = T\nu$$

und

$$R_k^0 = \pm \frac{T\nu}{S.Ud\rho\Phi Ud\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 59)}$$

Weiter ist

$$R_k = R_k^0 \frac{TV.\nu U\alpha}{T\nu} = R_k^0\, TV.U\nu U\alpha$$

oder

$$R_k = R_k^0 \sin \angle \frac{\nu}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 60)}$$

der bekannte MEUSNIER'sche Satz.

Wenn wir nun zweitens $Ud\rho$ sich drehen lassen, α jedoch constant erhalten, so zeigt die Gleichung (E. 58) in Verbindung mit der Formel (C. 42) für die Länge eines Halbmessers einer Fläche zweiter Ordnung, dass, wenn um den Punkt ρ der Fläche als Mittelpunkt eine Fläche zweiter Ordnung construirt wird, deren Gleichung

$$S.\omega\Phi\omega = TV.\nu U\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 61)}$$

ist, das Quadrat der Länge des Halbmessers dieser Fläche in der Richtung der Tangente $Ud\rho$ der gegebenen Fläche gezogen, der Länge des Krümmungsradius des ebenen Schnittes gleich kommt, welcher in dem betreffenden Punkte durch die Richtung $Ud\rho$ senkrecht zu α gelegt wird.

Demnach kommt die Untersuchung der Änderung der Krümmung bei Änderung der Tangente $d\rho$ auf die Untersuchung der Änderung des Halbmessers eines ebenen Kegelschnittes zurück.

141. Wir wollen nun im Weiteren nur die Krümmung der normalen Schnitte der Fläche im Betracht ziehen. Die Fläche zweiter Ordnung (E. 61) geht sodann in

$$S\omega\phi\omega = T\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 62)$$

über, und wir haben nun die Anderungen der in der Ebene

$$S\nu\omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 63)$$

enthaltenen Halbmesser jener Fläche zu betrachten. Vergleichen wir diese Gleichungen mit den Relationen (D. 111), welche die Indicatrix der Fläche in dem betrachteten Punkte bestimmten, so erhellt hieraus, dass der Kegelschnitt (E. 62), (E. 63) der Indicatrix ähnlich und mit derselben concentrisch und coaxial ist. Über die relativen Verhältnisse der Krümmung normaler Schnitte wird daher die Betrachtung der Halbmesser der Indicatrix ebenso gut Aufschluss geben können.

Nun haben wir aber schon im Art. 74 gezeigt, dass diese Halbmesser im allgemeinen zwei Maximum- und Minimumwerte zeigen, den Achsen des Durchschnittes entsprechend und wir haben daselbst erörtert, wie die Richtungen und Grössen derselben sich bestimmen lassen.

Wir erhalten daher den Satz: Die Krümmung der normalen Schnitte der Fläche erreicht in zwei unter sich rechtwinkligen Ebenen einen Maximum- oder Minimumwert. Diese Ebenen, welche die Achsen der Indicatrix der Fläche in dem betreffenden Punkte enthalten, werden bekanntlich die **Hauptschnitte** genannt.

Dass die Achsen der Indicatrix die Winkel zwischen den Inflexionstangenten halbiren, ist schon im Art. 114 dargetan; dasselbe gilt daher von den Hauptschnitten der Fläche.

Die Länge der Krümmungsradien der Hauptschnitte ist nach Art. 74 unmittelbar der Gleichung

$$S.\nu\left(\phi + \frac{T\nu}{R}\right)^{-1}\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 64)$$

zu entnehmen, während die Richtungen derselben sodann weiter durch

$$Ud\rho = U\left(\phi + \frac{T\nu}{R}\right)^{-1}\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 65)$$

bestimmt werden.

Die Gleichung (E. 64) kann in die nachstehende Form geschrieben werden

$$\frac{T\nu^4}{R^2} - \frac{T\nu}{R}(x_2\nu^2 - S.\nu\Phi\nu) - xS\nu\Phi^{-1}\nu = 0 \ldots \text{(E. 66)}$$

wo x, x_2 die gewöhnliche Bedeutung für die Funktion Φ haben. Dieser Gleichung ist der Wert des Produktes der reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien der Fläche zu entnehmen. Bezeichnen wir dieselben mit R_1, R_2, so gilt demnach

$$\frac{1}{R_1 R_2} = -xS.\nu^{-1}\Phi^{-1}\nu^{-1} \ldots\ldots\ldots \text{(E. 67)}$$

In Verbindung mit einem nachher mitzuteilenden Resultate enthält diese Gleichung einen bekannten Satz von Gauss.

Bezeichnen wir weiter mit R den Krümmungsradius eines beliebigen normalen Schnittes, so gelten die Beziehungen

$$R_1 = \frac{T\nu}{S\alpha_1\Phi\alpha_1},\ R_2 = \frac{T\nu}{S\alpha_2\Phi\alpha_2},\ R = \frac{T\nu}{S\alpha\Phi\alpha} \ldots \text{(E. 68)}$$

wenn α_1, α_2, α Einheitsvektoren in den Richtungen der durch jene Schnitte bestimmten Tangenten der Fläche sind. Nun ist jedoch, weil α_1, α_2, $U\nu$ ein rechtwinkliges System bilden, nach (c. 45)

$$\alpha = -\alpha_1 S\alpha_1\alpha - \alpha_2 S\alpha_2\alpha,$$

daher

$$S\alpha\Phi\alpha = (S\alpha_1\alpha)^2 S\alpha_1\Phi\alpha_1 + (S\alpha_2\alpha)^2 S\alpha_2\Phi\alpha_2,$$

weil $S\alpha_1\Phi\alpha_2$ verschwindet wegen der Conjugation der Richtungen α_1, α_2 in Bezug auf die Funktion Φ (Art. 74). Bezeichnet man noch den Winkel zwischen dem normalen Schnitt und dem ersten Hauptschnitt mit t, so ist

$$S\alpha\Phi\alpha = cos^2 t\, S\alpha_1\Phi\alpha_1 + sin^2 t\, S\alpha_2\Phi\alpha_2.$$

Demnach kann aus (E. 68) geschlossen werden

$$\frac{1}{R} = \frac{cos^2 t}{R_1} + \frac{sin^2 t}{R_2} \ldots\ldots\ldots \text{(E. 69)}$$

die bekannte Euler'sche Gleichung, und wenn R' der Krümmungsradius in einem zur Ebene von R senkrechten Normalschnitte ist

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

sodass der bekannte Satz von dem constanten Werte der Summe der Krümmungen von irgend zwei unter sich rechtwinkligen Normalschnitten bewiesen ist.

142. Für $R_1 = R_2$ haben alle Normalschnitte dieselbe Krümmung. Die Indicatrix ist ein Kreis und der betrachtete Punkt der Fläche ein Umbilicus. Die Bedingung für einen solchen Punkt ist daher, dass die Gleichung (E. 64) oder (E. 66) zwei gleiche Werte für R ergibt.
Man findet

$$(x_2 + S.U\nu\Phi U\nu)^2 + 4xS.U\nu\Phi^{-1}U\nu = 0$$

oder

$$(x_2 - S.U\nu\Phi U\nu)^2 - 4x_1 + 4(\Phi U\nu)^2 = 0. \quad . \quad . \quad (\text{E. } 70)$$

Auch könnten wir die Punkte suchen, für welche die beiden Krümmungsradien der Hauptschnitte entgegengesetzt sind. Weil im allgemeinen für das Krümmungscentrum eines ebenen Schnittes einer Fläche die Gleichungen gelten

$$\mu = \rho - \frac{d\rho^3}{Vd\rho d^2\rho},$$

$$\frac{Vd\rho d^2\rho}{Td\rho^3} = - \alpha \frac{SUd\rho\Phi.Ud\rho}{TV\alpha\nu\ .},$$

somit

$$\mu - \rho = - \frac{Ud\rho\, TV.\nu U\alpha}{U\alpha S.Ud\rho\Phi Ud\rho},$$

und bei einem Normalschnitte $U\nu$, $Ud\rho$, $U\alpha$ ein rechtwinkliges System bilden, so kann in diesem Falle gesetzt werden

$$U\alpha = - Ud\rho U\nu$$

und

$$\mu - \rho = \frac{\nu}{S.Ud\rho\Phi Ud\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{E. } 71)$$

Bezeichnen wir daher wieder mit α_1, α_2 die Hauptrichtungen in dem betrachteten Punkte, so sind die beiden Krümmungsradien der Hauptschnitte einander entgegengesetzt, wenn

$$\frac{1}{S\alpha_1\Phi\alpha_1} + \frac{1}{S\alpha_2\Phi\alpha_2} = 0$$

oder

$$S\alpha_1\Phi\alpha_1 + S\alpha_2\Phi\alpha_2 = 0.$$

Wir können diese Bedingung nun aber in eine einfachere Form bringen, wenn wir den im Art. 68 bewiesenen Satz anwenden, nach dem für je drei unter sich rechtwinklige Halbmesser einer Fläche zweiter Ordnung in den Richtungen der Einheitsvektoren α_1, α_2, α_3 gilt

$$S\alpha_1\Phi\alpha_1 + S\alpha_2\Phi\alpha_2 + S\alpha_3\Phi\alpha_3 = -x_2.$$

Beachten wir, dass α_3 in unsrem Falle mit $U\nu$ zusammenfällt, so ergibt sich für die gesuchten Punkte

$$S.U\nu\Phi U\nu = -x_2 \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 72)}$$

Wenn diese Gleichung in allen Punkten der gegebenen Fläche zutrifft, sodass überall die beiden Hauptkrümmungsradien einander gleich und entgegengesetzt sind, so ist bekanntlich die gegebene Fläche eine Minimalfläche.

143. Wir wollen nun noch Einiges über die merkwürdigen Curven, welche mit einer gegebenen Fläche in einer gewissen Verbindung stehen, in Quaternionenform mitteilen. Zuerst seien die Krümmungscurven erwähnt, zu deren Definition bekanntlich verschiedene Ausgangspunkte gewählt werden können. Betrachtet man dieselben als die Örter der Punkte der Flache, für welche zwei aufeinander folgende Normalen derselben in einer Ebene enthalten sind, so gestaltet das Problem, die Krümmungscurven zu bestimmen, sich folgendermassen.

Es seien ρ, $\rho + xd\rho$ zwei aufeinander folgende Punkte einer Krümmungscurve. Sodann müssen die Geraden

$$V(\omega - \rho)\nu = 0,$$

$$V(\omega - \rho - xd\rho)(\nu + xd\nu) = 0$$

sich schneiden. Nach Art. 40 ergibt dies die Bedingung

$$S\nu d\rho d\nu = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 73)}$$

oder

$$S\nu d\rho\Phi d\rho = 0 \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 74)}$$

Wenn man nun zu dieser Gleichung noch diejenigen (D. 111) hinzunimmt

$$S\nu d\rho = 0, \; Sd\rho\Phi d\rho = -2e,$$

welche die Indicatrix der Fläche bestimmen, so folgt aus den Gleichungen (C. 81), (C. 86), (C. 89) des schon mehrmals benutzten Artikels 74, dass es nun gilt die Achsen der Indicatrix zu bestimmen. Wir sind in dieser Weise zur zweiten Definition der Krümmungscurven gelangt.

Die Gleichung (E. 73) kann als diejenige der Krümmungscurven betrachtet werden. Aus (E. 65) folgt jedoch, dass man dieselbe auch in der Form

$$V.d\rho\left(\Phi+\frac{T\nu}{R}\right)^{-1}\nu=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{(E. 75)}$$

mit der Bedingung (E. 64) geben könnte.

Die vorhergehenden Gleichungen reichen dazu aus, einige bekannten Sätze über Krümmungslinien darzutun. Wenn zwei Flächen mit den Normalen ν, ν_1, deren Tensoren wir gleich Eins setzen wollen, sich durchschneiden, so ist für die Durchschnittscurve nach (E. 7)

$$Ud\rho=UV\nu\nu_1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{(E. 76)}$$

Es gilt jetzt zu zeigen, dass wenn diese Curve eine Krümmungslinie für jede der Flächen ist, wenn demnach die Gleichungen gelten

$$S\nu d\rho d\nu=0\,,\;S.\nu_1d\rho d\nu_1=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{(E. 77)}$$

die Flächen sich unter einem constanten Winkel schneiden, sodass

$$dS\nu\nu_1=0\,,$$

oder

$$S(\nu d\nu_1+\nu_1d\nu)=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{(E. 78)}$$

wenn noch

$$S\nu d\nu=0\,,\;S\nu_1d\nu_1=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{(E. 79)}$$

angenommen wird der Voraussetzung zufolge

$$T\nu=T\nu_1=1.$$

Aus (E. 77) folgt mit Rücksicht auf (E. 77)

$$S.\nu(V\nu\nu_1)d\nu=0\,,\;S\nu_1(V\nu_1\nu)d\nu_1=0$$

oder

$$S\nu_1d\nu+S\nu\nu_1S\nu d\nu=0\,,$$
$$S\nu d\nu_1+S\nu\nu_1S\nu_1d\nu_1=0\,,$$

und bei Beachtung von (E. 77) ergibt sich durch Addition sofort (E. 78).

Wir geraten in derselben Weise zum Theorem von JOACHIMSTHAL, wonach, wenn auf einer Fläche eine ebene Krümmungslinie vorhanden ist, die Ebene derselben und die Tangentenebene der Fläche in allen Punkten der Curve einen constanten Winkel einschliessen.

Wenn nämlich α die Einheitsnormale zur Ebene, ν diejenige zur Fläche ist, so gilt für die Tangente der Durchschnittscurve die Beziehung

$$Ud\rho = UV\alpha\nu \text{ . . . . (E. 80)}$$

und weil die Curve eine Krümmungslinie ist, so gilt weiter

$$S\nu d\rho d\nu = 0\,,$$

oder nach (E. 80)

$$S.\nu(V\alpha\nu)d\nu = 0\,, \text{ daher } S\alpha d\nu = 0 \text{ . . . . . (E. 81)}$$

weil

$$T\nu = 1\,, \text{ somit } S\nu d\nu = 0.$$

Nun ist aber auch

$$dS\alpha\nu = S\alpha d\nu = 0 \text{ nach (E. 81)},$$

womit der Satz bewiesen ist. Dieses Theorem erscheint daher als Specialfall des vorhergehenden.

144. Es ist weiter sehr leicht das bekannte Dupin'sche Theorem zu beweisen, nach welchem die Richtungen der Durchschnitte von drei sich in einem Punkte rechtwinklig durchschneidenden Flächen diejenigen der Krümmungslinien sind, wenn ausserdem auch jedes Paar der Flächen sich in dem nächstfolgenden Punkte rechtwinklig schneidet.

Bezeichnet man nämlich mit ν, ν_1, ν_2 die Normalen der Flächen, sodass

$$S\nu_1\nu_2 = S\nu_2\nu = S\nu\nu_1 = 0\,,$$

so wird die erste Fläche von der zweiten in einer Curve geschnitten, für welche die Beziehung (E. 7) gilt, oder

$$Ud\rho_2 = UV\nu\nu_1 = U\nu\nu_1 = U\nu_2.$$

Diese Richtung muss nun auf den beiden Flächen eine Krümmungslinie sein. Es ist somit nach (E. 73) zu beweisen

$$0 = S.\nu d\rho_2 \Phi d\rho_2 = uS\nu(\nu\nu_1)\Phi\nu_2$$

wo u eine Skalargrösse bedeutet, oder

$$S\nu_1\Phi\nu_2 = 0.$$

In gleicher Weise muss gezeigt werden, dass für die Funktionen Φ_1, Φ_2 die Gleichungen gelten

$$S\nu_2\Phi_1\nu = 0\,, \; S\nu\Phi_2\nu_1 = 0.$$

Nun ergibt aber die Bedingung, dass je zwei Flächenpaare sich auch in dem nächstfolgenden Punkte rechtwinklig durchschneiden

$$dS\nu\nu_1 = 0 \text{ oder } S(\nu d\nu_1 + \nu_1 d\nu) = 0$$

daher auch

$$S(\nu\Phi_1 d\rho_2 + \nu_1\Phi d\rho_2) = 0 \text{ oder } S(\nu\Phi_1\nu_2 + \nu_1\Phi\nu_2) = 0 \ . \quad (E. 82)$$

und in gleicher Weise

$$S(\nu_1\Phi_2\nu + \nu_2\Phi_1\nu) = 0\,, \ S(\nu_2\Phi\nu_1 + \nu\Phi_2\nu_1) = 0. \ . \ . \quad (E. 83)$$

Indem die beiden Gleichungen (E. 83) addirt werden und von dieser Summe die Relation (E. 82) subtrahirt wird, erhält man

$$S\nu_1\Phi_2\nu = 0\,,$$

und sodann auch weiter

$$S\nu\Phi_1\nu_2 = 0\,, \ S\nu_2\Phi\nu_1 = 0.$$

145. Die Geraden, welche man in den Krümmungscentra der Hauptschnitte senkrecht zu den zugehörigen Ebenen derselben ziehen kann, werden von sämtlichen Normalen der Fläche, welche dem gewählten Punkte unendlich nahe liegen, geschnitten.

Denn mit den Bezeichnungen des Art. 137 sind diese Hauptkrümmungscentra durch

$$\mu_1 = \rho + \frac{\nu}{S\alpha_1\Phi\alpha_1}\,, \ \mu_2 = \rho + \frac{\nu}{S\alpha_2\Phi\alpha_2}$$

bestimmt, und die in dem Satze erwähnten Geraden sind daher

$$\left.\begin{array}{l} V\left(\omega - \rho - \dfrac{\nu}{S\alpha_1\Phi\alpha_1}\right)\alpha_2 = 0 \\ V\left(\omega - \rho - \dfrac{\nu}{S\alpha_2\Phi\alpha_2}\right)\alpha_1 = 0 \end{array}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \quad (E. 84)$$

Nun ist jedoch die Gleichung einer von dem Punkte ρ unendlich wenig entfernten Normale, wenn x eine sehr kleine Grösse bedeutet

$$V(\omega - \rho - x d\rho)(\nu + x\Phi d\rho) = 0,$$

oder wieder mit Rücksicht auf Art. 137

$$V(\omega - \rho - x\alpha)(\nu + x\Phi\alpha) = 0.$$

Die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit diese Gerade die erste der Geraden (E. 84) schneide, ist nach (B. 50)

$$S\nu\alpha_2\Phi\alpha + S\nu\alpha_2\alpha\, S\alpha_1\Phi\alpha_1 = 0.$$

Weil aber

$$\Phi\alpha = -\Phi\alpha_1\, S\alpha_1\alpha - \Phi\alpha_2\, S\alpha_2\alpha\,, \ V\nu = \alpha_1\alpha_2\,, \ S\alpha_1\Phi\alpha_2 = 0,$$

so ist die vorhergehende Gleichung eine Identität.

146. Wir wollen nun noch einen Satz über Krümmungslinien bei der Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho\Phi\rho = b$$

beweisen, nämlich das Theorem von JOACHIMSTHAL, dass längs einer solchen Curve das Produkt pD constant bleibt, wenn p die Länge des Lotes ist aus dem Centrum der Fläche zweiter Ordnung auf die Tangentenebene in einem Punkte der Curve gefällt, D die Länge des Durchmessers der Fläche, welche der Tangente der Curve parallel ist.

Die Tangente der Curve genügt der Gleichung (E. 74) oder

$$S.\Phi\rho d\rho\Phi d\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 85)}$$

ausserdem aber ist

$$S\Phi\rho d\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 86)}$$

Weiter erhalten wir

$$p = \frac{b}{T\Phi\rho}, \quad D = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{S.Ud\rho\Phi Ud\rho}},$$

und es gilt daher zu zeigen, dass längs der Krümmungslinie

$$N\Phi\rho S.Ud\rho\Phi Ud\rho = \text{constant} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 87)}$$

oder durch Differentiation, dass

$$\frac{S.d^2\rho\Phi d\rho}{S.d\rho\Phi d\rho} + \frac{S.\Phi\rho\Phi d\rho}{(\Phi\rho)^2} - \frac{S.d\rho d^2\rho}{d\rho^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 88)}$$

Wir bemerken zunächst, dass aus (E. 86) durch Differentiation folgt

$$Sd^2\rho\Phi\rho + Sd\rho\Phi d\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 89)}$$

Nach (E. 86) kann weiter gesetzt werden

$$\Phi d\rho = x\Phi\rho + yd\rho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 90)}$$

und durch Operation mit $S.d\rho$ erhält man

$$x = \frac{S.\Phi\rho\Phi d\rho}{(\Phi\rho)^2}, \quad y = \frac{Sd\rho\Phi d\rho}{d\rho^2},$$

sodass (E. 90) übergeht in

$$\Phi d\rho = \Phi\rho \frac{S\Phi\rho\Phi d\rho}{(\Phi\rho)^2} + d\rho \frac{Sd\rho\Phi d\rho}{d\rho^2} \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(E. 91)}$$

Wenn man hieran nun noch mit $S.d^2\rho$ operirt, so entsteht eine Gleichung, die mit Hülfe von (E. 89) unmittelbar in (E. 88) übergeführt werden kann.

147. Hamilton hat gezeigt, dass man der Gleichung der Krümmungslinien mehrere anderen Formen erteilen kann, von denen eine hier erwähnt werden möge. Weil nämlich

$$dU\nu = -\frac{\nu V\nu d\nu}{T\nu^3},$$

so erhält man

$$V.d\rho dU\nu = -\frac{\nu S\nu d\rho d\nu}{T\nu^3},$$

und für die Krümmungslinien gilt deshalb auch die Beziehung

$$V.d\rho dU\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 92)$$

Im Anschluss an diese Betrachtungen über Krümmungslinien einer Fläche wollen wir noch die Fläche der Centra derselben erwähnen, weil diese Fläche bekanntlich als der Ort der Schnittpunkte der Normalen der gegebenen Fläche, welche längs den Krümmungslinien an dieselbe gezogen sind, betrachtet werden kann. Ihre Gleichung erhält man, indem in (E. 71) μ als veränderlicher Vektor betrachtet wird, während der Punkt ρ die gegebene Fläche beschreibt, oder indem man zwischen der Gleichung der Fläche

$$F\rho = C$$

und

$$\mu = \rho + \frac{\nu}{S.Ud\rho\Phi Ud\rho}$$

den Vektor ρ eliminirt.

148. Wir gehen nun weiter zu den geodätischen Linien einer Fläche über. Bekanntlich lassen dieselben sich wie die Krümmungslinien auf verschiedene Weisen definiren, doch gestaltet sich die Aufgabe, deren Gleichung anzugeben, wohl am einfachsten, wenn man davon ausgeht, dass die Oskulationsebene der geodätischen Linie in jedem Punkte die Normale zur Fläche enthält. Setzt man daher in die Gleichung (E. 10) den Wert

$$\omega = \rho + y\nu$$

ein, so muss für jedes y der Gleichung genügt werden. Dadurch erhalten wir

$$S.\nu d\rho d^2\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 93)$$

Nun ist aber, wie wir schon mehrmals erwähnten,

$$dUd\rho = -\frac{d\rho Vd\rho d^2\rho}{Td\rho^3}.$$

Daher ist

$$V.\nu dUd\rho = -\frac{V.\nu d\rho Vd\rho d^2\rho}{Td\rho^3} = \frac{d\rho S\nu d\rho d^2\rho}{Td\rho^3}$$

und die Gleichung (E. 93) ergibt

$$V.\nu d U d\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 94)$$

Man kann weiter zeigen, dass diese Curve die kürzeste ist, welche zwischen irgend zwei beliebigen aber festen Punkten auf der Fläche gezogen werden kann. Wir wollen uns hier nur damit beschäftigen darzutun, dass die erste Variation des Integrals, welches die Länge der Curve darstellt, verschwindet. Bezeichnen wir mit p, q die Endpunkte der Curve, mit $Td\rho$ einen unendlich kleinen Bogen derselben, so muss

$$\delta \int_p^q Td\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 95)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\delta T d\rho &= S \frac{\delta d\rho}{U d\rho} \text{ nach } (e. 21) \\
&= S \frac{d\delta\rho}{U d\rho} = - S d\delta\rho \, U d\rho \\
&= - dS.\delta\rho \, U d\rho + S.\delta\rho d \, U d\rho \\
&= - dS.\delta\rho \, U d\rho + y S\nu\delta\rho \text{ nach (E. 94)} \\
&= - dS.\delta\rho \, U d\rho ,
\end{aligned}$$

daher

$$\delta \int_p^q Td\rho = - \left[S.\delta\rho \, U d\rho \right]_p^q = 0.$$

149. Bei einer Kugel erhalten wir für die Gleichung der geodätischen Linien

$$S\rho d\rho d^2\rho = 0.$$

Dieselben sind daher in Ebenen enthalten, welche durch den Mittelpunkt gehen, oder es sind grösste Kreise der Kugel.

Bei Kegelflächen gilt die Beziehung (D. 14)

$$S\nu\rho = 0.$$

Weil ausserdem aber stets

$$S\nu d\rho = 0,$$

so erhält man

$$\nu = x V\rho d\rho,$$

und für die geodätischen Linien auf Kegelflächen gilt daher

$$S.\rho d\rho \, V d\rho d^2\rho = 0 \text{ oder } S.\rho d \, U d\rho = 0 ,$$

oder schliesslich

$$0 = dS\rho \, U d\rho + T d\rho.$$

Hamilton hat schon gezeigt, dass die Integration dieser Gleichung leicht auf folgendem Wege gelingt. Multiplicirt man mit $2S\rho\, Ud\rho$, so entsteht

$$0 = d(S.\rho\, Ud\rho)^2 + 2S\rho d\rho,$$
$$= d[(S.\rho\, Ud\rho)^2 + \rho^2].$$

Somit ist für eine geodätische Linie

$$(S.\rho\, Ud\rho)^2 + \rho^2 = \text{constant},$$

und bei Anwendung der Formel

$$S^2 + NV = N$$

entsteht hieraus

$$TV\rho\, Ud\rho = \text{constant}.$$

Diese Gleichung spricht aus, dass $T\rho \sin \angle(\rho, Ud\rho)$, somit das Lot aus dem Scheitel des Kegels auf die Tangente an die geodätische Linie gefällt, constante Länge hat. Man ersieht hieraus unmittelbar, dass diese Curve, wenn der Kegel auf eine Ebene entwickelt wird, eine Gerade sein muss.

Bei der developpablen Fläche, welche wir im Art. 125 in Betracht zogen, können die geodätischen Linien auch mit Hülfe von Quaternionen gefunden werden, doch wollen wir behufs dieser Untersuchung jene Formeln in der einfachsten Gestalt nehmen. Wenn wir nämlich voraussetzen

$$\rho = fu$$

sei die Gleichung der Rückkehrkante der Fläche, so ist diese letztere durch

$$\rho = f + yf' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (E. 96)$$

dargestellt. Eine Curve auf der Fläche wird nun dadurch bestimmt, dass y als eine gewisse Funktion von u erscheint.

Ausserdem setzen wir voraus, dass als unabhängige Variable statt u die Grösse s eingeführt wird, sodass wir erhalten

$$Tf' = 1, \quad Sf'f'' = 0, \quad Sf'f''' = -f''^2.$$

Nach (E. 30) ist nun

$$\nu = f'f''.$$

Weiter folgt aus (E. 96)

$$d\rho = [f'(y' + 1) + yf'']ds \quad \ldots\ldots \quad (E. 97)$$
$$d^2\rho = [f'y'' + (2y' + 1)f'' + yf''']ds^2,$$

sodass die Gleichung der geodätischen Linie wird

$$y^2 f''^4 - f''^2[(2y'+1)(y'+1) - yy''] - y(1+y')Sf''f''' = 0,$$

oder, wenn

$$Tf'' = z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (E.\ 98)$$

gesetzt wird

$$y^2 z^3 + z[(2y'+1)(y'+1) - yy''] + y(1+y')z' = 0,$$

daher auch

$$z\left[1 + \left(\frac{1+y'}{yz}\right)^2\right] - \frac{d}{ds}\,\frac{1+y'}{yz} = 0,$$

$$z - \frac{d}{ds}\, arc\, tg\, \frac{1+y'}{yz} = 0,$$

und schliesslich nach (E. 98)

$$Tf''ds = d.arc\, tg\, \frac{1+y'}{yTf''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (E.\ 99)$$

Nun ist aber nach (E. 20) Tf'' der reciproke Wert des Hauptkrümmungsradius der Rückkehrkante, daher $Tf''ds$ der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Tangenten dieser Curve. Nach (E. 97) ist weiter

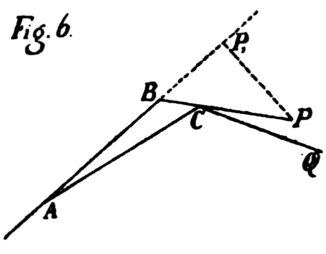
$$\rho' = \frac{1+y'}{yTf''}f' + Uf''.$$

Der Tangentialvektor ρ' der geodätischen Linie setzt sich daher aus zwei Segmenten zusammen, welche senkrecht zu einander sind, weil $Sf'f''$ verschwindet, und deren Längen

$$\frac{1+y'}{yTf''},\ 1$$

bezhw. sind. Es erhellt hieraus, dass wenn in der Figur 6 AB, AC zwei aufeinander folgende Tangenten der Rückkehrkante, BP, CQ zwei Tangenten der geodätischen Linie sind, die Relation stattfinden muss

Fig. 6.



$$\frac{1+y'}{yTf''} = tg\,\angle\, P_1PB.$$

Demnach kann die Gleichung (E. 99) in der nachstehenden Weise gedeutet werden

$$\angle\, BAC = d\,\angle\, P_1PB = d\,\angle\, P_1BP = \angle\, PCQ,$$

sodass die geodätische Linie, wenn die abwickelbare Fläche auf eine Ebene entwickelt wird, eine Gerade werden muss.

150. Wir wollen nun noch einige Sätze über geodätische Linien beweisen, zuerst nämlich, dass die Normalen längs einer solchen Linie einer bestimmten Ebene parallel sind, wenn die Tangenten derselben mit einer festen Geraden einen constanten Winkel bilden.

Nehmen wir an es sei

$$S\alpha\, Ud\rho = C,$$

so ergibt eine Differentiation

$$S.\alpha d\rho\, Vd\rho d^2\rho = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 100)$$

Aus der Gleichung der geodätischen Curven ergibt sich

$$d^2\rho = x\nu + yd\rho,$$

und indem dieser Wert in (E. 100) eingetragen wird

$$S\alpha\nu = 0,$$

wie zu beweisen war.

Wenn auf einer Fläche aus einem Punkte zwei geodätische Linien gezogen werden, welche rechtwinklig zu einander sind, so ist die Torsion für diese Curven, d. h. der reciproke Wert des Torsionsradius, gleich aber mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen.

Der Ausdruck für die Torsion kann nämlich in dem Falle, wo man es mit einer geodätischen Linie zu tun hat, sehr vereinfacht werden. Weil für dieselbe die Beziehung

$$d^2\rho = x\nu + yd\rho$$

gültig ist, so kann für die Binormale geschrieben werden

$$U\,Vd\rho d^2\rho = U.\nu d\rho$$

und der unendlich kleine Torsionswinkel wird

$$xTd\,U.\nu d\rho.$$

Nun ist aber

$$\frac{dU.\nu d\rho}{U.\nu d\rho} = V\frac{d\nu d\rho + \nu d^2\rho}{\nu d\rho}.$$

Der Zähler des unter dem Zeichen V stehenden Ausdrucks ist ein Vektor, wie sich durch Differentiation der Gleichung

$$S\nu d\rho = 0$$

ergibt. Somit kann man nun wie nachstehend transformiren

$$\frac{dU.\nu d\rho}{U.\nu d\rho} = \frac{V.V(d\nu d\rho + \nu d^2\rho)V\nu d\rho}{(\nu d\rho)^2},$$
$$= \frac{d\rho S\nu d\nu d\rho - \nu S\nu d\rho d^2\rho}{(\nu d\rho)^2},$$
$$= \frac{d\rho S\nu d\rho d\nu}{\nu^2 d\rho^2},$$

weil die Curve eine geodätische ist. Der Torsionswinkel wird nun

$$e_g = \frac{x S\nu d\rho d\nu}{T\nu^2 Td\rho},$$

und für die Torsion erhält man

$$\frac{1}{r_t} = \frac{e_g}{xTd\rho} = \frac{S\nu d\rho d\nu}{\nu^2 d\rho^2} = S.\nu^{-1}d\rho^{-1}d\nu. \quad . \quad . \quad (E. 101)$$

In dieser Formel ist nun unser Satz enthalten. Denn bringt man wieder die Relation (E. 101) in Anwendung, so ist nur noch zu zeigen

$$S.\nu Ud\rho\Phi Ud\rho + S.\nu Ud\rho_1\Phi Ud\rho_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (E. 102)$$

wenn

$$Sd\rho d\rho_1 \doteq 0.$$

Weil nun $U\nu$, $Ud\rho$, $Ud\rho_1$ unter sich rechtwinklig sind, so kann man schreiben

$$U\nu Ud\rho = \pm Ud\rho_1, \quad U\nu Ud\rho_1 = \mp Ud\rho,$$

und hiermit geht die Gleichung (E. 102) in eine Identität über.

Führt man noch den Begriff der geodätischen Torsion bei einer willkürlichen Curve ein, indem darunter verstanden wird die Torsion der geodätischen Linie, welche dieselbe berührt, so enthält die Gleichung (E. 101) noch den weiteren Satz: Längs einer Krümmungslinie auf jeder beliebigen Fläche hat die geodätische Torsion den Wert Null.

151. Längs einer geodätischen Curve auf einer Fläche zweiten Grades bleibt das Produkt pD, welches wir im Art. 142 schon betrachteten, constant. Dies zu beweisen haben wir nur zu zeigen, dass auch bei einer geodätischen Linie die Gleichung (E. 88) gültig bleibt. Fur dieselbe gilt zunächst in diesem Falle

$$S\Phi\rho d\rho d^2\rho = 0, \quad S\Phi\rho d\rho = 0.$$

Nach der ersten dieser Gleichungen kann nun gesetzt werden

$$d^2\rho = x\Phi\rho + yd\rho.$$

Die Werte von x und y können wieder bestimmt werden, indem nach einander mit $S.\Phi\rho$, $S.d\rho$ operirt wird. Dadurch entsteht sodann

$$d^2\rho = \Phi\rho \frac{S.d^2\rho\Phi\rho}{(\Phi\rho)^2} + d\rho \frac{S.d\rho d^2\rho}{d\rho^2},$$

und bei Beachtung der Relation (E. 89), welche auch hier gültig ist

$$d^2\rho = -\Phi\rho \frac{Sd\rho\Phi d\rho}{(\Phi\rho)^2} + d\rho \frac{S.d\rho d^2\rho}{d\rho^2}.$$

Hieraus kann nun (E. 88) unmittelbar erhalten werden, wenn man nur noch mit $S.\Phi d\rho$ operirt.

Die Gleichung

$$pD = \text{constant}$$

kann daher als ein erstes Integral der Gleichung

$$S.\Phi\rho d\rho d^2\rho = 0$$

betrachtet werden. Hamilton hat im zweiten Teile seiner »Elements" gezeigt, wie die Integration dieser Gleichung geschehen kann; wir wollen diesen Process hier kurz wiedergeben. Zu diesem Zwecke setzen wir, wie schon früher geschehen

$$T\rho' = 1.$$

Die Gleichung (E. 94) der geodätischen Linie erscheint sodann in der sehr einfachen Form

$$V\nu\rho'' = 0 \qquad \text{(E. 103)}$$

Somit ist

$$\rho'' = x\nu,$$

und weil allgemein gilt

$$S\nu\rho' = 0,$$

daher durch Differentiation

$$S\nu\rho'' + S\rho'\Phi\rho' = 0,$$

so kann der Wert von x bestimmt werden. Man findet dadurch den Ausdruck

$$\rho'' = -\nu^{-1}S\rho'\Phi\rho' \qquad \text{(E. 104)}$$

Ist nun

$$f\rho = S\rho\psi\rho = b,$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, so ist

$$fd\rho = Sd\rho\psi d\rho, \quad d.fd\rho = 2S.d^2\rho\psi d\rho.$$

Mit Rücksicht auf (E. 104) und darauf, dass die darin befindliche Funktion Φ nun mit ψ identisch ist, entsteht

$$d.fd\rho = -2S\nu^{-1}\psi d\rho\, Sd\rho\psi d\rho = -2fd\rho S\frac{\psi d\rho}{\psi\rho},$$

wo $d\rho$ statt $\rho' ds$, $d^2\rho$ statt $\rho'' ds^2$ steht. Oder wir können nun auch schreiben

$$(\psi\rho)^2 d.fd\rho + 2fd\rho S\psi\rho\psi d\rho = 0,$$

eine Gleichung, welche unmittelbar integrirt werden kann, wodurch sich ergibt

$$(\psi\rho)^2 fd\rho = \text{constant},$$

oder schliesslich

$$N\psi\rho Sd\rho\psi d\rho = \text{constant}.$$

Diese Gleichung stimmt der Voraussetzung $T\rho' = 1$ zufolge ganz mit (E. 87) überein.

152. Der Vektor $d^2\rho$ kann stets nach den drei unter sich rechtwinkligen Vektoren ν, $d\rho$, $\nu d\rho$ zerlegt werden. Nach der bekannten Formel erhalten wir sodann — indem beachtet wird, dass wegen der Gleichung

$$S\nu d\rho = 0$$

auch die Relationen

$$\nu d\rho = -d\rho.\nu, \quad S\nu d^2\rho = -Sd\nu d\rho$$

stattfinden —

$$d^2\rho = -\nu^{-1}Sd\nu d\rho + d\rho^{-1}Sd\rho d^2\rho - \nu^{-1}d\rho^{-1}S.\nu d\rho d^2\rho. \quad \text{(E. 105)}$$

Für eine geodätische Linie auf der Fläche verschwindet das dritte Glied dieses Ausdrucks; somit ist, wenn für dieselbe der Wert von $d^2\rho$ mit $\delta^2\rho$ bezeichnet wird,

$$\delta^2\rho = -\nu^{-1}Sd\nu d\rho + d\rho^{-1}Sd\rho\delta^2\rho. \;.\;.\;.\;. \quad \text{(E. 106)}$$

Nach Liouville bezeichnet man den Winkel zwischen der geodätischen Tangente in einem Punkte einer Curve und dem nächstfolgenden Bogenelemente derselben als **geodätischen Contingenzwinkel** der Curve in dem betreffenden Punkte. Wenn wir annehmen, dass die Werte von $d\rho$ in (E. 105), (E. 106) übereinstimmen, so gelten diese Gleichungen für eine willkürliche Curve und deren geodätische Tangente. Der geodätische Contingenzwinkel e_g ist sodann derjenige zwischen den Vektoren

$$d\rho + x\delta^2\rho, \quad d\rho + xd^2\rho.$$

Man erhält somit

$$e_g = \frac{TV(d\rho + x\delta^2\rho)(d\rho + xd^2\rho)}{Td\rho^2},$$

$$=\frac{\varkappa TV(\delta^2\rho - d^2\rho)d\rho}{Td\rho^2}$$

$$=\frac{\varkappa S\nu d\rho d^2\rho}{T\nu Td\rho^2} \text{ nach (E. 105), (E. 106),}$$

und der **Radius der geodätischen Krümmung** der Curve ist

$$R_g = \frac{\varkappa Td\rho}{e_g} = \frac{T\nu Td\rho^3}{S\nu d\rho d^2\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(E. 107)}$$

153. Wenn wir im allgemeinen einen Ausdruck suchen für die Änderung, welche der Winkel zwischen der Binormale einer Curve auf einer beliebigen Fläche und der Normale zur Fläche erleidet, so erhalten wir

$$\varkappa d\angle\nu Vd\rho d^2\rho.$$

Diesen Ausdruck nach (e. 28) zu transformiren, bemerken wir, dass

$$UV.\nu Vd\rho d^2\rho = \pm\, Ud\rho \text{ nach } (c.\, 40).$$

Nun ist

$$d\angle\nu Vd\rho d^2\rho = S\frac{d\nu\, Vd\rho d^2\rho + \nu\, Vd\rho d^3\rho}{\nu\, Vd\rho d^2\rho . Ud\rho},$$

$$= -S\frac{d\nu}{\nu Ud\rho} - S\frac{\nu Vd\rho d^3\rho}{\nu Ud\rho\, Vd\rho d^2\rho},$$

$$= \frac{S\nu d\rho d\nu}{T\nu^2 Td\rho} + S.Ud\rho\frac{Vd\rho d^3\rho}{Vd\rho d^2\rho},$$

$$= \frac{S\nu d\rho d\nu}{T\nu^2 Td\rho} + \frac{Td\rho Sd\rho d^2\rho d^3\rho}{NVd\rho d^2\rho}.$$

Nach (E. 35) kann hierfür nun aber auch geschrieben werden

$$d\angle\nu Vd\rho d^2\rho = \frac{S\nu d\rho d\nu}{T\nu^2 Td\rho} - \frac{Td\rho}{R_t} \quad \ldots\ldots \text{(E. 108)}$$

wo R_t den Torsionsradius bedeutet.

In dieser Formel liegt nun der bekannte Lancret'sche **Satz** ausgesprochen, nach welchem bei einer Krümmungslinie der Torsionswinkel $\varkappa Td\rho$ in jedem Punkte dem Differential des Winkels zwischen der Oskulationsebene der Curve und der Normale zur Fläche gleich kommt; denn für eine Krümmungslinie verschwindet das erste Glied der zweiten Seite von (E. 108).

Beachtet man noch die Gleichung (E. 101), so kann statt (E. 108) geschrieben werden

$$d \angle \nu V d\rho d^2\rho = T d\rho \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{R_t}\right)$$

Im allgemeinen ist daher bei jeder Curve die Differenz des Torsionswinkels und des geodätischen Torsionswinkels in einem Punkte dem Differential des Winkels zwischen der Oskulationsebene der Curve und der Normale zur Fläche gleich.

154. Die von Aoust und Gilbert eingeführte Grösse, welche mit dem Namen Deviation oder Abweichung bezeichnet worden ist, findet auch leicht einen Ausdruck in der Theorie der Quaternionen. Denkt man sich nämlich die Fläche dadurch gegeben, dass ρ als eine Funktion der beiden Skalare u, v dargestellt ist, so nennt Gilbert die Abweichung der U-Curve in Bezug auf die V-Curve die Grösse, welche man erhält, indem der unendlich kleine Winkel zwischen zwei Tangenten in benachbarten Punkten einer V-Curve, an die durch diese Punkte gehenden U-Curven gelegt, durch die Länge des zwischen jenen Punkten enthaltenen Bogenelementes dividirt wird.

Wenn im Einklang mit Art. 27 der Theorie $xTd_u\rho$ die Länge des Elements der V-Curve ist, so kann für jenen unendlich kleinen Winkel unmittelbar der Ausdruck hingeschrieben werden

$$\begin{aligned} e_u &= xTd_u\, Ud_v\rho \\ &= x\frac{TVd_v\rho d^2_{uv}\rho}{Nd_v\rho} \quad \text{nach } (e.\ 23) \end{aligned}$$

und für die Deviation erhält man somit

$$\Delta_u = \frac{TVd_v\rho d^2_{uv}\rho}{Nd_v\rho Td_u\rho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E.\ 109)$$

Als die Richtung des Vektors der Deviation wird diejenige des Elementes angenommen, welches die Endpunkte zweier zu jenen Tangenten parallel gezogenen Einheitsvektoren verbindet, somit in Zeichen diejenige des Vektors

$$d_u Ud_v\rho \quad \text{oder} \quad Ud_v\rho\, Vd_v\rho d^2_{uv}\rho,$$

sodass der Gesamtausdruck für den Vektor der Abweichung ist

$$\frac{d_v\rho\, Vd_v\rho d^2_{uv}\rho}{Nd_v\rho Td_u\rho d_v\rho}.$$

Die Projektion der Abweichung auf die Normale zur Fläche wird die normale Abweichung der U-Curve in Bezug auf die V-Curve genannt. Für diese Grösse findet man leicht

$$\Delta_u = \frac{\nu^{-1}S.\nu d_v\rho\, V d_v\rho d^2_{uv}\rho}{N d_v\rho T d_u\rho d_v\rho},$$
$$= -\frac{\nu^{-1}S\nu d^2_{uv}\rho}{T d_u\rho d_v\rho} = \frac{U\nu S.\,U\nu d^2_{uv}\rho}{T d_u\rho d_v\rho},$$

woraus der Satz entspringt: Die normale Abweichung in jedem Punkte der Curve ist für jedes Curvensystem in Bezug auf das andere die nämliche. Denn der Ausdruck für Δ_u ändert seinen Wert nicht, wenn u mit v vertauscht wird.

Führen wir nun die Voraussetzung ein, dass die U- und V-Curven überall rechtwinklig zu einander sind, d. h.

$$S.d_u\rho d_v\rho = 0\,,\quad U\nu\, U d_u\rho = U d_v\rho\,,$$

so ergibt eine Differentiation der ersten dieser Gleichungen nach u

$$S.d_v\rho d^2_{uu}\rho = -\,S.d_u\rho d^2_{uv}\rho \;\ldots\ldots \text{(E. 110)}$$

Der Ausdruck für Δ_u kann nun in eine andere Gestalt gebracht werden. Denn bei unsrer Voraussetzung ist

$$V.d_v\rho d^2_{uv}\rho = T d_v\rho\, V.\,U\nu\, U d_u\rho d^2_{uv}\rho$$
$$= \frac{T d_v\rho}{T\nu T d_u\rho}\left(\nu S d_u\rho d^2_{uv}\rho - d_u\rho S\nu d^2_{uv}\rho\right)$$

und man erhält nun aus (E. 109)

$$\Delta^2_u = \frac{S^2 d_u\rho d^2_{uv}\rho}{N^2 d_u\rho N d_v\rho} + \frac{S^2.\nu d^2_{uv}\rho}{N\nu N d_u\rho d_v\rho}. \;\ldots\ldots \text{(E. 111)}$$

Bezeichnen wir noch die Radien der geodätischen Krümmung und Torsion für die V-Curve mit R_u, r_u, so ist nach (E. 107)

$$\frac{1}{R_u} = \frac{S.\,U\nu(U d_u\rho) d^2_{uu}\rho}{N d_u\rho}$$
$$= \frac{S d_v\rho d^2_{uu}\rho}{N d_u\rho T d_v\rho} = -\frac{S d_u\rho d^2_{uv}\rho}{N d_u\rho T d_v\rho} \text{ nach (E. 110)}$$

und nach (E. 101)

$$\frac{1}{r_u} = \frac{S.\,U\nu\, U d_u\rho d_u\nu}{T\nu T d_u\rho} = \frac{S d_v\rho d_u\nu}{T\nu\, T d_u\rho d_v\rho}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks kann leicht umgestaltet werden; denn aus

$$S\nu d_v\rho = 0$$

folgt

$$S d_u\nu d_v\rho = -\,S\nu d^2_{uv}\rho\,,$$

somit wird

$$\frac{1}{r_u} = -\frac{S.\nu d^2_{uv}\rho}{T\nu\, Td_u\rho d_v\rho}.$$

Aus der Gleichung (E. 111) schliesst man nun unmittelbar, dass die Relation

$$\Delta^2_u = \frac{1}{R^2_u} + \frac{1}{r^2_u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 112)}$$

in dem vorliegenden Falle gültig ist.

Wir können hier nicht näher auf diese Betrachtungen eingehen, doch hat sich allerdings die Anwendbarkeit der Quaternionen auch auf diesem Gebiet genügend ergeben.

155. Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Herleitung der Formel für die totale Krümmung und das Mass der Krümmung eines Flächenteils nach Gauss. Sind nämlich

$$\rho, \ \rho + xd\rho, \ \rho + y\delta\rho$$

drei einander unendlich benachbarte Punkte der Fläche, so ist der Inhalt des von denselben gebildeten Dreiecks bestimmt durch

$$2\Delta = xyTVd\rho\delta\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 113)}$$

Die Normalen in diesen Punkten können nun mit

$$\nu, \ \nu + xd\nu, \ \nu + y\delta\nu \ \text{ oder } \ \nu, \ \nu + x\phi d\rho, \ \nu + y\phi\delta\rho$$

bezeichnet werden und wenn wir aus einem Punkte drei Einheitsvektoren parallel zu diesen Normalen ziehen, so sind dieselben darstellbar durch

$$U\nu, \ U\nu + x(d\nu T\nu^{-1} - U\nu S\nu^{-1}d\nu), \ \text{u.s.w.}$$

oder durch

$$U\nu, \ U\nu + xU\nu V\nu^{-1}d\nu, \ U\nu + yU\nu V\nu^{-1}\delta\nu,$$

so weit nur unendlich kleine Grössen erster Ordnung in Betracht gezogen werden.

Der Inhalt des durch die Endpunkte dieser Einheitsvektoren gebildeten Dreiecks kann daher aus

$$2\Delta' = xyTV.V\nu^{-1}d\nu\, V\nu^{-1}\delta\nu$$

bestimmt werden und eine kleine Transformation ergibt

$$2\Delta' = xyT\nu^{-1}S\nu^{-1}d\nu\delta\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E. 114)}$$

Aus diesem Ausdruck für die totale Krümmung des Flächenteiles erhält man das Mass der Krümmung durch Division mit (E. 110). Dasselbe ist daher

$$K = \frac{\Delta'}{\Delta} = \pm \frac{T\nu^{-1} S\nu^{-1} d\nu\delta\nu}{TVd\rho\delta\rho},$$

ein Ausdruck, welcher leicht transformirt werden kann. Es ist nämlich

$$S.\nu d\nu\delta\nu = S\nu\phi d\rho\phi\delta\rho$$
$$= xS.\nu\phi^{-1} Vd\rho\delta\rho \text{ nach } (f.\,32)$$

bei der gewöhnlichen Bedeutung von x für die Funktion ϕ. Also weiter

$$S\nu d\nu\delta\nu = \pm\, xTVd\rho\delta\rho S.\,U\nu\phi^{-1}\nu$$

weil

$$U\nu = \pm\, UVd\rho\delta\rho,$$

sodass man schliesslich erhält

$$K = \pm\, xS.\nu^{-1}\phi^{-1}\nu^{-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 115)$$

Aus der Vergleichung von (E. 115) mit (E. 67) erhält man sodann den bekannten Satz

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{E. } 116)$$

Bei einer Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho\psi\rho = b$$

ist

$$\nu = \psi\rho, \quad \phi = \psi,$$

somit

$$K = x\frac{S\rho\psi\rho}{(\psi\rho)^4} = \frac{bx}{(\psi\rho)^4}.$$

Weil aber die Länge des Lotes, aus dem Mittelpunkte der Fläche auf die Tangentenebene im Punkte ρ gefällt, durch

$$\frac{b}{T\psi\rho}$$

dargestellt wird, so kann man sagen, dass das Mass der Krümmung in den verschiedenen Punkten einer Fläche zweiter Ordnung der vierten Potenz jenes Lotes proportional ist.

THEORIE DER GERADLINIGEN STRAHLENSYSTEME.

156. Diese Theorie, welche zuerst von HAMILTON im Jahre 1830 in einer im sechzehnten Bande der »Transactions of the R. Ir. Acad.” erschienenen Abhandlung entwickelt ist — jedoch, wie aus der Jahreszahl schon hervorgeht, ohne Anwendung der Quaternionen —, wollen wir im Folgenden mit Hülfe dieses Kalküls auseinandersetzen. Es wird sich dabei die besondere Eleganz dieser Methode, welche übrigens auch schon in den beiden vorhergehenden Abschnitten zu Tage getreten ist, klar herausstellen.

Ein Strahl des Systems sei bestimmt durch einen Punkt σ desselben und einen Einheitsvektor τ in seiner Richtung. Das Gesetz, welches die Strahlen zum System vereinigt, kann dadurch gegeben werden, dass σ und τ als Funktionen zweier beliebigen Skalarveränderlichen u, v gedacht werden.

Diese Abhängigkeit kann jedoch noch auf eine ganz andere und, mit Rücksicht auf die im Quaternionenkalkül angewandten Operatoren, weit zweckmässigere Weise dargestellt werden. Wenn wir nämlich im allgemeinen τ als Funktion von σ betrachten, so ist einleuchtend, dass man die Abhängigkeit stets durch eine Relation von der Form

$$\tau = \alpha_1 F_1\sigma + \alpha_2 F_2\sigma + \alpha_3 F_3\sigma. \quad \ldots\ldots \quad (\text{F. } 1)$$

ausdrücken kann, wo α_1, α_2, α_3 beliebige aber feste Vektoren,

F_1, F_2, F_3 willkürliche Skalarfunktionen von σ bedeuten. Eine solche Beziehung wollen wir im Folgenden gegeben voraussetzen.

Der Winkel von irgend zwei Strahlen in den Richtungen τ, τ_1 ist sodann bestimmt durch

$$\theta = \pi - \angle \tau\tau_1 \text{ oder } \sin\theta = TV\tau\tau_1 \quad \text{(F. 2)}$$

Die kürzeste Entfernung dieser Strahlen, welche die Punkte σ, σ_1 enthalten, ist nach (B. 53)

$$\lambda = (V\tau\tau_1)^{-1}S.(\sigma - \sigma_1)\tau\tau_1 \quad \text{(F. 3)}$$

und der Fusspunkt derselben auf dem ersten Strahle nach (B. 52)

$$\varkappa = \sigma - \tau S.(\sigma - \sigma_1)\tau_1(V\tau\tau_1)^{-1} \quad \text{(F. 4)}$$

157. Es werde nun die Voraussetzung gemacht, $\sigma_1 - \sigma$ und $\tau_1 - \tau$ seien unendlich kleine Vektoren. Wir setzen sodann

$$\sigma_1 - \sigma = d\sigma, \; \tau_1 - \tau = d\tau,$$

mit der Bedingung, dass $Td\sigma$ und $Td\tau$ verschwindend klein sind. Den durch σ, τ bestimmten Strahl wollen wir stets den ersten Strahl nennen.

Man erhält zunächst

$$S\tau d\tau = 0 \quad \text{(F. 5)}$$

und die Formeln (F. 3), (F. 4) ergeben

$$\lambda = - d\tau^{-1}\tau S\tau d\sigma d\tau \quad \text{(F. 6)}$$

$$\varkappa = \sigma - \tau S d\sigma d\tau^{-1} \quad \text{(F. 7)}$$

wenn unendlich kleine Grössen von der zweiten Ordnung vernachlässigt werden.

Nun ergibt aber die Formel (F. 1)

$$\begin{aligned} d\tau &= \alpha_1 dF_1\sigma + \alpha_2 dF_2\sigma + \alpha_3 dF_3\sigma \\ &= \alpha_1 S\nu_1 d\sigma + \alpha_2 S\nu_2 d\sigma + \alpha_3 S\nu_3 d\sigma \text{ nach Art. 91}, \end{aligned}$$

sodass $d\tau$ als eine lineare Vektorfunktion von $d\sigma$ erscheint, welche wir mit φ^{-1} bezeichnen wollen. Dieselbe ist aber nicht selbstconjugirt, wie man unmittelbar ersieht. Setzen wir demnach

$$d\tau = \varphi^{-1}d\sigma, \; d\sigma = \varphi d\tau \quad \text{(F. 8)}$$

so erscheinen die Gleichungen (F. 6), (F. 7) nun weiter in der Form

$$\lambda = - \tau d\tau^{-1} S\tau d\tau \varphi d\tau$$

$$\varkappa = \sigma + \tau S.Ud\tau\varphi Ud\tau.$$

Der Kürze halber können wir nun noch

$$Ud\tau = \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F. 9)$$

setzen, wodurch die vorhergehenden Gleichungen übergehen in

$$S\tau\omega = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F. 10)$$

$$\lambda = \tau\omega T d\tau S\tau\omega\Phi\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (F. 11)$$

$$\varkappa = \sigma + \tau S\omega\Phi\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (F. 12)$$

158. Die Gleichung (F. 6) stellt bei einem bestimmten Werte von $d\tau$ den Fusspunkt der kürzesten Entfernung von zwei bestimmten, einander unendlich benachbarten Strahlen auf dem einen derselben dar. Indem man aber jener Grösse alle möglichen Werte erteilt, erhält man auf dem einen Strahl sämtliche Fusspunkte der kürzesten Entfernungen von allen ihm sehr nahe liegenden Strahlen des Systems. Es lässt sich nun fragen, ob $T(\varkappa - \sigma)$ einen Maximum- oder Minimumwert erreichen kann, d. h. ob jene Fusspunkte über dem ganzen ersten Strahle verteilt sind, oder nur auf einer bestimmten Strecke desselben vorkommen können.

Nach (F. 12) ist

$$T(\varkappa - \sigma) = S\omega\Phi\omega.$$

Im Artikel 161 der Theorie ist nun aber gezeigt, dass man stets schreiben kann

$$\Phi\omega = \Phi_0\omega + V\delta\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (F. 13)$$

wo Φ_0 eine selbstconjugirte lineare Vektorfunktion und

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3) \quad \ldots\ldots \quad (F. 14)$$

ist. Deshalb erhält man

$$S\omega\Phi\omega = S\omega\Phi_0\omega = T(\varkappa - \sigma) \quad \ldots\ldots \quad (F. 15)$$

Es folgt hieraus nach (C. 42), dass $T(\varkappa - \sigma)$ der reciproke Wert ist von dem Quadrate des in der Richtung ω gezogenen Halbmessers der Fläche zweiter Ordnung,

$$S\rho\Phi_0\rho = 1.$$

Die Frage, wann $S\omega\Phi_0\omega$ einen Maximumwert erreichen wird, wobei die Bedingungen gültig sein müssen,

$$S\tau\omega = 0, \quad T\omega = 1,$$

fällt demnach mit derjenigen zusammen, die Achsen des Durchschnittes der Fläche zweiter Ordnung

$$S\rho\Phi_0\rho = 1$$

mit der Ebene

$$S\tau\rho = 0,$$

d. h. mit einer Diametralebene, zu bestimmen. Im Art. 74 ist diese Aufgabe ausführlich diskutirt und wir können die dort gewonnenen Resultate hier unmittelbar benutzen.

Setzen wir

$$T(\varkappa - \sigma) = r,$$

so ist die Länge der Achsen des Kegelschnittes nach dem Vorhergehenden $\frac{1}{\sqrt{r}}$ und man hat nun in (C. 89), (C. 90) b durch 1, β durch τ und ρ^{-2} durch $-r$ zu ersetzen. Man erhält sodann für r die quadratische Gleichung

$$S\tau(\Phi_0 + r)^{-1}\tau = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(F. 16)}$$

und die zugehörigen Werte von ω sind durch die Gleichung bestimmt

$$\omega = U(\Phi_0 + r)^{-1}\tau \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(F. 17)}$$

Es ergibt sich hierdurch somit, dass es stets zwei Richtungen ω_1 und ω_2 für $Ud\tau$ gibt, welche senkrecht zu einander sind und für die der Fusspunkt der kürzesten Entfernung eine Grenzlage erreicht. Hierbei denken wir uns ω_1, ω_2 derart gewählt, dass die Gleichung stattfindet

$$\tau = \omega_1\omega_2,$$

was wegen der Rechtwinkligkeit des Systems ω_1, ω_2, τ möglich ist. Die diesen Werten entsprechenden kürzesten Entfernungen, welche zu $\tau\omega$ parallel sind, müssen sodann aber ebenfalls senkrecht zu einander sein; denn es ist

$$S(\tau\omega_1)(\tau\omega_2) = -S\tau\omega_1\omega_2\tau = S\omega_1\omega_2 = 0.$$

Die Hauptebenen des Strahles sind normal zu jenen kürzesten Entfernungen, d. h. zu $\tau\omega_1$, $\tau\omega_2$ oder zu ω_2, ω_1 und die Gleichungen derselben können daher unmittelbar hingeschrieben werden

$$S(\rho - \sigma)\omega_2 = 0, \quad S(\rho - \sigma)\omega_1 = 0 \,.\,.\,.\,.\,. \quad \text{(F. 18)}$$

Bekanntlich heissen die den Werten ω_1, ω_2 entsprechenden Fusspunkte die Grenzpunkte des ersten Strahles; die Entfernungen von dem Punkte σ des Strahles sind die Wurzeln der Gleichung (F. 16). Nach dem Vorhergehenden sind diese Entfernungen aber auch

$$r_1 = S\omega_1\Phi_0\omega_1,\ r_2 = S\omega_2\Phi_0\omega_2 \ \ldots\ldots \quad \text{(F. 19)}$$

Ist nun r die Entfernung des Fusspunktes für einen beliebigen Strahl des Systems von dem Punkte σ und x der Winkel zwischen dem kürzesten Abstande, welcher diesem Strahle entspricht und demjenigen, welcher in dem Grenzpunkte r_1 sich befindet — ein Winkel, den wir in der Richtung zählen, worin die Drehung um einen rechten Winkel von ω_1 nach ω_2 erfolgt —, so lässt sich leicht die Beziehung

$$r = r_1 \cos^2 x + r_2 \sin^2 x \ \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 20)}$$

zeigen.

Wenn nämlich dem Werte r die Richtung ω zugehört, so kann man, weil ω, ω_1, ω_2 sämtlich senkrecht zu τ, daher complanar sind, schreiben

$$\omega = -\,\omega_1 S\omega_1\omega - \omega_2 S\omega_2\omega \ \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 21)}$$

oder

$$= -\,\omega_1 S(\tau\omega_1)(\tau\omega) - \omega_2 S(\tau\omega_2)(\tau\omega)$$

$$\omega = \omega_1 \cos x + \omega_2 \sin x.$$

Hieraus folgt nun leicht, weil $S\omega_1\Phi_0\omega_2$ verschwindet,

$$S\omega\Phi_0\omega = \cos^2 x S\omega_1\Phi_0\omega_1 + \sin^2 x S\omega_2\Phi_0\omega_2,$$

und mit Rücksicht auf (F. 19) erfolgt sodann unmittelbar (F. 20).

159. Fragen wir nun weiter, wann der erste Strahl von einem der unendlich benachbarten Strahlen geschnitten wird oder, wie wir auch sagen können, bestimmen wir nun die Brennpunkte des Strahles.

Es muss sodann die kürzeste Entfernung (F. 11) verschwinden, somit

$$S\tau\omega\Phi\omega = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 22)}$$

sein. Bestimmt man aus dieser Gleichung mit (F. 10), oder

$$S\tau\omega = 0,\ \text{und}\ \omega^2 = -1,$$

die Werte von ω, so ist das Problem gelöst. Diese Gleichungen sind von derselben Form wie (C. 86), (C. 87). Nur ist hier die Funktion Φ nicht selbstconjugirt und eine Relation von der Form (C. 81) ist nicht vorhanden. Wir müssen deshalb um die Werte von ω zu bestimmen, hier einem ganz anderen Weg folgen als dem im Art. 74 erörterten.

Setzen wir gemäss (F. 22) wieder

$$\Phi\omega = x\tau + y\omega \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 23)}$$

so ergeben sich durch Operation mit $S.\omega_1$, $S.\omega_2$ Gleichungen, welche mit Rücksicht auf (F. 21), (F. 19) in die Form

$$\left.\begin{aligned}(y+r_1)S\omega_1\omega &= S\omega_1\omega_2\delta S\omega_2\omega \\ (y+r_2)S\omega_2\omega &= -S\omega_1\omega_2\delta S\omega_1\omega\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(F. 24)}$$

sich bringen lassen. Hieraus können $S\omega_1\omega$, $S\omega_2\omega$ eliminirt werden und, wenn wir beachten, dass

$$S\omega_1\omega_2\delta = S\tau\delta,$$

so entsteht in dieser Weise für y die Beziehung

$$(y+r_1)(y+r_2)+S^2\tau\delta=0 \quad \ldots\ldots \text{(F. 25)}$$

Mit den beiden hieraus sich ergebenden Werten von y erhält man nun auch zwei Werte von ω, nämlich

$$\omega = U(\Phi-y)^{-1}\tau \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F. 26)}$$

und daher auch zwei Brennpunkte.

Die Entfernungen derselben von dem Punkte σ lassen sich wieder auf sehr einfache Weise darstellen. Für dieselbe gilt nämlich die Gleichung

$$r = S\omega\Phi_0\omega.$$

Nun folgt aus (F. 23) durch Operation mit $S.\omega$

$$-y = S.\omega\Phi_0\omega, \text{ somit } y = -r.$$

Die Werte r für die Brennpunkte werden daher unmittelbar aus der Gleichung

$$(r-r_1)(r-r_2)+S^2\tau\delta=0 \quad \ldots\ldots \text{(F. 27)}$$

welche aus (F. 25) hervorgeht, bestimmt werden können und die diesen Brennpunkten entsprechenden Werte von ω genügen der Gleichung

$$\omega = U(\Phi+r)^{-1}\tau \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F. 28)}$$

welche mit (F. 26) identisch ist.

In (F. 27) ist nun aber ein bekannter Satz enthalten. Sind nämlich r', r'' die den Brennpunkten entsprechenden Werte von r, so folgt aus jener Relation

$$r'+r''=r_1+r_2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F. 29)}$$

oder in Worten: die Mitte der Strecke zwischen den Brennpunkten fällt mit derjenigen der Strecke zwischen den Grenzpunkten zusammen.

Man ersieht nun auch leicht, dass die Grössen r', r'' unabhängig von r_1, r_2 aus

$$S\tau(\Phi+r)^{-1}\tau=0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F. 30)}$$

bestimmt werden können, einer Gleichung, welche aus $S\tau\omega = 0$ und (F. 28) hervorgeht.

160. Dem Vorhergehenden entsprechend wollen wir die den Brennpunkten zugehörigen Werte von ω mit ω', ω'' bezeichnen.

Die Brennpunkte sind nur reell, solange

$$(r_1 - r_2)^2 > 4S^2\tau\delta,$$

das heisst, so lange die halbe Distanz zwischen den Grenzpunkten grösser ist als die Projection des Vektors δ auf den ersten Strahl. Findet Gleichheit zwischen diesen Linien statt, ist somit

$$(r_1 - r_2)^2 = 4S^2\tau\delta,$$

so fallen die beiden Brennpunkte zusammen.

Die Brennpunkte sind schliesslich mit den beiden Grenzpunkten identisch, wenn

$$S\tau\delta = 0.$$

Der Mittelpunkt des Strahles kann leicht dargestellt werden. Nach dem Vorhergehenden erhält man für denselben

$$\mu = \sigma + \frac{r_1 + r_2}{2}\tau,$$

und der Wert von $r_1 + r_2$ ist unmittelbar der Gleichung (F. 16) zu entnehmen, welche in entwickelter Form geschrieben für den jetzigen Fall lautet,

$$xS\tau\Phi_0^{-1}\tau - (x_2 + S\tau\Phi_0\tau)r - r^2 = 0 \quad \ldots \text{(F. 31)}$$

Somit ist

$$\mu = \sigma - \tfrac{1}{2}\tau(x_2 + S\tau\Phi_0\tau) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(F. 32)}$$

Die Strecke zwischen den Grenzpunkten hat die Länge $r_1 - r_2$, diejenige zwischen den Brennpunkten ist $r' - r''$. Nun ist jedoch

$$\begin{aligned}(r' - r'')^2 &= (r' + r'')^2 - 4r'r'' \\ &= (r_1 + r_2)^2 - 4(r_1r_2 + S^2\tau\delta) \text{ nach (F. 26)} \\ &= (r_1 - r_2)^2 - 4S^2\tau\delta,\end{aligned}$$

somit ist stets

$$r_1 - r_2 > r' - r'',$$

oder der Mittelpunkt des Strahles liegt den Brennpunkten näher als den Grenzpunkten, es sei denn, dass diese Punktepaare zusammenfallen.

161. Es ist nun auch weiter leicht die Fokalebenen des Strahles anzugeben. Dieselben enthalten nämlich die den ersten Strahl durchschneidenden Strahlen, somit nach (F. 9) die Vektoren ω', ω'' und ihre Gleichungen sind daher

$$S(\rho - \sigma)\tau\omega' = 0\,, \quad S(\rho - \sigma)\tau\omega'' = 0.$$

Die gegenseitige Beziehung, welche zwischen den Fokalebenen und den Hauptebenen besteht, tritt in merkwürdiger Weise hervor, indem man die Operatoren vergleicht, wodurch die Vektoren ω', ω'', ω_1, ω_2, welche in jenen Ebenen enthalten sind, aus dem Vektor τ erhalten werden; wir führen dieselben hier nochmals vor

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= U(\Phi_0 + r_1)^{-1}\tau, \\ \omega' &= U(\Phi + r')^{-1}\tau, \ \text{u.s.w.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\text{F. } 33)$$

Man kann leicht den Satz beweisen, dass die Ebene, welche den Winkel zwischen den Fokalebenen halbirt, mit derjenigen, welche die nämliche Eigenschaft in Bezug auf den Winkel zwischen den Hauptebenen hat, zusammenfällt. Wendet man nämlich die erste der Gleichungen (F. 24) auf die beiden Vektoren ω', ω'' an, so erhält man durch Division der dadurch sich ergebenden Relationen

$$\frac{r_1 - r'}{S\tau\delta}\,\frac{S\omega_1\omega'}{S\omega_2\omega''} = \frac{S\tau\delta}{r_1 - r''}\,\frac{S\omega_2\omega'}{S\omega_1\omega''},$$

oder

$$\frac{S\omega_1\omega'}{S\omega_2\omega''} = \frac{S\omega_2\omega'}{S\omega_1\omega''},$$

wenn man auf die Werte von r', r'' aus (F. 27) Rücksicht nimmt. Weil aber jeder dieser Brüche dem folgenden gleich ist

$$\frac{\sqrt{S^2\omega_1\omega' + S^2\omega_2\omega'}}{\sqrt{S^2\omega_2\omega'' + S^2\omega_1\omega''}},$$

dessen Wert gleich Eins ist, so erhält man

$$S\omega_1\omega' = S\omega_2\omega'',$$

und hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Aus den Gleichungen (F. 24) können nun noch weitere Relationen hergeleitet werden, welche zwischen den Entfernungen der Brennpunkte und Grenzpunkte und den durch die Fokal- und Hauptebenen eingeschlossenen Winkeln bestehen. Es folgt aus denselben nämlich, wenn man sie auf den Vektor ω' anwendet und die erhaltenen Resultate dividirt,

$$\frac{S^2\omega_1\omega'}{S^2\omega_2\omega'} = -\frac{r_2 - r'}{r_1 - r'} = tg^2 B_1$$

wenn B_1 der Winkel ist zwischen ω', ω_2; somit

$$cos B_1 = \sqrt{\frac{r_1 - r'}{r_1 - r_2}},\quad sin B_1 = \sqrt{\frac{r' - r_2}{r_1 - r_2}}.$$

In derselben Weise erhält man, wenn B_2 den Winkel zwischen ω'', ω_2 bedeutet

$$cos B_2 = \sqrt{\frac{r_1 - r''}{r_1 - r_2}},\quad sin B_2 = \sqrt{\frac{r'' - r_2}{r_1 - r_2}},$$

und, wenn noch der Winkel zwischen ω', ω'' oder zwischen den Fokalebenen mit W_0 bezeichnet wird,

$$sin\, W_0 = sin(B_2 - B_1) = \frac{r' - r''}{r_1 - r_2},\quad cos\, W_0 = \frac{2S\tau\delta}{r_1 - r_2}.\;.\;(F. 34)$$

162. Wir wollen nun weiter den Ort der Grenzpunkte und der Brennpunkte sämtlicher Strahlen bestimmen. Wählen wir zum Beispiel den Ort der ersteren, so hat man die Gleichungen

$$\begin{gathered} \varkappa = \sigma + r\tau, \\ S.\tau(\Phi_0 + r)^{-1}\tau = 0, \\ \tau = \alpha_1 F_1\sigma + \alpha_2 F_2\sigma + \alpha_3 F_3\sigma. \end{gathered}$$

Zwischen denselben und einer anderen, welche den Ort des Punktes σ bestimmt, müssen nun die Grössen r, σ, τ eliminirt werden. Diese letzte Gleichung kann aber nicht willkürlich gewählt werden; weil wir nämlich die Annahme gemacht haben $T\tau = 1$, so folgt aus (F. 1)

$$(\alpha_1 F_1\sigma + \alpha_2 F_2\sigma + \alpha_3 F_3\sigma)^2 = -1\;.\;.\;.\;.\;.\;(F. 35)$$

Diese Fläche ist somit als der Ort des Punktes σ zu betrachten.

Aus der Relation

$$S\tau d\tau = 0$$

folgt die andere

$$S\tau\Phi^{-1}d\sigma = 0 \text{ oder } Sd\sigma(\Phi^{-1})'\tau = 0.$$

Demnach fällt der Vektor $(\Phi^{-1})'\tau$ mit der Normale zur Fläche (F. 35) zusammen.

In derselben Weise erhält man die Gleichung der Brennflächen des Strahlensystems. Auch die Mittelfläche des Systems, der Ort der Mittelpunkte der Strahlen, kann durch Elimination von σ, τ zwischen (F. 32), (F. 2), (F. 35) gefunden werden.

163. Wir kommen jetzt zum wichtigen Begriff des Dichtigkeitsmasses des Systems. Zur Berechnung desselben in dem willkürlichen Punkte σ des Strahles denken wir um diesen Punkt auf der Fläche (F. 35) eine unendlich kleine geschlossene Curve construirt und bestimmen die Schnittpunkte der durch die Punkte des Umfanges dieser Curve gehenden Strahlen des Systems mit einer zur Richtung des ersten Strahles senkrechten den Punkt σ enthaltenden Ebene. Sodann denken wir aus dem Centrum einer Einheitskugel Radien, parallel zu jenen Strahlen des Systems gezogen. In der Ebene und auf der Einheitskugel erhält man sodann auch unendlich kleine geschlossene Curven, welche Flächen f und f_1 begrenzen. Der Bruch $\frac{f_1}{f}$ ist das Dichtigkeitsmass im Punkte σ.

Wenn $\sigma + d\sigma$ ein Punkt der Curve auf der Fläche (F. 35) ist, so gilt es zunächst den Schnittpunkt der Geraden

$$\sigma + d\sigma + y(\tau + d\tau)$$

mit der Ebene

$$S(\rho - \sigma)\tau = 0$$

zu bestimmen. Man erhält sodann

$$\sigma + d\sigma + \tau S\tau d\sigma = \sigma - \tau V\tau d\sigma\,,$$

wenn unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung nicht berücksichtigt werden.

Dem Linienelemente $-\tau V\tau d\sigma$ in der durch σ gehenden Ebene wird nun das Element $d\tau$ auf der Einheitskugel entsprechen. Dem Flächeninhalt zwischen $-\tau V\tau d\sigma$, $-\tau V\tau\delta\sigma$ entspricht somit derjenige zwischen $d\tau = \Phi^{-1}d\sigma$, $\delta\tau = \Phi^{-1}\delta\sigma$. Setzen wir

$$\Delta = TV.(\tau V\tau d\sigma)(\tau V\tau\delta\sigma)\,,\quad \Delta' = TVd\tau\delta\tau$$

oder nach Transformation des ersteren Ausdrucks

$$\Delta = S\tau\delta\sigma d\sigma\,,\quad \Delta' = TVd\tau\delta\tau\,,$$

so ist $\frac{\Delta'}{\Delta}$ das Verhältniss der Flächeninhalte correspondirender

Sektoren der Curven in der Ebene und auf der Kugel. Nun ist jedoch

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{S\tau\delta\sigma d\sigma}{TVd\tau\delta\tau} = \frac{S\tau\phi\delta\tau\phi d\tau}{TVd\tau\delta\tau}$$
$$= -\frac{xS.\tau\phi'^{-1}Vd\tau\delta\tau}{TVd\tau\delta\tau},$$

wenn x wieder die gewöhnliche Bedeutung in Bezug auf die Funktion ϕ beigelegt wird; hierbei ist der im Art. 159 der Theorie bewiesene Satz in Anwendung gebracht. Somit ist weiter

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = -xS\tau\phi'^{-1}UVd\tau\delta\tau = -xS\tau\phi'^{-1}\tau.$$

Für je zwei correspondirende Sektoren ist daher das Verhältnis der Flächeninhalte constant, sodass wir unmittelbar für das Dichtigkeitsmass D die Formel hinschreiben können

$$\frac{1}{D} = -xS\tau\phi'^{-1}\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{F. } 36)$$

Man kann nun leicht den Satz beweisen, dass die Grösse $\frac{1}{D}$ dem Produkte der Entfernungen der beiden Brennpunkte von dem Punkte σ gleich ist.

Nach Art. 153 genügen diese Entfernungen r', r'' nämlich der Gleichung (F. 30)

$$S\tau(\phi + r)^{-1}\tau = 0,$$

oder

$$xS\tau\phi^{-1}\tau - r(x_2 + S\tau\phi\tau) - r^2 = 0,$$

sodass man erhält

$$r'r'' = -xS\tau\phi^{-1}\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{F. } 37)$$

Sind nun ω', ω'' zwei Vektoren senkrecht zu τ, so ist

$$xS\tau\phi^{-1}\tau = \frac{S.V\omega'\omega''V\phi'\omega'\phi'\omega''}{NV\omega'\omega''}$$
$$= \frac{S\omega'\phi'\omega''S\omega''\phi'\omega' - S\omega'\phi'\omega'S\omega''\phi'\omega''}{NV\omega'\omega''} \text{ nach (c. 52)}$$
$$= \frac{S\omega''\phi\omega'S\omega'\phi\omega'' - S\omega'\phi\omega'S\omega''\phi\omega''}{NV\omega'\omega''}$$

$$= \frac{S.\tau V\Phi\omega'\Phi\omega''}{TV\omega'\omega''}$$
$$= xS\tau\Phi'^{-1}\tau,$$

somit ist

$$D = \frac{1}{r'r''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 38)}$$

wie zu beweisen war.

164. Wir wollen jetzt den Drehungswinkel eines zweiten Strahles $\tau + d\tau$ gegen den ersten für die Strecke ab bestimmen. Es ist dies der Winkel der Normalen, aus zwei Punkten des zweiten Strahles auf den ersten gefällt, wenn letzterer in den Punkten a, b getroffen wird. Sind

$$\sigma + x_1\tau, \quad \sigma + x_2\tau$$

die Vektoren der Punkte a, b,

$$\sigma + d\sigma + y_1(\tau + d\tau), \quad \sigma + d\sigma + y_2(\tau + d\tau)$$

die Punkte auf dem zweiten Strahl, aus denen die Senkrechten gefällt werden, so muss die Strecke

$$d\sigma + y_1(\tau + d\tau) - x_1\tau$$

senkrecht zu τ sein; somit

$$S\tau[d\sigma + y_1(\tau + d\tau) - x_1\tau] = 0, \quad y_1 = x_1 + S\tau d\sigma.$$

Die beiden Normalen sind daher

$$x_1 d\tau - \tau V\tau d\sigma, \quad x_2 d\tau - \tau V\tau d\sigma,$$

und die Tangente des Winkels zwischen denselben ist

$$tg\, W = -\frac{TV(x_1 d\tau - \tau V\tau d\sigma)(x_2 d\tau - \tau V\tau d\sigma)}{S(x_1 d\tau - \tau V\tau d\sigma)(x_2 d\tau - \tau V\tau d\sigma)}.$$

Führt man nun wieder die in (F. 8), (F. 9) angegebene Bezeichnung ein und beachtet, dass

$$x_1\omega - \tau V\tau\Phi\omega = (\Phi + x_1)\omega + \tau S\tau(\Phi + x_1)\omega$$
$$= -\tau V\tau(\Phi + x_1)\omega,$$

so entsteht nach einer kleinen Transformation

$$tg\, W = -\frac{S\tau(\Phi + x_1)\omega(\Phi + x_2)\omega}{S.V\tau(\Phi + x_1)\omega V\tau(\Phi + x_2)\omega} \quad \ldots \quad \text{(F. 39)}$$

Führen wir weiter die Voraussetzung ein, dass die Punkte a, b mit den Brennpunkten des ersten Strahles zusammenfallen, so haben wir nur in dieser Formel x_1, x_2 durch r', r'' zu ersetzen. Es lässt sich sodann zeigen, dass das Resultat von ω unabhängig ist.

Setzt man nämlich, was offenbar gestattet ist,

$$\omega = y\omega' + z\omega'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{F. } 40)$$

und beachtet, dass nach (F. 28)

$$\tau = U(\Phi + r')\omega' = U(\Phi + r'')\omega''$$

so sind die Gleichungen

$$(\Phi + r')\omega = u\tau + z(r' - r'')\omega'',$$
$$(\Phi + r'')\omega = u\tau - y(r' - r'')\omega'$$

gültig, wo u eine Skalargrösse ist. Der Nenner des Ausdrucks (F. 39) geht sodann für diesen Fall über in

$$-yz(r' - r'')^2 S\omega'\omega''.$$

In gleicher Weise wird der Zähler des Bruches für $tg\, W$

$$\begin{aligned} &= S\tau(\Phi + r')\omega(\Phi + r'')\omega \\ &= yz(r' - r'')^2 S\omega'\omega''\tau \\ &= -yz(r' - r'')^2 TV\omega'\omega'', \end{aligned}$$

sodass man schliesslich erhält

$$tg\, W = -\frac{TV\omega'\omega''}{S\omega'\omega''} = -tg\,\angle\,\omega'\omega'' = tg\,\angle\,\frac{\omega'}{\omega''}.$$

Wir haben daher den Satz erhalten: Der Drehungswinkel für die Strecke zwischen den Brennpunkten eines Strahles hat für alle unendlich nahen Strahlen denselben Wert, nämlich denjenigen des Neigungswinkels zwischen den Fokalebenen des Strahles.

165. In dem allgemeinen Falle, wo x_1 und x_2 noch willkürliche Werte haben, wollen wir für x_1 Null setzen, d. h. den Drehungswinkel längs dem Strahle wollen wir von dem Punkte σ aus messen. Es entsteht sodann aus (F. 39)

$$tg\, W = \frac{x_2 S\tau\omega\Phi\omega}{x_2 S\omega\Phi\omega + V^2\tau\Phi\omega},$$

und wenn hierein der Wert von ω aus (F. 40) eingetragen wird

$$tg\, W = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{F. } 41)$$
$$\frac{x_2 yz(r' - r'')TV\omega'\omega''}{x_2[y^2r' + z^2r'' - yz(r' + r'')S\omega'\omega''] - (y^2r'^2 + z^2r''^2 - 2yzr'r''S\omega'\omega'')}.$$

Nun wollen wir weiter den Winkel einführen, den die Normale zum ersten Strahle im Punkte σ mit der Normale zur Halbirungsebene des Winkels zwischen den Fokalebenen bildet, d. h. den Winkel zwischen den Vektoren $-\tau V\tau\Phi\omega$ und $\omega' + \omega''$, oder zwischen $-(yr'\omega' + zr''\omega'')$ und $(\omega' + \omega'')$. Bezeichnen wir diesen Winkel mit h, so ist

$$tg\,h = \frac{TV(yr'\omega' + zr''\omega'')(\omega' + \omega'')}{S(yr'\omega' + zr''\omega'')(\omega' + \omega'')} = \frac{zr'' - yr'}{zr'' + yr'}\,tg\,\frac{W_0}{2},$$

wenn, wie im Art. 161, der Winkel zwischen ω', ω'' gleich W_0 gesetzt wird.

Hieraus folgt nun leicht

$$\frac{z}{y} = \frac{r'}{r''}\,\frac{sin(\frac{1}{2}W_0 + h)}{sin(\frac{1}{2}W_0 - h)},$$

und durch Substitution dieses Wertes in (F. 41)

$$tg\,W = \frac{x_2(r' - r'')(cos\,2h - cos\,W_0)}{-2r'r''sin\,W_0 + x_2[(r' + r'')sin\,W_0 + (r' - r'')sin\,2h]}$$

Löst man nun x_2 auf und beachtet, dass nach (F. 34)

$$r' - r'' = (r_1 - r_2)\,sin\,W_0,\quad 2S\tau\delta = (r_1 - r_2)\,cos\,W_0,$$

so erhält man

$$x_2 = \frac{2r'r''sin\,W}{(r_1 + r_2)\,sin\,W + 2S\tau\delta\,cos\,W - (r_1 - r_2)\,cos\,(2h + W)}. \quad \text{(F. 42)}$$

Dieser Ausdruck lässt sofort erkennen, dass x_2 einen Maximum- und einen Minimumwert erreicht bei constantem Drehungswinkel W, wenn

$$cos(W + 2h) = \pm 1,\quad h = -\frac{W}{2} \pm \frac{\pi}{4}.$$

Es gibt somit für jeden Wert von W zwei unter sich rechtwinklige Normalen im Punkte σ, denen zwei bestimmte Strahlen des Systems entsprechen, derart dass die Strecke auf dem ersten Strahle, längs welcher ein gegebener Drehungswinkel sich vorfindet, eine Maximum- oder Minimumlänge hat. Für die Länge dieser Strecken findet man

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= \frac{r'r''sin\,W}{M\,sin\,W + S\tau\delta\,cos\,W - D},\\ x_2'' &= \frac{r'r''sin\,W}{M\,sin\,W + S\tau\delta\,cos\,W + D},\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(F. 43)}$$

wenn man die Entfernung des Mittelpunktes des Strahles vom

Punkte σ mit M und die halbe Distanz zwischen den Grenzpunkten mit D bezeichnet. Die Bedeutung der Grösse $S\tau\delta$ kann dem Artikel 154 entnommen werden. Schliesslich ergibt sich sodann noch die Relation

$$\frac{1}{x_2} = \frac{cos^2 g}{x_2'} + \frac{sin^2 g}{x_2''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(F. 44)}$$

wenn gesetzt wird

$$g = h + \frac{W}{2},$$

Zwischen den Maximum- und Minimumstrecken und einer beliebigen anderen Strecke, denen sämtlich eine gegebene Drehung W entspricht, besteht demnach eine einfache Relation von bekannter Form.

166. Kehren wir wieder zur allgemein gültigen Formel (F. 39) zurück. Wenn die Werte von ω und W gegeben sind, d. h. wenn wir einen bestimmten Drehungswinkel eines festen Strahles gegen den ersten Strahl ins Auge fassen, so kann die Strecke auf dem ersten Strahle, für die jener Drehungswinkel existirt, verschiedene Werte erhalten, indem x_1, x_2 in (F. 39) variabel sind. Fragen wir nun, wann $x_1 - x_2$ einen Maximum- oder Minimumwert erhalten wird. Differentiirt man (F. 39) bei constantem W und ω und setzt nachher

$$d(x_1 - x_2) = 0 \text{ oder } dx_1 = dx_2,$$

so entsteht die sehr einfache Gleichung

$$S\omega(2\Phi + x_1 + x_2)\omega = 0,$$

oder

$$x_1 + x_2 = 2S\omega\Phi\omega = 2S\omega\Phi_0\omega \quad \ldots\ldots \quad \text{(F. 45)}$$

Diese Gleichung mit (F. 39) zusammen bestimmt die gesuchten Werte von x_1 und x_2. In (F. 45) liegt aber ein Satz enthalten, nämlich: die Mitte der Maximal- oder Minimalstrecke, für die ein fester zweiter Strahl einen bestimmten Drehungswinkel gegen den ersten Strahl ergibt, fällt mit dem Fusspunkte der kürzesten Entfernung der beiden Strahlen zusammen.

Mehrere ähnliche Betrachtungen könnten noch an die Gleihung (F. 39) geknüpft werden; doch müssen wir uns mit den hier mitgeteilten begnügen.

Es erübrigt noch zu erwähnen, dass das Strahlensystem die

Normalen einer Schaar von Flächen beliebiger Ordnung darstellen wird, falls der Vektor τ die Eigenschaften des Vektors ν, die wir im vierten Abschnitte erörterten, hat. Es erfordert dies nur, dass das Differential $S\tau d\sigma$ integrabel sei, es sei denn unmittelbar oder mittelst eines skalaren Faktors. Diese Bedingung wird somit nach Art. 98 durch die Gleichung

$$S.\tau \nabla \tau = 0$$

ausgedrückt.

ANHANG.

DAS PRINCIP DER DUALITÄT.

---

167. Bisher haben wir fortwährend vorausgesetzt, indem wir die Hamilton'schen Anschauungen festhielten, ein Vektor stelle einen Punkt dar. Man kann jedoch auch irgend eine andere Annahme machen und wir wollen eine derselben in diesem Abschnitte näher untersuchen.

Setzen wir fest, dass der Vektor α eine Ebene darstellt, welche durch den Punkt $a\alpha^{-1}$ senkrecht zur Richtung von α gelegt wird, wo a einen beliebigen aber constanten Skalarwert haben kann, so kann nur eine Unbestimmtheit eintreten in den beiden Fällen, wo die Ebene den Ursprung der Vektoren enthält oder ins Unendliche rückt. Im ersteren Falle muss $T\alpha$ unendlich gross sein, im letzteren verschwinden. Wir wollen deshalb für einen Vektor von bestimmter Richtung $U\alpha$ mit unendlichem Tensor das Zeichen wählen $\overset{\infty}{\alpha}$, für einen Vektor aber mit verschwindendem Tensor das Zeichen $\overset{0}{V}$. In dem letzteren Falle braucht nämlich die Richtung des Vektors in Übereinstimmung mit den üblichen Anschauungen der analytischen Geometrie, wonach sämtliche Punkte ins Unendliche in einer einzigen Ebene enthalten sind, nicht erwähnt zu werden. Hiermit steht somit die Hamilton'sche Auffassung, der Versor eines Nullvektors sei unbestimmt, im Einklang.

168. Nach diesen Voraussetzungen fragen wir zuerst nach der Art des von der Gleichung

$$S(\rho - \alpha)\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G. 1)$$

dargestellten Gebildes. Wählen wir einen Wert von ρ, welcher dieser Gleichung genügt, so ist

$$S(\omega - a\rho^{-1})\rho = 0 \text{ oder } S\omega\rho = a \quad \ldots\ldots \quad (G. 2)$$

die Gleichung jener Ebene ρ, wenn ω der veränderliche Vektor eines Punktes ist. Nimmt nun ρ sämtliche der Relation (G. 1) genügende Werte an, so enthalten alle Ebenen (G. 2) den Punkt

$$\frac{a\beta}{S\alpha\beta},$$

wie man sich leicht überzeugt durch die Substitution dieses Wertes für ω. Man kann demnach sagen, die Gleichung (G. 1) stelle diesen Punkt dar.

Setzen wir

$$\frac{a\beta}{S\alpha\beta} = \gamma,$$

so ist

$$S\rho\gamma = \alpha$$

die Gleichung des Punktes mit dem Vektor γ. Ins besondere, wenn wir annehmen α sei das Symbol für eine Ebene, welche in dem Punkte, dessen Vektor α^{-1} ist, senkrecht zu α gebracht wird, so ist

$$S\rho\beta = 1$$

die Gleichung des Punktes, dessen Vektor β ist.

Wir untersuchen nun weiter die Gleichung

$$S(\rho - \alpha)\beta + xS(\rho - \alpha_1)\beta_1 = 0.$$

Dieselbe stellt offenbar den Punkt dar, dessen Vektor ist

$$\frac{a(\beta + x\beta_1)}{S\alpha\beta + xS\alpha_1\beta_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G. 3)$$

Nimmt man an, dass die Relation

$$S\alpha\beta = S\alpha_1\beta_1$$

stattfindet, so ist (G. 3) der Vektor eines Punktes R, welcher auf der Verbindungsgeraden der beiden anderen P, Q oder

$$\frac{a\beta}{S\alpha\beta}, \frac{a\beta_1}{S\alpha_1\beta_1},$$

enthalten ist und die Strecke zwischen denselben so teilt, dass

$$PR : RQ = x : 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G. 4)}$$

Man kann demnach allgemein sagen, die Gleichung

$$(S\rho\beta - c) + x(S\rho\beta_1 - c) \ldots\ldots\ldots \text{(G. 5)}$$

stelle einen Punkt R dar in der Verbindungsgeraden der Punkte P, Q oder

$$S\rho\beta = c, \quad S\rho\beta_1 = c$$

und zwar *den* Punkt, für welchen die Relation (G. 4) gültig ist.

Wenn nun x alle Skalarwerte durchläuft, so ist (C. 5) die Gleichung einer Geraden, nämlich der Verbindungsgeraden der Punkte mit den Vektoren $\frac{a\beta}{c}$, $\frac{a\beta_1}{c}$, deren gewöhnliche Gleichung ist

$$\rho = \frac{a(\beta + x\beta_1)}{c(1 + x)} \text{ oder } V(c\rho - a\beta)(\beta - \beta_1) = 0.$$

Wir können aber auch die Gerade als Schnitt der beiden Ebenen α, β auffassen; und weil

$$S\rho\alpha = a, \quad S\rho\beta = a$$

die Gleichungen jener Ebenen sind, so ist

$$\rho = xV\alpha\beta + a\frac{\beta - \alpha}{V\alpha\beta},$$

die Gleichung der durch die Ebenen α, β bestimmten Gerade.

Fragen wir noch weiter, welcher Ort durch die Gleichung

$$V(\rho - \alpha)\beta = 0 \text{ oder } \rho = \alpha + x\beta$$

dargestellt wird. Eine der in derselben enthaltenen Ebenen hat die Gleichung

$$S\omega\rho = a \text{ oder } S\omega(\alpha + x\beta) = a,$$

und man hat die Enveloppe derselben bei veränderlichem x zu suchen. Dieselbe ist aber offenbar die Durchschnittgerade der Ebenen mit den Gleichungen

$$S\omega\alpha = a, \quad S\omega\beta = 0,$$

deren Vektoren α, $\overset{\infty}{\beta}$ sind.

169. Im allgemeinen, wenn

$$F(\rho) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(G. 6)}$$

eine beliebige Skalargleichung ist, welcher der Vektor ρ genügen muss, so hat man es bei den hier auseinandergesetzten Principien mit der Enveloppe der Ebene

$$S\omega\rho = a$$

unter der Bedingung (G. 6) zu tun. Dieses Problem stimmt aber für negatives a mit demjenigen des Artikels 36 überein, nämlich die Reciprokalfläche der Fläche mit der gewöhnlichen Gleichung (G. 6) in Bezug auf eine um den Ursprung der Vektoren mit dem Radius $\sqrt{Ta}$ beschriebene Kugel zu finden.

Dieselbe Interpretation bleibt aber natürlich auch gültig für den Fall, wo die Gleichung (G. 6) eine Vektorgleichung für ρ ist.

Man kann daher auch in der Theorie der Quaternionen jeder Gleichung eine doppelte Deutung beilegen, je nachdem man den veränderlichen Vektor als einen Punkt oder als eine Ebene betrachtet, was darauf hinauskommt, dass die beiden so erhaltenen Figuren reciprok zu einander sind in Bezug auf eine feste Kugel.

Hiermit ist nun das Dualitätsprincip in die Theorie der Quaternionen aufgenommen. Wir wollen bei demselben nicht lange stehen bleiben; nur ein einziges Beispiel sei gegeben, dass die vorhergegangenen Gleichungen sich in dem bekannten Sinne unmittelbar übertragen lassen, wie aber von vorn herein selbstverständlich ist. Ist (G. 6) die Gleichung einer Fläche, so ist

$$S(\omega - \rho)\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(G. 7)}$$

wo ν durch die Relation

$$dF\rho = S\nu d\rho$$

definirt wird, die Gleichung des Berührungspunktes der Tangentenebene ρ. Man findet nämlich diesen Berührungspunkt als Schnittpunkt der Ebenen mit den Vektoren

$$\rho, \; \rho + x d\rho, \; \rho + y\delta\rho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(G. 8)}$$

wo x, y sehr kleine Skalarwerte haben. Die Gleichungen dieser Ebenen sind nach dem Vorhergehenden, wenn σ ein veränderlicher Vektor ist,

$$S\sigma\rho = a, \; S\sigma(\rho + x d\rho) = a, \; S\sigma(\rho + y\delta\rho) = a.$$

Für den Schnittpunkt σ ist daher

$$S\sigma\rho = a, \; S\sigma d\rho = 0, \; S\sigma\delta\rho = 0,$$

somit

$$\sigma = \frac{a\, V d\rho \delta\rho}{S\rho d\rho \delta\rho} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(G. 9)}$$

Nun ist jedoch nach dem Vorhergehenden

$$S\omega\sigma = a$$

die Gleichung des Punktes mit dem Vektor σ, d. h. des Berührungspunktes. Derselbe wird somit, wenn wir den Wert von σ aus (G. 9) einführen, dargestellt durch

$$S.(\omega - \rho)\, V d\rho \delta\rho = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(G. 10)}$$

Weil aber die Ebenen (G. 8) der Fläche (G. 6) angehören, so ist

$$S\nu d\rho = 0\,, \quad S\nu\delta\rho = 0,$$

oder

$$\nu = x\, V d\rho \delta\rho.$$

Die Gleichung (G. 10) ergibt daher für den Berührungspunkt die in (G. 7) erwähnte Beziehung.

ZUSÄTZE UND BERICHTIGUNGEN.

Seite 4, Zeile 17 von oben, *lies* OC *statt* OB, OB′ *statt* OC′.

„ 12, „ 13 „ unten, im Nenner des Bruches *lies* $c+a$ *statt* $c+\alpha$.

„ 15: Die Construction des Punktes A aus den gegebenen Punkten A′, B′, C′ erhält allerdings eine mehr symmetrische Gestalt, wenn aus der Gleichung für α (Zeile 13 v. o.) die Grösse $\alpha-\rho_1$ bestimmt wird, wodurch sich ergibt

$$(1-q_1q_2q_3)(\alpha-\rho_1)=(1-q_3)(\rho_3-\rho_1)-q_3q_1(1-q_2)(\rho_1-\rho_2).$$

Bei den speciellen Annahmen $q_1=q_2=q_3=q$, wird sodann erhalten

$$2\,\mathrm{A'A}=\mathrm{A'C'}+q\mathrm{C'B'}.$$

Beschreibt man daher ein gleichseitiges Dreieck C′PB′ und zieht noch A′P, so ist der Punkt A die Mitte dieser Geraden.

„ 18, Zeile 15 v. u., *lies* Dreiecks *statt* Dreieks.

„ 19, „ 9 v. o., „ $\gamma-\alpha$ „ $\gamma-a$.

„ 21, „ 10 v. u., „ $a\alpha+a_1\beta$ „ $a\alpha+\alpha_1\beta$.

„ 22, „ 9 v. o., „ α^{-1} „ a^{-1}.

„ 28, „ 13 v. u., „ allgemeinen „ allgemeine.

„ 31. Die im letzten Teile des Artikels 16 angestellte Betrachtung kann noch weitergeführt werden.

Dass die Gleichung, welche x bestimmt, stets drei positive Wurzeln hat ergibt sich folgendermassen. Man setze

$$f(x) \equiv x(1 + a^2 - x)^2 - k^2(a^2 - x)^2,$$

so ist $f(0)$ negativ, $f(a^2)$ positiv, $f(1 + a^2)$ negativ, $f(\infty)$ positiv. Bezeichnet man daher die drei reellen Werte von $T(\omega - \alpha)$ der Reihe nach mit t_1, t_2, t_3, so gilt die Ungleichheit

$$0 < t_1 < a < t_2 < \sqrt{1 + a^2} < t_3 < \infty.$$

Für $T(\omega - \alpha) = t_1$ ist

$$1 + a^2 + (\omega - \alpha)^2 > 0, \quad a^2 + (\omega - \alpha)^2 > 0,$$

somit fällt $\omega - \alpha$ der Richtung nach mit $\alpha_1 - \alpha$ zusammen. Das Nämliche gilt für $T(\omega - \alpha) = t_3$, weil sodann $1 + a^2 + (\omega - \alpha)^2$ und $a^2 + (\omega - \alpha)^2$ zugleich negativ sind. Für $T(\omega - \alpha) = t_2$ gilt aber

$$1 + a^2 + (\omega - \alpha)^2 > 0, \quad a^2 + (\omega - \alpha)^2 < 0.$$

Man kann deshalb stets zwei Inversionscentra P_1, P_3 finden, aus denen eine beliebige Kugel, deren Centrum A im Punkte α sich befindet, in eine um α_1 beschriebene Kugel invertirt wird und die mit α_1 an der nämlichen Seite des Punktes α liegen, während das dritte zu jenem Zwecke dienliche Inversionscentrum P_2 zur andren Seite liegt derart, dass AP_2 stets zwischen AP_1 und AP_3 enthalten ist.

Seite 33, Zeile 5 v. u., *lies* $\alpha_1 - \omega$ *statt* $a_1 - \omega$.
„ 36, „ 1 v. u., „ folgenden „ folgende.
„ 37, „ 14 v. u., im Nenner des Wertes für $\sigma - \alpha$, *lies* $\gamma_1^2 - \gamma^2$ *statt* $\gamma_1^2 - \gamma_2^2$.
„ 40, „ 11 v. u., *lies* von *statt* van.
„ 50, „ 13 v. u., „ zu einander *statt* einander.
„ 63, „ 4 v. u., „ sein somit „ somit.
„ 77, „ 7 v. u., „ a *statt* α.
„ 78, Die Elimination der Grösse τ aus der Gleichung (C. 5) kann auch einfach durch Operation an dieselbe mit $S.(\Phi\sigma + \varepsilon)$ stattfinden.
„ 80, Zeile 7 und 8 v. u., *lies* Durchschnittsgerade *statt* -geraden.
„ 84, „ 6 v. u., *lies* $S\sigma'(\Phi\sigma' + 2\varepsilon) + a$ *statt* $S\sigma'(\Phi\sigma + 2\varepsilon) + a$.

Seite 88, Zeile 6 v. u., *lies* a *statt* α.
„ 101, „ 15 v. u., „ α_3 „ a_3.
„ 102, „ 1 v. o., „ welcher *statt* welche.
„ 102, „ 11 v. u., „ (C. 64) „ (C. 67).
„ 102, „ 8 v. u., „ (*c*. 46) „ (C. 46).
„ 103, „ 15 v. o., „ (C. 64) „ (C. 67).
„ 107, „ 11 v. u., „ μ_1 „ μ.
„ 114, „ 11 v. o., „ $V^2\alpha\Phi\alpha$ „ $V\alpha\Phi\alpha$.
„ 115, „ 17 v. u., „ $F_1\rho$ „ $F\rho_1$.
„ 126, „ 3 v. o., „ $SU.\rho\Phi\rho_1$ „ $SU\rho\Phi\rho_1$.
„ 126, „ 5 v. o., „ $SU.\rho\Phi\rho_2$ „ $SU\rho\Phi\rho_2$.
„ 126, „ 8 v. o., „ $SU(\rho V\rho_1\rho_2)$ „ $SU\rho V\rho_1\rho_2$ und
$SU.\rho\Phi\tau$ „ $SU\rho\Phi\tau$.
„ 128, „ 8 v. u., „ $\rho - \alpha$ „ $\rho - a$.
„ 131, „ 8 v. u., Anfang des Artikels 88.
„ 132, „ 16 v. u., *lies* $S\rho^{-1}\varkappa$ *statt* $S\rho^{-1}x$.
„ 135, „ 15 v. o., „ $\alpha^{-t}\omega\alpha^t$ „ $\alpha^{-t}\omega\alpha t$.
„ 146, „ 9 v. o., „ $\omega + z\alpha$ „ $\omega + za$,
„ 149, „ 5 v. o., „ 25 „ 23.
„ 156, „ 10 v. o., „ $V.\sigma V\{q'(\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3)q\}$
statt $V.\sigma Vq'(\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3)q$.
„ 157, „ 6 v. u., *lies* $F(TV\alpha\rho, S.\alpha U\rho)$ *statt* $F(TV\alpha\rho.$
$S\alpha U\rho)$.
„ 161, „ 16 und 20 v. o., *lies* $V.d\rho V\nu\lambda_1$ *statt* $d\rho V\nu\lambda_1$.
„ 162, „ 7 v. u., *lies* die soeben erwähnte Beziehung,
statt (D. 63).
„ 163, „ 17 v. o., „ (D. 65) *statt* (D. 66).
„ 163, „ 4 v. u., „ $\gamma_1\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial z}$ „ $\gamma_1\dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}$.
„ 164, „ 15 v. u., „ werden „ werde.
„ 168, „ 19 v. u., „ 81 „ 61.
„ 169, „ 9 v. o., „ 64 „ 67.
„ 172, „ 10 v. u., „ $S^2\rho\alpha_1$ „ $S^2\rho\alpha_2$.
„ 173, „ 11 v. u.: Die hier geschriebene Gleichung ist
mit (D. 105) zu bezeichnen.
„ 175, „ 3 v. o.: Die hier geschriebene Gleichung ist
mit (D. 113) zu bezeichnen.

Seite 175,	Zeile	7 v. u.,	*lies*	$\frac{a^4}{C}$	*statt*	$\frac{a^2}{C}$.
„ 180,	„	15 v. u.,	„	D. 130	*statt*	D. 110.
„ 181,	„	2 v. u.,	„	116	„	112.
„ 182,	„	9 v. u.,	„	D. 134	„	D. 135.
„ 184,	„	12 v. u.,	„	Art. 131	„	Art. 13.
„ 184,	„	2 v. u.,	Im Anfang der zweiten Seite dieser Gleichung ist eine eckige Klammer weggelassen.			
„ 185,	„	2 v. u.,	*lies*	$\binom{m}{k+1}$	*statt*	$\binom{k+1}{m}$.
„ 187,	„	5 v. o.,	„	ν	„	n.
„ 196,	„	13 v. o.,	„	$Tf_1 = 1$	„	$Tf_1 = 0$.
„ 199,	„	2 v. o.,	„	ersieht	„	ersicht.
„ 200,	„	11 v. o.,	„	die	„	diese.
„ 209,	„	12 v. o.,	„	$\left(1 + \frac{4a^2}{\pi^2 N\beta}\right)$	„	$\left(1 - \frac{4a^2}{N\beta}\right)$.
„ 215,	„	16 v. o.,	„	Fläche	„	Flache.
„ 216,	„	14 v. u.,	„	das zweite Mal (E. 76)	*statt*	(E. 77).
„ 218,	„	6 v. u.,	„	$U\nu$	*statt*	$V\nu$.
„ 219,	„	13 v. u.,	„	85	„	86.
„ 224,	„	19 und 20 v. o.,	*lies:* so ist die Torsion, d. h. der reciproke Wert des Torsionsradius, für diese Curven gleich u. s. w.			
„ 225,	„	9 v. o.,	*lies*	(D. 9)	*statt*	(E. 101).
„ 228,	„	6 v. u.,	„	$\frac{xTd\rho}{R_t}$	„	$xTd\rho$.

BERICHTIGUNGEN UND ZUSÄTZE

ZUR

THEORIE DER QUATERNIONEN.

Seite 16, Zeile 12 v. o., lies: die Gesamtheit, statt: das Complex.

Seite 52, Art. 48. Die im Anfang dieses Artikels für das Produkt dreier oder mehrerer Quaternionen gegebene Definition kann nur in speciellen Fällen Anwendung finden. Im allgemeinen kann die Grösse $qq'q''$ als das Produkt des Quaternionen $q'q''$ mit q definirt werden, eine Betrachtungsweise, welche tatsächlich schon im Art. 49 angewandt ist.

Seite 61, Art. 52. Hier kann die Formel hinzugefügt werden

$$q\frac{q'}{q''} = \frac{qq'}{q''}.$$

Es ist nämlich

$$q\frac{q'}{q''} = q\left(q'\frac{1}{q''}\right), \text{ nach } (b.\ 65)$$

$$= (qq')\frac{1}{q''}, \text{ nach } (b.\ 59)$$

$$= \frac{qq'}{q''}, \text{ nach } (b.\ 65).$$

Seite 83, Die erste Seite der Formel (b. 146) muss $q'q$ heissen.

Seite 88, Zeilen 3, 4, 6 v. u. Hier ist überall BB_1 durch B_1B, $B'B_1'$ durch $B_1'B'$ zu ersetzen.

Seite 90, Art. 73. In diesem Artikel sind durch ein Versehen zwei Sätze fehlerhaft dargestellt. Im Folgenden ist der ganze Artikel aufs Neue abgedruckt; auf den weiteren Teil der »Theorie" ist dies jedoch ohne Einfluss gewesen.

Art. 73. Proportionen mit Quaternionen. Wenn wir vier Quaternionen q, q', q'', q''' wählen, die der Relation genügen

$$q : q' = q'' : q''' \text{ oder } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 171)$$

so sollen dieselben proportional genannt werden.

Weil $\frac{q}{q'}$ und $\frac{q''}{q'''}$ Quaternionen sind, so kann nach Art. 29 die Beziehung (b. 171) nur stattfinden, falls

$$T\frac{q}{q'} = T\frac{q''}{q'''} \text{ oder nach } (b.\ 69)\ Tq : Tq' = Tq'' : Tq''' . \quad (b.\ 172)$$

und

$$U\frac{q}{q'} = U\frac{q''}{q'''} \text{ oder nach } (b.\ 70)\ Uq : Uq' = Uq'' : Uq''' . \quad (b.\ 173)$$

Wir wollen uns in diesem Artikel mit einigen wenigen Eigenschaften dieser Proportionen beschäftigen.

Nach (b. 72) in Verbindung mit dem Satze: wenn $q = q'$, so ist auch $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$, folgt aus ($b$. 171) unmittelbar

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'''}{q''}, \text{ wenn } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 174)$$

Operirt man nun an diese Gleichung mit dem Symbol K, so wird nach (b. 54), (b. 15) erhalten

$$\frac{1}{Kq} Kq' = \frac{1}{Kq''} Kq''',$$

und indem *mit* Kq und *durch* $\frac{1}{Kq'''}$ multiplicirt wird

$$\frac{Kq'}{Kq'''} = \frac{Kq}{Kq''},$$

oder

$$Kq : Kq'' = Kq' : Kq''', \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \quad (b. 175)$$

also in Worten: Bei einer Quaternionenproportionen können die beiden mittleren Quaternionen umgetauscht werden, wenn man zugleich alle Quaternionen durch ihre Conjugirten ersetzt.

Der nämliche Satz gilt auch für die Umtauschung der beiden äusseren Quaternionen.

Hat man es in der Proportion nur mit rechten Quaternionen zu tun

$$r : r' = r'' : r''',$$

so sind nach dem Vorhergehenden und nach ($b.$ 74) die beiden mittleren oder die äusseren Glieder ohne Weiteres commutativ. Dasselbe gilt natürlich auch bei der Proportionalität von Vektoren.

Dividirt man die beiden Seiten der Gleichung ($b.$ 175) durch die der nachstehenden

$$Nq : Nq'' = Nq' : Nq'''$$

und beachtet ($b.$ 24*), so entsteht dadurch

$$\frac{1}{q} : \frac{1}{q''} = \frac{1}{q'} : \frac{1}{q'''}, \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \; . \; . \quad (b. 176)$$

oder in Worten: Bei einer Quaternionenproportion können die beiden mittleren Quaternionen umgetauscht werden, wenn gleichzeitig alle Quaternionen durch deren Reciproken ersetzt werden.

Aus einer gegebenen Proportion $q : q' = q'' : q'''$ kann man eine jede der Grössen auflösen, und zwar geschieht dies wie nachstehend:

$$\text{Aus } \frac{q}{q'} = \frac{q''}{q'''} \text{ folgt } \frac{q}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q' \text{ oder } q \frac{1}{q'} q' = \frac{q''}{q'''} q'$$

oder schliesslich

$$q = \frac{q''}{q'''} q', \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 177)$$

Aus ($b.$ 174) folgt in derselben Weise

$$q' = \frac{q'''}{q''} q, \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b. 178)$$

Ebenso findet man

$$q'' = \frac{q}{q'} q''' \text{ und } q''' = \frac{q'}{q} q'', \text{ wenn } q : q' = q'' : q''' \quad . \quad (b. 179)$$

Wir schliessen diesen Artikel und die Betrachtungen über Proportionen mit der Bemerkung, dass die Proportion

$$q : q' = q'' : q''',$$

auch in andrer Gestalt erscheinen kann. So ist z. B. nach (*b.* 24*)

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Nq},$$

und deshalb wird

$$\frac{qKq'}{Nq'} = \frac{q''Kq'''}{Nq'''},$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} Nq'''.qKq' &= Nq'.q''Kq''' \\ Nq''.qKq' &= Nq.q''Kq''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b.\ 180)$$

und

weil

$$Nq : Nq' = Nq'' : Nq'''.$$

Seite 108, Art. 83. Hier kann noch die Formel Platz finden

$$K.\varepsilon^n = \varepsilon^{-n}.$$

Denn es ist nach (*b.* 108)

$$\begin{aligned} K.\varepsilon^n = (S - V)\varepsilon^n &= cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon\, sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \varepsilon^{-n}. \end{aligned}$$

Seite 119. Die Formel (*c.* 52) kann auch wie nachstehend bewiesen werden

$$\begin{aligned} S.V\alpha\beta\, V\gamma\delta &= S.\alpha\beta\, V\gamma\delta, \text{ weil } S\alpha\beta . V\gamma\delta \text{ ein Vektor ist;} \\ &= S.\alpha\, V(\beta\, V\gamma\delta), \text{ weil } \alpha S(\beta\, V\gamma\delta) \text{ ein Vektor ist;} \\ &= S.\alpha(\delta S\beta\gamma - \gamma S\beta\delta) \text{ nach } (c.\ 40) \\ &= S\alpha\delta S\beta\gamma - S\alpha\gamma S\beta\delta. \end{aligned}$$

Seite 121, Art. 91. Hier kann noch hinzugefügt werden:

Nach dem Vorhergehenden ist

$$q = w + xi + yj + zk = Sq - iSiq - jSjq - kSkq,$$

somit, wenn statt q ein Vektor ρ genommen wird,

$$\rho = -iSi\rho - jSj\rho - kSk\rho,$$

eine Formel, welche auch unmittelbar aus (*c.* 46) hervorgeht, wenn darin α, β, γ durch i, j, k ersetzt werden.

Seite 153, Art. 111. Ein direkter Weg um zu dem Ausdruck für eine konische Drehung zu geraten, ist der folgende:

Wenn von den coinitalen Vektoren α, β der zweite einen Winkel $t\pi$ um den ersteren als Achse gedreht wird, so bleibt der Component von β längs α, welcher durch

$$
\begin{aligned}
U\alpha . T\beta \cos \angle \frac{\beta}{\alpha} &= \alpha \frac{T\beta}{T\alpha} \cos \angle \frac{\beta}{\alpha}, \\
&= \alpha S \frac{\beta}{\alpha} \text{ nach } (b.\ 99) \\
&= \alpha^{-1} S\alpha\beta,
\end{aligned}
$$

dargestellt wird, ungeändert. Der zu α senkrechte Component $\beta - \alpha^{-1}S\alpha\beta = \alpha^{-1}V\alpha\beta$ geht nach Art. 85, wenn $T\alpha = 1$ gesetzt wird, in $\alpha^{2t}(\beta - \alpha^{-1}S\alpha\beta) = \alpha^{2t-1}V\alpha\beta$ über. Somit ist das Resultat

$$
\begin{aligned}
\rho &= \alpha^{-1}S\alpha\beta + \alpha^{2t-1}V\alpha\beta \\
&= \alpha^{t}(\alpha^{-t-1}S\alpha\beta + \alpha^{t-1}V\alpha\beta) \\
&= \alpha^{t}\left[\alpha^{-t-1}\frac{\alpha\beta + \beta\alpha}{2} + \alpha^{t-1}\frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2}\right] \text{ nach } (c.\ 14), (c.\ 15) \\
&= \alpha^{t}\left[\frac{\alpha^{-t} + \alpha^{t}}{2}\beta + \frac{\alpha^{-t} - \alpha^{t}}{2}\alpha^{-1}\beta\alpha\right] \\
&= \alpha^{t}\left[\beta \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right)\alpha^{-1}\beta\alpha\right] \text{ nach } (c.\ 9) \\
&= \alpha^{t}\beta\left[\cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \alpha^{t}\beta\alpha^{-t} \text{ nach } (c.\ 9).
\end{aligned}
$$

Augenscheinlich bleibt dieser Ausdruck ungeändert, wenn man die Voraussetzung $T\alpha = 1$ fallen lässt. Setzt man nach Art. 85 $\alpha^{t} = q$, so ist

$$\rho = q\beta q^{-1}$$

der Ausdruck für den Vektor, welcher aus β durch eine konische Drehung um $Ax.q$, deren Winkel $2\angle q$ beträgt, entsteht.

Seite 193, Art. 139. Es mag hier noch bemerkt werden:

Die Funktion $\phi^{-2}\delta$ wird die Lösung der Gleichung $\phi^{2}\rho = \delta$ sein; denn aus $\phi\phi\rho = \delta$ folgt $\phi\rho = \phi^{-1}\delta$, $\rho = \phi^{-1}\phi^{-1}\delta = \phi^{-2}\delta$.

Es ist weiter leicht ersichtlich, dass für ganze, positive Werte von k, l die Beziehung stattfindet

$$(\Phi^k)^l = \Phi^{kl}.$$

Anstatt der linearen Vektorfunktion $\Phi^2\rho$ sei $\psi\rho$ gesetzt. Wir können sodann auch schreiben

$$\Phi\rho = \psi^{\frac{1}{2}}\rho,$$

um zu einer Definition für gebrochene Potenzen des Symbols ψ zu geraten. In gleicher Weise wollen wir annehmen, dass

aus $\Phi^n\rho = \psi\rho$ folgt $\Phi\rho = \psi^{\frac{1}{n}}\rho$.

Auf die Frage, ob bei beliebiger Wahl von $\psi\rho$ auch stets eine lineare Vektorfunktion $\psi^{\frac{1}{n}}\rho$ gefunden werden kann, sei hier nicht eingegangen.

Weiter sei noch gesetzt

$$\psi^{\frac{m}{n}}\rho = (\psi^{\frac{1}{n}}\rho)^m,$$

wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

Seite 203, Zeile 10 v. o. lies 182, statt 181.

Seite 205. Die Gleichung (f. 65) kann noch vereinfacht werden. Weil nämlich

$$\gamma = -iSi\gamma - jSj\gamma - kSk\gamma,$$

so ist

$$\rho = -iSi\gamma\left(\frac{b^2+c^2}{b^2c^2} - \frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}\right) - jSj\gamma \text{ (u. s. w.)} \dots$$

$$= -\frac{iSi\gamma}{a^2} - \frac{jSj\gamma}{b^2} - \frac{kSk\gamma}{c^2}.$$

Seite 205, Zeile 5 v. u. lies $V\alpha\gamma\beta$, statt $V\alpha\beta\gamma$.

Seite 210, Art. 153. Die folgende Bemerkung findet nachher Anwendung: Die Hauptrichtungen für die Funktionen $\Phi\rho$, $\Phi^{-1}\rho$ werden stets übereinstimmen. Wenn nämlich die Beziehung stattfindet

$$\Phi\rho = m\rho, \text{ so ist } \rho = m\Phi^{-1}\rho, \; \Phi^{-1}\rho = \frac{1}{m}\rho.$$

Dasselbe wird auch für die Funktionen $\Phi^2\rho$, $\Phi^3\rho \dots$ gelten.

Denn man hat wieder bei der Annahme $\Phi\rho = m\rho$, $\Phi^2\rho = m\Phi\rho = m^2\rho$, u.s.w.

Seite 214, Art. 159. Bisweilen können auch die Ausdrücke für die Invarianten x_1, x_2 bei Anwendung der dreigliedrigen Grundform benutzt werden. Man findet nach (f. 41) für x_1, wenn statt λ, μ, ν die Vektoren $V\gamma_2\gamma_3$, $V\gamma_3\gamma_1$, $V\gamma_1\gamma_2$ gesetzt werden, sodass

$$\Phi'\lambda = \alpha_1 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\quad \Phi'\mu = \alpha_2 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\quad \Phi'\nu = \alpha_3 S\gamma_1\gamma_2\gamma_3,$$

$$x_1 = \frac{S(V\gamma_2\gamma_3 V\alpha_2\alpha_3 + V\gamma_3\gamma_1 V\alpha_3\alpha_1 + V\gamma_1\gamma_2 V\alpha_1\alpha_2)S^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{S.V\gamma_2\gamma_3 V\gamma_3\gamma_1 V\gamma_1\gamma_2},$$

$$= -S(V\gamma_2\gamma_3 V\alpha_2\alpha_3 + V\gamma_3\gamma_1 V\alpha_3\alpha_1 + V\gamma_1\gamma_2 V\alpha_1\alpha_2).$$

Um x_2 zu bestimmen, schreiben wir nach (f. 41), (f. 29)

$$x_2 = \frac{S(\lambda\Phi V\mu\nu + \mu\Phi V\nu\lambda + \nu\Phi V\lambda\mu)}{S\lambda\mu\nu},$$

und wählen für λ, μ, ν die Grössen α_1, α_2, α_3, wodurch wir erhalten

$$\Phi V\mu\nu = \gamma_1 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\quad \Phi V\nu\lambda = \gamma_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\quad \Phi V\lambda\mu = \gamma_3 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$x_2 = S(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3).$$

Diese Resultate bleiben ungeändert, wenn man die Grössen α mit den γ verwechselt. Somit haben stets die Invarianten x, x_1, x_2 für die Funktion Φ und deren Conjugirte den nämlichen Wert.

Seite 217, Art. 161. Die Gleichung (f. 95) muss heissen

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3).$$

Für die Grösse δ kann auch der nachstehende Ausdruck gegeben werden

$$\delta = \frac{V(\Phi\alpha V\beta\gamma + \Phi\beta V\gamma\alpha + \Phi\gamma V\alpha\beta)}{2S\alpha\beta\gamma},$$

wo α, β, γ beliebige Vektoren sind. Aus

$$\rho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\rho + \beta S\gamma\alpha\rho + \gamma S\alpha\beta\rho$$

folgt nämlich

$$\Phi\rho = \frac{\Phi\alpha S\beta\gamma\rho + \Phi\beta S\gamma\alpha\rho + \Phi\gamma S\alpha\beta\rho}{S\alpha\beta\gamma},$$

und wenn man mit diesem Ausdruck nach (f. 95) die Grösse δ berechnet, so erhält man den oben geschriebenen Wert.

Seite 222. Am Schlusse des Artikels 166 kann noch hinzugefügt werden: Ist nämlich $\frac{m_1}{b}$ positiv, so muss $\frac{x_1 y_1}{xy}$ negativ sein, daher hat man die beiden nachfolgenden Fälle zu unterscheiden

$$1^0.\ x_1 > 0,\ y_1 > 0,\ x > 0,\ y < 0,$$
$$2^0.\ x_1 > 0,\ y_1 < 0,\ x > 0,\ y > 0,$$

weil Umdrehung der Zeichen der beiden Grössen x, y zugleich oder von x_1, y_1 keine andere Form für die Vektorfunktion ergibt.

Seite 244, Zeile 5 v. u. lies $\beta S\gamma\rho$, statt $\beta S 3\rho$.

Seite 245. In der Gleichung (f. 212) kann das Zeichen V vor dem Bruche weggelassen werden. Eine ähnliche Bemerkung bezieht sich auf die vorhergehende Gleichung und auf (f. 220), Seite 247.

Seite 247, Zeile 12 v. u. Vor: Es muss somit λ senkrecht zu ∂ sein, hinzuzufügen: es sei denn, dass ρ unendlich gross wäre.

Co